ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р11-96-480

Е.П.Жидков, А.Г.Соловьев*

УТОЧНЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

Направлено в «Журнал вычислительной математики и математической физики»

*Московский государственный университет

1996

Введение

В настоящей работе[1] изучается проблема повышения точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Подобные задачи на полубесконечном интервале встречаются в ряде разделов теоретической физики. Далеко не всегда их решение может быть получено аналитически. В связи с этим актуальной является проблема численного решения таких задач. При этом интервал $[x_0, \infty)$ заменяется отрезком $[x_0, R]$, условие из бесконечности переносится в точку R, и краевая задача решается на этом конечном отрезке.

Вопрос о переносе граничного условия из бесконечности рассмотрен в работах Абрамова [1], Биргера [2] и др. Применительно к изучаемой нами задаче полученный ими результат состоит в следующем. Условие ограниченности решения на бесконечности эквивалентно выполнению некоторого линейного соотношения между решением задачи и его производной в достаточно удаленной точке. Как правило, это соотношение удается получить лишь приближенно. В работах [1 – 2] получены оценки погрешности такой аппроксимации.

Далее, это полученное приближенно соотношение используется как граничное условие для задачи на конечном отрезке. Ее решение будет отличаться от решения исходной задачи. В литературе отсутствуют четкие критерии априорного выбора R таким, чтобы решение задачи на $[x_0, R]$ приближало решение исходной задачи на $[x_0, \infty)$ с заданной точностью. Поэтому задачу на $[x_0, R]$ часто приходится решать повторно с бо́льшим R. Сравнение полученных решений дает информацию об их точности. Если точность оказывается недостаточной (решения сильно различаются), то необходимо дальнейшее увеличение отрезка интегрирования.

Однако, имея в своем распоряжении два решения задачи на различных отрезках, можно построить их линейную комбинацию, которая будет приближать решение исходной задачи с погрешностью, существенно меньшей, чем погрешности каждого из решений по-отдельности. В работе авторов [3] предложен основанный на этой идее метод повышения точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Настоящая работа является продолжением работы [3] и посвящена описанию и строгому обоснованию предложенного метода.

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект $95-01-01467_{\text{а}}$).

1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача на полупрямой:

$$\begin{cases} u'' - \left(1 + \dfrac{c_1}{x} + \psi(x)\right) u = 0, \\ u(x_0) = A, \\ u(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

где $\psi(x)$ – непрерывная на интервале $[x_0, \infty)$ функция, такая что $\psi(x) = o\left(\dfrac{1}{x}\right)$ при $x \to \infty$, а заданная постоянная $A \neq 0$. Эта задача имеет единственное решение (см. [4], с. 282), и это решение имеет асимптотику (см. [5], с. 157)

$$u(x) = e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}} (1 + o(1)), \quad x \to \infty.$$

Для численного решения задачи (1) интервал $[x_0, \infty)$ заменяется отрезком $[x_0, R]$. Исходя из асимптотического разложения (см. [5], с. 155)

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = -\left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty$$

осуществляется перенос граничного условия из бесконечности в точку R, и решается следующая краевая задача на конечном отрезке:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 + \dfrac{c_1}{x} + \psi(x)\right) y = 0, \\ y(x_0) = A, \\ y'(R) + \left(1 + \dfrac{c_1}{2R}\right) y(R) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Далее будет показано, что она имеет единственное решение при достаточно больших R.

Решение $y(x)$ задачи (2), как решение однородного дифференциального уравнения второго порядка, единственным образом представимо в виде линейной комбинации двух его линейно независимых решений. Одним из них выберем решение $u(x)$ исходной задачи (1), тогда (см. [5], с. 129) функция

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{u^2(t)} \tag{3}$$

представляет собой другое, линейно независимое от него решение этого уравнения. Таким образом, представим решение $y(x)$ задачи (2) в виде

$$y(x) = u(x) + \lambda v(x). \tag{4}$$

Величина $\lambda v(x)$ представляет собой погрешность, вызванную заменой задачи (1) задачей (2).

Будем исследовать асимптотику коэффициента $\lambda = \lambda(R)$ в разложении (4) при $R \to \infty$.

2. Теорема о разложении

Поведение $\lambda(R)$ при больших значениях R описывает следующая.

Теорема 1. Пусть функция $\psi(x)$ имеет асимптотику

$$\psi(x) = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \to \infty. \tag{5}$$

Тогда $\lambda(R) \to 0$ при $R \to \infty$, причем

$$\lambda(R) = \frac{1}{4} e^{-2R} R^{-c_1} \left[\psi(R) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R^2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{R}\right)\right), \quad R \to \infty. \tag{6}$$

Доказательство. Из граничного условия в точке R задачи (2) для функции $\lambda(R)$ получается выражение

$$\lambda(R) = -\frac{u'(R) + \left(1 + \frac{c_1}{2R}\right) u(R)}{v'(R) + \left(1 + \frac{c_1}{2R}\right) v(R)}. \tag{7}$$

Получим сначала асимптотику числителя этого выражения. Запишем

$$\frac{u'(x)}{u(x)} = -\left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) + w(x).$$

Тогда функция $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$w' + w^2 - 2\left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) w = \psi(x) - \frac{c_1(c_1+2)}{4x^2}. \tag{8}$$

Как известно (см. [5], с. 150), $\dfrac{u'}{u} \to -1$ при $x \to \infty$, поэтому $w(x) \to 0$ при $x \to \infty$. В работе [2] доказано, что

$$w(x) = O\left(\psi(x) - \frac{c_1(c_1+2)}{4x^2}\right), \quad x \to \infty.$$

Как нетрудно убедиться, из уравнения (8) следует, что функция $w(x)$ имеет асимптотику

$$w(x) = -\frac{1}{2}\left[\psi(x) - \frac{c_1(c_1+2)}{4x^2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

Отсюда

$$u(x) = e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty$$

и

$$\begin{aligned} u'(x) + \left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) u(x) \;&=\; -\frac{1}{2} e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}} \left[\psi(x) - \frac{c_1(c_1+2)}{4x^2}\right] \times \\ &\times \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty. \end{aligned} \tag{9}$$

Получим теперь асимптотику знаменателя выражения (7), куда входит функция $v(x)$, определяемая формулой (3). Имеем:

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)} + \frac{1/u^2(x)}{\int\limits_{x_0}^{x} \frac{dt}{u^2(t)}} .$$

Учитывая, что $\frac{u'}{u} \to -1$ при $x \to \infty$, а также пользуясь правилом Лопиталя, получаем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{v'(x)}{v(x)} = -1 + \lim_{x\to\infty} \frac{-2u'(x)/u^3(x)}{1/u^2(x)} = 1.$$

Кроме того, (см. [5], с. 157)

$$v(x) = \mathrm{e}^x x^{\frac{c_1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty.$$

Поэтому

$$v'(x) + \left(1 + \frac{c_1}{2x}\right) v(x) = 2\mathrm{e}^x x^{\frac{c_1}{2}} \left(1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right), \quad x \to \infty. \tag{10}$$

Подставляя (9), (10) в формулу (7), получим асимптотику (6). Теорема доказана.

Заметим, что полученная асимптотика доказывает однозначную разрешимость задачи (2) при достаточно больших R. Действительно, в силу (10), знаменатель выражения (7) не обращается в нуль, когда R достаточно велико. А это значит, что разложение (4) законно и определяет решение задачи (2).

3. Теорема об уточнении

Как уже говорилось, $\lambda(R) \to 0$ при $R \to \infty$, т.е. решение задачи (2) на отрезке $[x_0, R]$ будет тем ближе к решению задачи (1), чем больше R. Будем понимать близость решений в смысле их близости в равномерной норме. А именно, если имеются два решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ задачи (2) на отрезках $[x_0, R_1]$ и $[x_0, R_2]$ соответственно, и $R_2 > R_1$, то будем считать их, а также решение $u(x)$ задачи (1) элементами пространства $\mathrm{C}[x_0, R_1]$ и оценивать погрешности в норме $||\cdot|| = \max\limits_{x\in[x_0,R_1]} |\cdot(x)|$.

Изложим теперь метод повышения точности, позволяющий, используя решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$, получить решение с погрешностью порядка $o(||y_2 - u||)$.

Теорема 2. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решения задачи (2) на отрезках $[x_0, R_1]$ и $[x_0, R_2]$ соответственно, где $R_2 > R_1$, и выполнены условия теоремы 1. Пусть, кроме того, R_1 и R_2 выбраны таким образом, чтобы параметр

$$\alpha = \frac{\mathrm{e}^{-2R_2} R_2^{-c_1} \left[\psi(R_2) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R_2^2}\right]}{\mathrm{e}^{-2R_1} R_1^{-c_1} \left[\psi(R_1) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R_1^2}\right]} \tag{11}$$

удовлетворял условию $0 < |\alpha| < 1 - \delta$, где $0 < \delta < 1$ и не зависит от R_1 и R_2.

Тогда линейная комбинация

$$\Psi(x) = \frac{y_2(x) - \alpha \cdot y_1(x)}{1 - \alpha}, \quad x \in [x_0, R_1] \tag{12}$$

приближает искомое решение $u(x)$ с погрешностью

$$||\Psi - u|| = O\left(\frac{||y_2 - u||}{R_1}\right). \tag{13}$$

Доказательство. Запишем для решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ разложения (4) с использованием асимптотики (6):

$$\begin{aligned} y_1(x) &= u(x) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2R_1} R_1^{-c_1} \left[\psi(R_1) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R_1^2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{R_1}\right)\right) v(x), \\ y_2(x) &= u(x) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2R_2} R_2^{-c_1} \left[\psi(R_2) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R_2^2}\right] \left(1 + O\left(\frac{1}{R_2}\right)\right) v(x). \end{aligned}$$

Подставив их в (12), получим

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= u(x) + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2R_2} R_2^{-c_1} \left[\psi(R_2) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R_2^2}\right] \times \\ &\quad \times \frac{O\left(\frac{1}{R_2}\right) - O\left(\frac{1}{R_1}\right)}{1 - \alpha} v(x). \end{aligned} \tag{14}$$

Имеют место следующие оценки:

$$\left|\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2R_2} R_2^{-c_1} \left[\psi(R_2) - \frac{c_1(c_1+2)}{4R_2^2}\right]\right| \cdot ||v|| \sim ||y_2 - u||, \quad R_2 \to \infty,$$

$$O\left(\frac{1}{R_2}\right) - O\left(\frac{1}{R_1}\right) = O\left(\frac{1}{R_1}\right).$$

Кроме того, из условия на параметр α следует, что $\frac{1}{|1-\alpha|} < +\infty$. Поэтому из (14) следует оценка (13). Теорема доказана.

4. Пример

В качестве примера, иллюстрирующего полученную оценку, рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} u'' - \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2}\right) u = 0, \\ u(1) = \frac{1}{5\mathrm{e}}, \\ u(\infty) = 0, \end{cases} \tag{15}$$

решение которой известно:

$$u(x) = e^{-x}x^4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right). \tag{16}$$

Заменим исходную задачу (15) задачей на конечном отрезке $[1, R]$:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 - \dfrac{8}{x} + \dfrac{2}{x^2}\right) y = 0, \\ y(1) = u(1), \\ y'(R) + \left(1 - \dfrac{4}{R}\right) y(R) = 0. \end{cases} \tag{17}$$

Задачу (17) будем решать численно. Для этого введем на отрезке $[1, R]$ равномерную сетку $\{x_k = 1 + k \cdot h, \quad k = 0, \dots N\}$ с шагом $h = \frac{R-1}{N}$ и построим разностную схему второго порядка точности (см. [6], с. 93 – 94):

$$\begin{cases} y_{k-1} - \left(2 + h^2\left(1 - \dfrac{8}{x_k} + \dfrac{2}{x_k^2}\right)\right) y_k + y_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = u(1), \\ y_N = \dfrac{1}{1 + h\left(1 - \frac{4}{x_N}\right) + \frac{h^2}{2}\left(1 - \frac{8}{x_N} + \frac{2}{x_N^2}\right)} y_{N-1}. \end{cases} \tag{18}$$

Возьмем $h = 0.1$ и выберем $R_1 = 11$, $R_2 = 12$. С целью уменьшения погрешности разностной схемы применим экстраполяцию Ричардсона, решая разностную задачу (18) дважды с шагами h и $h/2$. Таким образом, будем получать решения задачи (17) с погрешностью порядка h^4.

В следующей ниже таблице приведены точное решение (16) исходной задачи (15), решения задачи (17) на отрезках $[1, 11]$ и $[1, 12]$ (с погрешностью порядка h^4), а также уточненное решение, построенное по формуле (12).

x	$u(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$\Psi(x)$
1.00	0.0735759	0.0735759	0.0735759	0.0735759
2.00	-0.1082682	-0.1085799	-0.1083450	-0.1082756
3.00	-0.0896167	-0.0895786	-0.0896071	-0.0896155
4.00	0.0586100	0.0589981	0.0587059	0.0586196
5.00	0.1684487	0.1688800	0.1685548	0.1684587
6.00	0.1963172	0.1965696	0.1963788	0.1963225
7.00	0.1697924	0.1697882	0.1697906	0.1697913
8.00	0.1245237	0.1242568	0.1244570	0.1245161
9.00	0.0819688	0.0814261	0.0818339	0.0819544
10.00	0.0499399	0.0490432	0.0497174	0.0499167
11.00	0.0286969	0.0272407	0.0283358	0.0286595

Для погрешностей получаются следующие значения:

$$\begin{aligned} \|y_1 - u\| &= 0.0014561, \\ \|y_2 - u\| &= 0.0003610, \\ \|\Psi - u\| &= 0.0000374. \end{aligned}$$

Отсюда и из таблицы видно, что решение $\Psi(x)$ на порядок точнее, чем $y_2(x)$, что прекрасно согласуется с оценкой (13).

Заключение

В работе предложен и обоснован метод повышения точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. При этом основными результатами являются

- построение уточненного решения по двум решениям задачи на различных отрезках;
- оценки погрешности уточненного решения.
- асимптотика погрешности, вызванной заменой задачи на $[x_0, \infty)$ задачей на $[x_0, R]$, при $R \to \infty$;

Численные эксперименты, поставленные с целью проверки установленных теоретически фактов, показали высокую эффективность предложенного метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *А.А.Абрамов.* Сравнение решений прогоночных уравнений при переносе граничных условий из бесконечности для гамильтоновых линейных систем. – ЖВМ и МФ, 1995, **35**, N12, 1808 - 1818.
   А.А.Абрамов. О приближенных решениях, основанных на теоремах сравнения, скалярных и матричных уравнений Риккати на бесконечном интервале. – ЖВМ и МФ, 1993, **33**, N1, 35 - 51.
2. *Е.С.Биргер.* Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале. – ЖВМ и МФ, 1968, **8**, N3, 674 - 678.
3. *Е.П.Жидков, А.Г.Соловьев.* Повышение точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой. – 1996, Дубна, ОИЯИ, P11-96-153.
4. *Э.Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.:Наука, 1971.
5. *Р.Беллман.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.:Издательство иностранной литературы, 1954.
6. *А.А.Самарский.* Теория разностных схем. – М.:Наука, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 декабря 1996 года.