

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

96 - 153

P11-96-153

Е.П.Жидков, А.Г.Соловьев*

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ
РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ НА ПОЛУПРЯМОЙ

*Московский государственный университет

Введение

В настоящей работе¹ предложен метод повышения точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка. Подобные задачи на полубесконечном интервале могут возникнуть при приближенном решении задач квантовой механики с известным поведением волновой функции на бесконечности, при расчетах радиоволн, в газовой динамике при некоторых методах расчета течений с заданными условиями на бесконечности. При численном решении таких задач интервал $[x_0, \infty)$ заменяется отрезком $[x_0, R]$, где в R вместо условия ограниченности решения пишется соответствующее линейное соотношение с использованием асимптотических разложений, и краевая задача решается на этом конечном отрезке. Оценкам возникающей при этом погрешности посвящены работы Абрамова [1], Биргера [2] и др. Однако, исходя из этих оценок, для получения большей точности необходимо увеличивать длину отрезка.

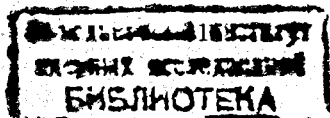
Ниже предложен другой метод получения высокой точности приближенных решений, который не требует существенного увеличения длины отрезка. Описанный подход, в некотором смысле аналогичный методу Ричардсона, основан на многократном решении задачи на конечных отрезках разной длины. Последующая комбинация полученных решений ("экстраполяция по длине отрезка") дает уточненное решение. Основанный на этом методе алгоритм описан в работе. Он успешно реализован на компьютере. Результаты его тестирования проиллюстрированы таблицами.

1. Идея метода. Уточнение по двум решениям

Рассматривается следующая краевая задача на полупрямой:

$$\begin{cases} u'' - \left(1 + \frac{c_1}{x} + \psi(x)\right) u = 0, \\ u(x_0) = A, \\ u(\infty) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

¹Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 95 - 01 - 01467_а).



Предполагается, что ее решение существует. Будем предполагать, что $A \neq 0$, а $\psi(x) = o(\frac{1}{x})$ при $x \rightarrow \infty$. При сделанных предположениях решение задачи имеет асимптотику (см. [3 - 5])

$$u(x) = e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}} (1 + o(1)), \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

а функция

$$v(x) = u(x) \int_{x_0}^x \frac{dt}{u^2(t)} \quad (3)$$

представляет собой линейно независимое от $u(x)$ решение уравнения.

Рассмотрим теперь краевую задачу на конечном отрезке $[x_0, R]$:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 + \frac{c_1}{x} + \psi(x)\right) y = 0, \\ y(x_0) = A, \\ y'(R) + \left(1 + \frac{c_1}{2R}\right) y(R) = 0, \end{cases} \quad (4)$$

где условие в точке R получено с учетом асимптотики (2). Решение $y(x)$ задачи (4) на отрезке $[x_0, R]$ будем называть приближенным решением задачи (1) на этом отрезке, а величину $u(x) - y(x)$ - погрешностью этого решения.

Представим $y(x)$ в виде линейной комбинации $u(x)$ - точного решения, или решения задачи (1), и $v(x)$ - линейно независимого от $u(x)$ решения уравнения:

$$y(x) = u(x) + \lambda v(x). \quad (5)$$

Так как $uv' - u'v = 1$, то

$$\lambda = uv' - u'y = -y^2(R) \cdot (u/y)'_{x=R}. \quad (6)$$

Последнее выражение не зависит от x , и точка $x = R$ взята лишь для определенности. Из него также следует, что $\lambda \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$, т.к. $u(x) \rightarrow 0$, $u'(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$. А это значит, что $y(x) \rightarrow u(x)$ при $R \rightarrow \infty$.

Пусть теперь $y_1(x)$ и $y_2(x)$ - решения задачи (4) на отрезках $[x_0, R_1]$ и $[x_0, R_2]$ соответственно. Пусть $R_2 > R_1$. Запишем

$$\begin{aligned} y_1(x) &= u(x) + \lambda_1 v(x), \\ y_2(x) &= u(x) + \lambda_2 v(x). \end{aligned} \quad (7)$$

Отношение погрешностей $y_1(x)$ и $y_2(x)$ есть величина, не зависящая от x :

$$\frac{u(x) - y_2(x)}{u(x) - y_1(x)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}. \quad (8)$$

Согласно (6), это отношение есть

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \left[\frac{y_2(R_2)}{y_1(R_1)} \right]^2 \cdot \frac{(u/y_2)'_{x=R_2}}{(u/y_1)'_{x=R_1}}. \quad (9)$$

Если имеется величина α , приближающая отношение $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ с абсолютной погрешностью ϵ ,

$$\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \epsilon,$$

то линейная комбинация

$$\Psi(x) = \frac{y_2(x) - \alpha y_1(x)}{1 - \alpha}, \quad (10)$$

приближает искомое решение $u(x)$ задачи (1) с погрешностью $(u(x) - y_1(x)) \cdot \frac{\epsilon}{1 - \alpha}$, а именно:

$$\Psi(x) = u(x) + (y_1(x) - u(x)) \cdot \frac{\epsilon}{1 - \alpha}. \quad (11)$$

Пусть R_1, R_2 достаточно велики, так что в выражении (2) $o(1) \ll 1$. Определим α , взяв в (9) в качестве u главный член асимптотики - функцию $g(x) = e^{-x} x^{-\frac{c_1}{2}}$:

$$\alpha = \left[\frac{y_2(R_2)}{y_1(R_1)} \right]^2 \cdot \frac{(g/y_2)'_{x=R_2}}{(g/y_1)'_{x=R_1}}. \quad (12)$$

При таком выборе параметра α его абсолютная погрешность есть

$$\epsilon = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} - \alpha = \alpha \cdot \frac{\frac{u(R_2)}{g(R_2)} - \frac{u(R_1)}{g(R_1)}}{\frac{u(R_1)}{g(R_1)}} \cdot (1 + o(1)). \quad (13)$$

Формулой (13) следует руководствоваться при выборе R_1 и R_2 , а именно для получения большей точности решения $\Psi(x)$ величина ϵ должна быть, по возможности, малой.

3. Уточнение по трем решениям

Покажем теперь, как описанный выше процесс уточнения можно продолжить, если имеются три решения $y_1(x)$, $y_2(x)$ и $y_3(x)$ задачи (4) на отрезках $[x_0, R_1]$, $[x_0, R_2]$ и $[x_0, R_3]$ соответственно ($R_3 > R_2 > R_1$). Обозначим их y_1^1 , y_2^1 , y_3^1 и будем называть уточненными решениями первого "поколения". Здесь и далее верхний индекс означает номер поколения, так что первое поколение - это собственно решения задачи (4). Запишем

$$\begin{aligned} y_1^1(x) &= u(x) + \lambda_1^1 v(x), \\ y_2^1(x) &= u(x) + \lambda_2^1 v(x), \\ y_3^1(x) &= u(x) + \lambda_3^1 v(x). \end{aligned} \quad (14)$$

Вычислим теперь параметры

$$\alpha_1^1 = \frac{[y_2^1(R_2)]^2}{[y_1^1(R_1)]^2} \cdot \frac{(g/y_2^1)'_{x=R_2}}{(g/y_1^1)'_{x=R_1}}, \quad (15)$$

$$\alpha_2^1 = \frac{[y_3^1(R_3)]^2}{[y_2^1(R_2)]^2} \cdot \frac{(g/y_3^1)'_{x=R_3}}{(g/y_2^1)'_{x=R_2}}$$

и определим два уточненных решения второго поколения

$$y_1^2(x) = \frac{y_2^1(x) - \alpha_1^1 y_1^1(x)}{1 - \alpha_1^1}, \quad (16)$$

$$y_2^2(x) = \frac{y_3^1(x) - \alpha_2^1 y_2^1(x)}{1 - \alpha_2^1}.$$

Заметим, что если имеется два решения первого поколения, как в предыдущем пункте, то во втором поколении определяется только одно решение — $y_1^2(x)$. А благодаря наличию в первом поколении третьего решения $y_3^1(x)$ возможно определить второе решение во втором поколении $y_2^2(x)$ и сделать еще один шаг уточнения следующим образом.

По двум решениям (16) найдем параметр

$$\alpha_1^2 = \frac{[y_2^2(R_2)]^2}{[y_1^2(R_1)]^2} \cdot \frac{(g/y_2^2)'_{x=R_2}}{(g/y_1^2)'_{x=R_1}} \quad (17)$$

и определим одно уточненное решение третьего поколения

$$y_1^3(x) = \frac{y_2^2(x) - \alpha_1^2 y_1^2(x)}{1 - \alpha_1^2}. \quad (18)$$

Найдем погрешность этого последнего решения. Имеем:

$$\alpha_1^1 = \frac{\lambda_2^1}{\lambda_1^1} - \epsilon_1^1,$$

$$\alpha_2^1 = \frac{\lambda_3^1}{\lambda_2^1} - \epsilon_2^1$$

и уточненные решения второго поколения

$$y_1^2(x) = u(x) + (y_1^1(x) - u(x)) \cdot \frac{\epsilon_1^1}{1 - \alpha_1^1},$$

$$y_2^2(x) = u(x) + (y_2^1(x) - u(x)) \cdot \frac{\epsilon_2^1}{1 - \alpha_2^1}.$$

С другой стороны, для $y_1^2(x)$ и $y_2^2(x)$ справедливы разложения

$$y_1^2(x) = u(x) + \lambda_1^2 v(x),$$

$$y_2^2(x) = u(x) + \lambda_2^2 v(x),$$

причем

$$\alpha_1^2 = \frac{\lambda_2^2}{\lambda_1^2} - \epsilon_2^2.$$

Поэтому для уточненного решения $y_1^3(x)$ имеет место формула

$$y_1^3(x) = u(x) + (y_1^2(x) - u(x)) \cdot \frac{\epsilon_1^1}{1 - \alpha_1^1} \cdot \frac{\epsilon_2^2}{1 - \alpha_1^2}, \quad (19)$$

из которой видно, что погрешность удается уменьшить в $\frac{\epsilon_1^1}{1 - \alpha_1^1} \cdot \frac{\epsilon_2^2}{1 - \alpha_1^2}$ раз.

3. Алгоритм

В этом пункте описан алгоритм нахождения приближенного решения с заданной точностью. Его идея — “пирамидка” — наметилась в предыдущем пункте.

Пусть заданы число δ — допустимая погрешность решения, число R_1 — правая граница отрезка, на котором требуется найти решение, а также числа R_2, R_3, R_4, \dots — сколько потребуется для достижения заданной точности. Предлагаемый алгоритм организован следующим образом:

- I. Решается задача (4) на отрезке $[x_0, R_1]$. Полученное решение есть $y_1^1(x)$.
- II. Решается задача (4) на отрезке $[x_0, R_2]$. Полученное решение есть $y_2^1(x)$.
- III. Вычисляется параметр α_1^1 по формуле

$$\alpha_1^1 = \frac{[y_2^1(R_2)]^2}{[y_1^1(R_1)]^2} \cdot \frac{(g/y_2^1)'_{x=R_2}}{(g/y_1^1)'_{x=R_1}},$$

и находится уточненное решение

$$y_1^2(x) = \frac{y_2^1(x) - \alpha_1^1 y_1^1(x)}{1 - \alpha_1^1}.$$

IV. Если $\max_{x \in [x_0, R_1]} |y_1^2(x) - y_1^1(x)| < \delta$, то решение $y_1^2(x)$ принимается за искоемое приближение решения $u(x)$ задачи (1) на отрезке $[x_0, R_1]$. Предложенный критерий остановки, конечно, не является единственно возможным. Но он удобен при практическом применении алгоритма.

Допустим, задача (4) решалась $(n - 1)$ раз. Имеем следующую цепочку решений:

$$y_{n-1}^1(x) - \text{решение задачи (4) на отрезке } [x_0, R_{n-1}],$$

$$y_{n-2}^2(x) - \text{решение, уточненное по } y_{n-2}^1(x) \text{ и } y_{n-1}^1(x),$$

⋮

$$y_{n-k}^k(x) - \text{решение, уточненное по } y_{n-k-1}^{k-1}(x) \text{ и } y_{n-k}^{k-1}(x),$$

⋮

$$y_1^{n-1}(x) - \text{решение, уточненное по } y_1^{n-2}(x) \text{ и } y_2^{n-2}(x).$$

Допустим, заданная точность не достигнута.

V. Решается задача (4) на отрезке $[x_0, R_n]$. Полученное решение есть $y_n^1(x)$.

VI. Вычисляются параметры

$$\alpha_{n-k}^k = \left[\frac{y_{n-k+1}^k(R_{n-k+1})}{y_{n-k}^k(R_{n-k})} \right]^2 \cdot \frac{(g/y_{n-k+1}^k)'_{x=R_{n-k+1}}}{(g/y_{n-k}^k)'_{x=R_{n-k}}}, \quad (20)$$

$$k = 1, \dots, n-1,$$

и находятся уточненные решения

$$y_{n-k}^{k+1}(x) = \frac{y_{n-k+1}^k(x) - \alpha_{n-k}^k y_{n-k}^k(x)}{1 - \alpha_{n-k}^k}, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (21)$$

VII. Сравниваются решения $y_1^n(x)$ и $y_1^{n-1}(x)$. Если $\max_{x \in [x_0, R_1]} |y_1^n(x) - y_1^{n-1}(x)| = \|y_1^n - y_1^{n-1}\|_{C[x_0, R_1]} < \delta$, то решение $y_1^n(x)$ принимается за искомое приближение, причем для достижения заданной точности задача (4) решалась n раз. В противном случае процедура V - VII повторяется.

Докажем сходимость этого алгоритма. Рассмотрим последовательность решений $\{y_1^n\}_{n=1,2,\dots}$, являющихся приближениями решения $u(x)$ задачи (1) на отрезке $[x_0, R_1]$. Причем $y_1^n(x)$ - приближенное решение n -го поколения, для его построения необходимо решить задачу (4) n раз. Легко доказать, что

$$y_1^n(x) = u(x) + (y_1^1(x) - u(x)) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} \frac{\epsilon_1^k}{1 - \alpha_1^k}, \quad (22)$$

где α_1^k - параметры, определяемые по формулам (20), а ϵ_1^k - их абсолютные погрешности: $\epsilon_1^k = \frac{\lambda_1^k}{\lambda_1^k} - \alpha_1^k$.

Отсюда следует, что если $\frac{\epsilon_1^k}{1 - \alpha_1^k} < 1$, $k = 1, 2, \dots$, то $\|y_1^n - u\|_{C[x_0, R_1]} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, т.е. $y_1^n \rightarrow u$ при $n \rightarrow \infty$. Причем если $\sup_k \left| \frac{\epsilon_1^k}{1 - \alpha_1^k} \right| = q < 1$, то скорость сходимости определяется формулой

$$\|y_1^n - u\|_{C[x_0, R_1]} \leq \|y_1^1 - u\|_{C[x_0, R_1]} \cdot q^{n-1}. \quad (23)$$

Поясним теперь предложенный критерий остановки. Пусть $\delta = 10^{-(M+1)}$. Тогда условие $\|y_1^n - y_1^{n-1}\|_{C[x_0, R_1]} < \delta$ означает, что в решениях $y_1^n(x)$ и $y_1^{n-1}(x)$ совпадают M знаков (M знаков стабилизировались), а это, в свою очередь, с учетом (22), значит, что стабилизировавшиеся знаки в $y_1^n(x)$ - верные знаки точного решения - решения задачи (1). Т.е. $\|y_1^n - u\|_{C[x_0, R_1]} < \delta$.

4. Примеры

Здесь приведены результаты тестирования программы, основанной на описанном выше алгоритме. Тестирование проводилось следующим образом: рассматривалось обыкновенное дифференциальное уравнение

$$u'' - \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2}\right) u = 0, \quad (24)$$

решение которого известно:

$$u(x) = e^{-x} x^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right), \quad (25)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} u(1) &= \frac{1}{5e}, \\ u(\infty) &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Исходная задача (24), (26) заменялась задачей на конечном отрезке $[x_0, R]$:

$$\begin{cases} y'' - \left(1 - \frac{8}{x} + \frac{2}{x^2}\right) y = 0, \\ y(1) = u(1), \\ y'(R) + \left(1 - \frac{4}{x}\right) y(R) = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Последняя, в свою очередь, заменялась разностной схемой (см. [6])

$$\begin{cases} y_{k-1} - \left(2 + h^2 \left(1 - \frac{8}{x_k} + \frac{2}{x_k^2}\right)\right) y_k + y_{k+1} = 0, \quad k = 1, \dots, N-1, \\ y_0 = u(1), \\ y_N = \frac{1}{1 + h \left(1 - \frac{4}{x_N}\right) + \frac{h^2}{2} \left(1 - \frac{8}{x_N} + \frac{2}{x_N^2}\right)} y_{N-1}, \end{cases} \quad (28)$$

где $h = \frac{R-x_0}{N}$ - шаг сетки по x : $x_0, x_1, \dots, x_N = R$, $x_k = x_0 + k \cdot h$. Такая разностная схема имеет второй порядок точности.

Здесь необходимо сделать одно важное замечание. Решением разностной задачи (28) является сеточная функция, определенная в узлах сетки x_0, x_1, \dots, x_N и зависящая от параметров R и h . Ее значение в точке x_k есть

$$y_k^{R,h} = u(x_k) + \lambda_R v(x_k) + \eta_R(x_k) \cdot h^2 + O(h^4), \quad (29)$$

где $u(x_k), v(x_k)$ - значения функций $u(x), v(x)$ в точке x_k , η_R - некоторая сеточная функция, не зависящая от h .

Слагаемое $\lambda_R v(x_k)$ в выражении (29) есть ошибка, связанная с заменой задачи (24), (26) задачей (27). Последующие слагаемые - погрешность разностной схемы. Она ограничивает повышение точности экстраполяцией по R . Поэтому наращивание числа решений нецелесообразно без повышения точности решений задачи (27). В рассмотренном примере решения задачи (27) сначала уточнялись по Ричардсону, так что $y_k^{R,h} = u(x_k) + \lambda_R v(x_k) + O(h^4)$, а затем к ним применялся процесс уточнения экстраполяцией по R . Шаг изменения длины отрезка брался постоянным и равным шагу разностной схемы h . Во всех приведенных ниже примерах $h = 0.1$.

1) Уточнение по двум решениям:

$$R_1 = 10.0, R_2 = 10.1;$$

$$\Psi(x) = \frac{y_2(x) - \alpha y_1(x)}{1 - \alpha}.$$

Таблица 1

x	$u(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$\Psi(x)$
1.00	0.0735759	0.0735759	0.0735759	0.0735759
2.00	-0.1082682	-0.1094405	-0.1092989	-0.1082872
3.00	-0.0896167	-0.0894744	-0.0894915	-0.0896141
4.00	0.0586100	0.0600683	0.0598922	0.0586340
5.00	0.1684487	0.1700714	0.1698754	0.1684748
6.00	0.1963172	0.1972682	0.1971533	0.1963319
7.00	0.1697924	0.1697796	0.1697810	0.1697912
8.00	0.1245237	0.1235234	0.1236440	0.1245062
9.00	0.0819688	0.0799324	0.0801781	0.0819343
10.00	0.0499399	0.0465732	0.0469797	0.0498834

Полученная точность решения $\Psi(x)$ достигается при однократном решении задачи (27) с $R > 11$.

2) Уточнение по трем решениям:

$$R_1 = 10.0, R_2 = 10.1, R_3 = 10.2;$$

$$\Psi(x) = y_1^3(x).$$

Таблица 2

x	$u(x)$	$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	$\Psi(x)$
1.00	0.0735759	0.0735759	0.0735759	0.0735759	0.0735759
2.00	-0.1082682	-0.1094405	-0.1092989	-0.1091736	-0.1082648
3.00	-0.0896167	-0.0894744	-0.0894915	-0.0895067	-0.0896168
4.00	0.0586100	0.0600683	0.0598922	0.0597364	0.0586062
5.00	0.1684487	0.1700714	0.1698754	0.1697019	0.1684438
6.00	0.1963172	0.1972682	0.1971533	0.1970516	0.1963137
7.00	0.1697924	0.1697796	0.1697810	0.1697823	0.1697914
8.00	0.1245237	0.1235234	0.1236440	0.1237508	0.1245253
9.00	0.0819688	0.0799324	0.0801781	0.0803956	0.0819731
10.00	0.0499399	0.0465732	0.0469797	0.0473392	0.0499476

В этом случае такая точность достигается при однократном решении задачи (27) с $R > 14$.

3) Иллюстрация процесса уточнения при получении решения с заданной точностью:

$$R_1 = 10;$$

$\epsilon = h^5$ - точность (критерий останова программы). В этом случае задача решается 4 раза.

Опуская промежуточные значения, приведем конечный результат.

Таблица 3

x	$u(x)$	$\Psi(x)$
1.00	0.0735759	0.0735759
2.00	-0.1082682	-0.1082683
3.00	-0.0896167	-0.0896163
4.00	0.0586100	0.0586105
5.00	0.1684487	0.1684486
6.00	0.1963172	0.1963165
7.00	0.1697924	0.1697914
8.00	0.1245237	0.1245224
9.00	0.0819688	0.0819671
10.00	0.0499399	0.0499377

Приведем также значения решений $y_1^n(x)$ на каждом этапе уточнения в точках $x = 5$ и $x = 10$:

Таблица 4

	$x = 5$	$x = 10$
$u(x)$	0.1684487	0.0499399
$y_1^1(x)$	0.1700714	0.0465732
$y_1^2(x)$	0.1684748	0.0498834
$y_1^3(x)$	0.1684438	0.0499476
$y_1^4(x)$	0.1684486	0.0499377

5. Выводы

В работе доказана возможность повышения точности приближенных решений краевой задачи на полупрямой для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, отличная от предлагаемой в работах [1 - 2]. Предложен и обоснован метод экстраполяции по длине отрезка. Разработан алгоритм нахождения приближенного решения заданной точности на данном отрезке. Причем можно получить любую наперед заданную точность, но для этого необходимо обеспечить получение достаточно точных решений задачи на конечном отрезке. Численные эксперименты, тестирование программы, основанной на предложенном алгоритме, дали хорошие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А.Абрамов. Сравнение решений прогоночных уравнений при переносе граничных условий из бесконечности для гамильтоновых линейных систем. – ЖВМ и МФ, 1995, 35, N12, 1808 - 1818.
А.А.Абрамов. О приближенных решениях, основанных на теоремах сравнения, скалярных и матричных уравнений Риккати на бесконечном интервале. – ЖВМ и МФ, 1993, 33, N1, 35 - 51.
2. Е.С.Биргер. Об оценке погрешности замены условия ограниченности решения линейного дифференциального уравнения на бесконечном интервале. – ЖВМ и МФ, 1968, 8, N3, 674 - 678.
3. Ф.Олвер. Асимптотика и специальные функции. – М.:Наука, 1990.
4. Р.Беллман. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.:Издательство иностранной литературы, 1954.
5. Дж.Сансоне. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.:Издательство иностранной литературы, 1954.
6. А.А.Самарский. Теория разностных схем. – М.:Наука, 1977.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 апреля 1996 года.