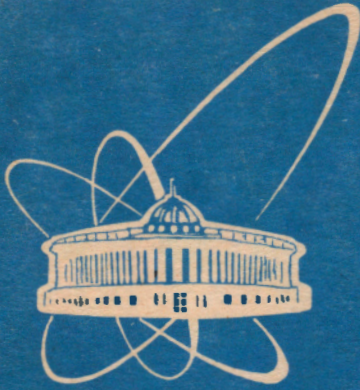


95-8



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P11-95-8

И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, И.В.Пузынин,  
Т.П.Пузынина, Т.А.Стриж

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ЧИСЛЕННОГО  
ИССЛЕДОВАНИЯ МОДЕЛИ КВАРКОНИЯ  
С КУЛОНОВСКИМ И ЛИНЕЙНЫМ ПОТЕНЦИАЛАМИ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

1995

## ВВЕДЕНИЕ

Одним из направлений, развиваемых в последнее время для единообразного описания спектроскопии легких и тяжелых кваркониев, является предложенная в [1] потенциальная модель с использованием уравнения Швингера — Дайсона (Ш-Д) для кварков и уравнения Бете — Солпитера (Б-С) для их связанных состояний с единым феноменологическим потенциалом.

Уравнение Ш-Д в рамках рассматриваемого подхода может быть сведено к системе двух нелинейных интегральных уравнений в трехмерном пространстве, решения которой — волновая функция и функция энергии кварка — входят, в свою очередь, в уравнение Б-С, представляющее собой задачу на собственные значения для системы интегральных уравнений в трехмерном пространстве. Собственные значения и собственные функции уравнения Б-С имеют физический смысл уровней энергии и волновых функций мезона.

Рядом авторов (см., например, [2]) проводятся исследования уравнений Ш-Д и Б-С с различными видами эффективных потенциалов, выбранными из каких-либо физических соображений. Целью таких исследований, помимо изучения характеристик модели на качественном уровне, является описание имеющихся экспериментальных данных, в том числе спектров мезонов и констант лептонных распадов.

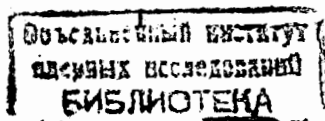
При решении последней задачи необходима разработка достаточно эффективного математического и вычислительного аппарата для решения систем уравнений Ш-Д и Б-С. Такой аппарат разрабатывается в настоящее время, и с его помощью получены некоторые результаты, относящиеся к развитию потенциальной модели кваркония.

Так, в работе [3] найдены спектры мезонов для случая осцилляторного потенциала. В работе [4] проведено исследование уравнений Ш-Д и Б-С для потенциала Гаусса и найдены условия одновременного описания константы распада и массы основного состояния пиона.

В настоящей работе системы уравнений Ш-Д и Б-С исследуются для различных модификаций уравнения Ш-Д с потенциалом, содержащим комбинацию кулоновского и линейно растущего членов:

$$V(r) = -\alpha \frac{1}{r} + \sigma r, \quad (1)$$

где  $\alpha$  и  $\sigma$  — параметры потенциала. В импульсном представлении



указанный потенциал имеет следующий вид:

$$V(|\vec{p}-\vec{q}|) = -\alpha \frac{4\pi}{|\vec{p}-\vec{q}|^2} - \sigma \frac{8\pi}{|\vec{p}-\vec{q}|^4}. \quad (2)$$

Исследование рассматриваемой модели с потенциалом (1),(2) представляет интерес, поскольку потенциал такого вида используется в рамках иных подходов для описания спектроскопии тяжелых кваркониев (см., в частности, [1,2,5]).

Целью настоящего исследования, как и в работе [4], является определение способов модификаций уравнения Ш-Д, значений параметров потенциала и токовой массы кварка для совместного описания массы и константы распада пиона. Однако разработанное программное обеспечение может использоваться при расчетах спектров как легких, так и тяжелых кваркониев.

Следует отметить, что для различных видов потенциалов уравнения Ш-Д и Б-С сводятся к различным видам нелинейных функциональных уравнений, эффективным средством решения которых является непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН) [6] и его модификации. Ньютоновские итерационные схемы успешно использовались при численном решении этих уравнений с осцилляторным потенциалом [7], потенциалом, представляющим комбинацию кулоновского и осцилляторного членов [8], потенциалом Гаусса [4]. В данной работе для решения задачи Б-С также используется итерационный процесс на основе модификации НАМН.

В работе сформулированы постановки задач для систем уравнений Ш-Д и Б-С с потенциалом (1),(2), обсуждаются различные модификации уравнения Ш-Д (так называемые "перенормировки волновой функции кварка внутри мезона"), описываются методы численного исследования и представлены полученные численные результаты.

## 1. УРАВНЕНИЕ ШВИНГЕРА - ДАЙСОНА

Система уравнений Ш-Д для заданного потенциала  $V(|\vec{p}-\vec{q}|)$  в рамках рассматриваемого подхода имеет следующий вид [7]:

$$\begin{cases} E(p)\cos(2v(p)) = m_0 + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p}-\vec{q}|) \cos(2v(q)) / (2\pi)^3, \\ E(p)\sin(2v(p)) = p + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p}-\vec{q}|) \xi \sin(2v(q)) / (2\pi)^3, \end{cases} \quad (3)$$

где интегрирование ведется в трехмерном пространстве координат вектора  $\vec{q}$ ,  $\xi = (\vec{p}/p, \vec{q}/q)$  — скалярное произведение единичных трехмерных векторов,  $m_0$  — заданная константа (масса кварка).  $E(p)$  и  $v(p)$  — соответственно энергия и волновая функция кварка, которые надо найти.

После интегрирования по углам  $\Omega\vec{q}$  система (3) принимает вид

$$\begin{cases} E(p)\cos(2v(p)) = m_0 + I_1(p), \\ E(p)\sin(2v(p)) = p + I_2(p), \end{cases} \quad (4)$$

где

$$I_1(p) = \int_0^\infty dq V_1(p, q) \cos(2v(q)), \quad (5)$$

$$I_2(p) = \int_0^\infty dq V_2(p, q) \sin(2v(q)), \quad (6)$$

$$V_1(p, q) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega V(|\vec{p}-\vec{q}|), \quad (7)$$

$$V_2(p, q) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega \xi V(|\vec{p}-\vec{q}|). \quad (8)$$

Решения системы уравнений (4) зависят как от вида потенциала, так и от асимптотического поведения функций  $V_1(p, q)$  и  $V_2(p, q)$  при  $p \rightarrow 0$ ,  $q = const$  (или  $q \rightarrow 0$ ,  $p = const$ ),  $p \rightarrow \infty$ ,  $q = const$  (или  $q \rightarrow \infty$ ,  $p = const$ ),  $|p-q| \rightarrow 0$ .

Кроме того, из физических соображений функции  $I_1(p)$  и  $I_2(p)$  должны удовлетворять определенным асимптотическим условиям при  $p \rightarrow 0$  и  $p \rightarrow \infty$ :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_1 = 0, \lim_{p \rightarrow \infty} I_2 = 0, \lim_{p \rightarrow 0} I_1 = const < \infty, \lim_{p \rightarrow 0} I_2 = const < \infty. \quad (9)$$

Это накладывает ограничения на класс допустимых потенциалов.

При этом для некоторых потенциалов, используемых в спектроскопии адронов, интегралы  $I_1(p)$  и  $I_2(p)$  в асимптотике малых и больших импульсов имеют расходимости.

Для устранения расходимости в рамках множества выбранных потенциалов ряд авторов предлагает заменить систему (4) системой так

называемых перенормированных уравнений (обычно такой прием используется в теории возмущений):

$$\begin{cases} E(p)\cos(2v(p)) = m_0(1 - Z_m) + I_1(p), \\ E(p)\sin(2v(p)) = p(1 - Z) + I_2(p), \end{cases}$$

где

$$Z_m = \text{const} < \infty, \quad Z = \text{const} < \infty.$$

Подбирая  $Z_m$  и  $Z$ , для некоторых потенциалов можно достичь выполнения физических требований, накладываемых на систему (4). Некоторые авторы предлагают постоянные  $Z_m$ ,  $Z$  заменить функциями  $Z_m(p)$ ,  $Z(p)$  и подбирать их специальным образом. Эти вопросы обсуждаются, в частности, в работах [2].

В настоящей работе мы предлагаем другой, более общий способ модификации системы (4). Сохраняя вид системы Ш-Д (4), введем в выражения (5),(6) некоторые новые функции  $f_1(p, q)$  и  $f_2(p, q)$  следующим образом:

$$\begin{cases} I_1(p) = \int_0^{\infty} dq V_1(p, q) \cos(2v(q)) f_1(p, q), \\ I_2(p) = \int_0^{\infty} dq V_2(p, q) \sin(2v(q)) f_2(p, q). \end{cases} \quad (10)$$

Выбирая различным образом функции  $f_1$  и  $f_2$ , мы получаем различные модификации уравнения Ш-Д. Так, например, если

$$\begin{cases} f_1 = \frac{\cos(2v(p)) - m_0/\sqrt{p^2 + m_0^2}}{\cos(2v(p))}, \\ f_2 = \frac{\sin(2v(p)) - 1}{\sin(2v(p))}, \end{cases} \quad (11)$$

то получаем систему уравнений Ш-Д, рассмотренную в работе [9]. При  $f_1 \equiv 1$  и  $f_2 \equiv 0$  мы имеем один из вариантов модификации уравнения Ш-Д, рассмотренный в работе [4], и т.д.

В качестве вариантов выбора функций  $f_1$  и  $f_2$  могут рассматриваться, например, аналитические решения уравнения Шредингера с соответствующим потенциалом [10], а также функции вида  $p^\alpha \exp(-\beta p)$  или  $\gamma p^\alpha / (p^\alpha + 1)^\beta$  и т.п., где  $\alpha \geq 0, \beta \geq 1, \gamma > 0$ .

Отметим, что поскольку решения  $E(p)$  и  $v(p)$  системы (4), (7), (8), (10) описывают не свободные кварки, а кварки, находящиеся в связанном состоянии ("внутри мезона"), то выбор функций  $f_1$  и  $f_2$  можно связать не только с решениями системы Ш-Д, но и с решениями  $U_1(p)$  и  $U_2(p)$  уравнения Б-С, т.е.  $f_1 = f_1(p, U_1(p)), f_2 = f_2(p, U_2(p))$ . Уравнения Ш-Д и Б-С в этом случае надо решать как единую систему уравнений.

Заметим, что в данной работе мы не занимаемся обоснованием замены системы (4)-(6) на систему (4),(10) и конкретного выбора функций  $f_1$  и  $f_2$  исходя из физической корректности модели. Критерием правильности того или иного выбора этих функций в настоящем исследовании является правильное асимптотическое поведение решений, отсутствие расхождений в интегралах  $I_1$  и  $I_2$ , а также количественное описание экспериментальных данных для массы и константы распада основного состояния пиона.

Обратим особое внимание на правильную запись системы уравнений (4) для линейно растущего потенциала. Подставляя потенциал (2) в систему (4), мы получаем интегралы  $I_1$  и  $I_2$ , расходящиеся при  $|\bar{p} - \bar{q}| \rightarrow 0$ . Используя соотношение (тождество)

$$\frac{1}{|\bar{p} - \bar{q}|^4} = \frac{1}{2} \Delta_p \frac{1}{|\bar{p} - \bar{q}|^2} \quad (12)$$

( $\Delta_p$  — оператор Лапласа,  $(\cdot)'' \equiv \frac{d^2}{dp^2}(\cdot)$ ), систему (4) перепишем следующим образом:

$$\begin{cases} E(p)\cos(2v(p)) = m_0 + I_{1K} + I_{1L}, \\ E(p)\sin(2v(p)) = p + I_{2K} + I_{2L}, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} I_{1K} &= \bar{\alpha} \frac{1}{p} \hat{I}_{1K}, & I_{2K} &= \bar{\alpha} \frac{1}{p} \hat{I}_{2K}, \\ I_{1L} &= \frac{\bar{\sigma}}{2p} \hat{I}_{1K}'', & I_{2L} &= \frac{\bar{\sigma}}{2p} [\hat{I}_{2K}'' - \frac{2}{p^2} \hat{I}_{2K}], \\ \bar{\alpha} &= -\frac{1}{2\pi} \alpha, & \bar{\sigma} &= -\frac{1}{\pi} \sigma, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{cases} \hat{I}_{1K}(p) = \int_0^{\infty} dq q \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \cos(2v(q)) f_1(p, q), \\ \hat{I}_{2K}(p) = \int_0^{\infty} dq q \left[ -1 + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right] \sin(2v(q)) f_2(p, q). \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом, система уравнений Ш-Д для потенциала (2) сводится к решению краевой задачи для системы нелинейных уравнений (13)-(15) с граничными условиями

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} v(p) = \pi/4, \quad \lim_{p \rightarrow 0} E(p) = const, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} E(p) = p.$$

## 2. УРАВНЕНИЕ БЕТЕ - СОЛПИТЕРА

Рассмотрим уравнение Б-С для псевдоскалярных мезонов, состоящих из кварков с разными массами [7]:

$$ML_{(1)}^{(2)}(\vec{p}) = E_t(p)L_{(1)}^{(2)}(\vec{p}) - \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(|\vec{p}-\vec{q}|) [C_p^{(+)} C_q^{(+)} + \xi S_p^{(+)} S_q^{(+)}] L_{(1)}^{(2)}(\vec{q}), \quad (16)$$

где

$$C_p^{(\pm)} = \cos(v_1(p) \pm v_2(p)), \\ S_p^{(\pm)} = \sin(v_1(p) \pm v_2(p)),$$

$v_1, v_2$  и  $E_1, E_2$  — решения уравнения Ш-Д для кварка и антикварка,  $E_t(p) = E_1(p) + E_2(p)$  — полная энергия мезона,  $M$  — собственное значение (масса связанного состояния),  $L_{(1)}^{(2)}$  — волновые функции. Условие нормировки имеет вид

$$\frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} L_1(\vec{q}) L_2(\vec{q}) = 1, \quad (17)$$

где  $N_C = 3$  — квантовое число. Используя полученные решения системы (16), можно вычислить константы лептонных распадов псевдоскалярных мезонов:

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} L_2(\vec{q}) \cos(v_1(q) + v_2(q)). \quad (18)$$

Будем искать решения системы (16) в следующем виде:

$$L_{(1)}^{(2)}(\vec{p}) = \frac{1}{p} \sum_{l,m} U_{(1)lm}^{(2)}(p) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (19)$$

где  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  — сферические функции.

Подставим (19) в формулы (16), (17) при  $l, m = 0$  (сферически симметричный случай). Тогда для потенциала (2), обозначив для краткости  $U_{(1)00}^{(2)} = U_{(1)}^{(2)}$ , получим

$$MU_{(1)}^{(2)}(p) = E_t(p)U_{(1)}^{(2)}(p) - 2 \int_0^\infty dq [C_p^{(+)} C_q^{(+)} \hat{V}_1(p, q) + S_p^{(+)} S_q^{(+)} \hat{V}_2(p, q)] U_{(1)}^{(2)}(q), \quad (20)$$

$$\frac{4N_C}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty dq U_1(q) U_2(q) = 1, \quad (21)$$

где

$$\hat{V}_1(p, q) = \frac{p}{q} V_1(p, q), \quad \hat{V}_2(p, q) = \frac{p}{q} V_2(p, q).$$

$V_1(p, q)$  и  $V_2(p, q)$  определяются формулами (7), (8).

Формула для константы лептонных распадов примет вид

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{4\pi} \int_0^\infty dq q U_2(q) \cos(v_1(q) + v_2(q)). \quad (22)$$

Чтобы устранить расходимость интегралов при  $|\vec{p}-\vec{q}| \rightarrow 0$  для линейно растущего потенциала, точно так же, как и в предыдущем разделе, перепишем систему (20) следующим образом:

$$\begin{cases} E_t(p)U_1(p) - MU_2(p) - 2J_1(p) = 0, \\ E_t(p)U_2(p) - MU_1(p) - 2J_2(p) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где

$$J_1(p) = C_p^{(-)} [\bar{\alpha} W_{1K}^{(-)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2} (W_{1K}^{(-)}(p))''] + S_p^{(-)} [\bar{\alpha} W_{2K}^{(-)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2} ((W_{2K}^{(-)}(p))'' - \frac{2}{p^2} W_{2K}^{(-)}(p))], \quad (24)$$

$$J_2(p) = C_p^{(+)} [\bar{\alpha} W_{1K}^{(+)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2} (W_{1K}^{(+)}(p))''] + S_p^{(+)} [\bar{\alpha} W_{2K}^{(+)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2} ((W_{2K}^{(+)}(p))'' - \frac{2}{p^2} W_{2K}^{(+)}(p))], \quad (25)$$

$$W_{1K}^{(\pm)} = \int_0^{\infty} dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| C_q^{(\pm)} U_{(2)}^{(\pm)}(q), \quad (26)$$

$$W_{2K}^{(\pm)} = \int_0^{\infty} dq \left[ -1 + \frac{p^2+q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right] S_q^{(\pm)} U_{(2)}^{(\pm)}(q). \quad (27)$$

Поскольку интегралы (26) и (27) имеют сингулярности при  $|p \rightarrow q| \rightarrow 0$ , их удобно представить в следующем виде:

$$W_{1K}^{(\pm)} = W_{11K}^{(\pm)} + W_{12K}^{(\pm)}, \quad (28)$$

$$W_{2K}^{(\pm)} = W_{21K}^{(\pm)} + W_{22K}^{(\pm)}, \quad (29)$$

где

$$W_{11K}^{(\pm)} = C_p^{(\pm)} S V_1(p) U_{(2)}^{(\pm)}(p),$$

$$W_{12K}^{(\pm)} = \int_0^{\infty} dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| [C_q^{(\pm)} U_{(2)}^{(\pm)}(q) - C_p^{(\pm)} U_{(2)}^{(\pm)}(p)],$$

$$W_{21K}^{(\pm)} = S_p^{(\pm)} S V_2(p) U_{(2)}^{(\pm)}(p),$$

$$W_{22K}^{(\pm)} = \int_0^{\infty} dq \left[ -1 + \frac{p^2+q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right] [S_q^{(\pm)} U_{(2)}^{(\pm)}(q) - S_p^{(\pm)} U_{(2)}^{(\pm)}(p)],$$

$$S V_1(p) = \int_0^{\infty} dq \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|,$$

$$S V_2(p) = \int_0^{\infty} dq \left[ -1 + \frac{p^2+q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right].$$

Отметим, что аналогичный прием использовался и при вычислении интегралов (15). Другой вариант представления интегралов (26), (27) дается в приложении.

Таким образом, система уравнений (20) принимает вид задачи на собственные значения

$$\begin{cases} V_{13} U_1'' + V_{12} U_1' + V_{11} U_1 - M U_2 - 2J_{12} = 0, \\ V_{23} U_2'' + V_{22} U_2' + V_{21} U_2 - M U_1 - 2J_{22} = 0 \end{cases} \quad (30)$$

с условием нормировки (21) и граничными условиями

$$\lim_{p \rightarrow 0} U_{(2)}^{(\pm)}(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} U_{(2)}^{(\pm)}(p) = 0,$$

где

$$V_{11} = E_t(p) - 2\{C_p^{(-)}[\bar{\alpha} C V_1^{(-)} + \frac{\bar{\sigma}}{2}(C V_1^{(-)})''] + S_p^{(-)}[\bar{\alpha} S V_2^{(-)} + \frac{\bar{\sigma}}{2}((S V_2^{(-)})'' - \frac{2}{p^2} S V_2^{(-)})]\}, \quad (31)$$

$$V_{12} = -2\bar{\sigma}[C_p^{(-)}(C V_1^{(-)})' + S_p^{(-)}(S V_2^{(-)})'], \quad (32)$$

$$V_{13} = -\bar{\sigma}[(C_p^{(-)} C V_1^{(-)} + S_p^{(-)} S V_2^{(-)})], \quad (33)$$

$$V_{21} = E_t(p) - 2\{C_p^{(+)}[\bar{\alpha} C V_1^{(+)} + \frac{\bar{\sigma}}{2}(C V_1^{(+)})''] + S_p^{(+)}[\bar{\alpha} S V_2^{(+)} + \frac{\bar{\sigma}}{2}((S V_2^{(+)})'' - \frac{2}{p^2} S V_2^{(+)})]\}, \quad (34)$$

$$V_{22} = -2\bar{\sigma}[C_p^{(+)}(C V_1^{(+)})' + S_p^{(+)}(S V_2^{(+)})'], \quad (35)$$

$$V_{23} = -\bar{\sigma}[C_p^{(+)} C V_1^{(+)} + S_p^{(+)} S V_2^{(+)}], \quad (36)$$

$$J_{12} = C_p^{(-)}[\bar{\alpha} W_{12K}^{(-)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2}(W_{12K}^{(-)}(p))''] + S_p^{(-)}[\bar{\alpha} W_{22K}^{(-)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2}\{(W_{22K}^{(-)}(p))'' - \frac{2}{p^2} W_{22K}^{(-)}(p)\}], \quad (37)$$

$$J_{22} = C_p^{(+)}[\bar{\alpha} W_{12K}^{(+)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2}(W_{12K}^{(+)}(p))''] + S_p^{(+)}[\bar{\alpha} W_{22K}^{(+)}(p) + \frac{\bar{\sigma}}{2}\{(W_{22K}^{(+)}(p))'' - \frac{2}{p^2} W_{22K}^{(+)}(p)\}], \quad (38)$$

$$C V_1^{(\pm)} = C_p^{(\pm)} S V_1, \quad S V_2^{(\pm)} = S_p^{(\pm)} S V_2.$$

### 3. МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ

Решение системы (4),(7),(8),(10) (задача III-Д) вычислялось по описанному в работе [4] алгоритму, реализующему применительно к данной задаче метод простых итераций [11].

Для численного решения системы (30)-(38) (задача Б-С) был разработан итерационный процесс, аналогичный представленному в работе [12] и являющийся комбинацией НАМН с методом последовательных приближений.

Согласно предлагаемому подходу для заданного начального приближения  $(U_{(2)}^{(0)}(p), M^0)$  вычисляются функции  $J_{12}^{(0)}$  и  $J_{22}^{(0)}$  по формулам

(37) и (38) соответственно. Тогда система (30) принимает вид задачи на собственные значения для системы дифференциальных уравнений второго порядка. Ее решение осуществляется согласно НАМН с использованием модифицированного пакета на основе программы SLIPS2 [13]. Полученное следующее приближение  $(U_{(2)}^1(p), M^1)$  вновь

используется для вычисления функций  $J_{12}^{(1)}$  и  $J_{22}^{(1)}$  и т.д. до самосогласования, т.е. до одновременного выполнения при некотором  $n$  следующих условий:

$$\begin{cases} \|U_{(2)}^n(p) - U_{(2)}^{n-1}(p)\| < \epsilon_1, \\ |M^n - M^{n-1}| < \epsilon_1, \end{cases} \quad \begin{cases} |J_{12}^{(n)} - J_{12}^{(n-1)}| < \epsilon_2, \\ |J_{22}^{(n)} - J_{22}^{(n-1)}| < \epsilon_2, \end{cases} \quad (39)$$

где  $\epsilon_1 > 0, \epsilon_2 > 0$  — заданные малые числа.

Количество "внутренних" итераций, необходимых для решения задачи на собственные значения (30), в большинстве случаев не превышает 20 при входных параметрах программы SLIPS2 TAU=0.05, LST=3, EPS=0.001.

Число "внешних" итераций существенно зависит от выбора начального приближения и колеблется от 20 до 50. Наиболее эффективной, как и в [12], является такая организация вычислительного процесса, при которой полученное для некоторых значений параметров решение используется как начальное приближение для решения задачи Б-С с другими параметрами (т.е. метод продолжения по параметру [14]). На первом шаге в качестве начального приближения использовалась функция  $U_{(2)}^0(p) = pe^{-p}, M^0 = 2$ . При этом начальное значение невязки имеет порядок  $10^2$ .

Вычислительная схема реализована на равномерной сетке по аргументу  $p$  с шагом  $h$  и имеет второй порядок сходимости, что подтверждается расчетами на последовательности вдвое сгущающихся сеток, представленными в таблице 1.

Таблица 1. Интервал [0,6],  
 $m_0 = 0.1, \bar{\alpha} = 0.1, \bar{\sigma} = 0.1$

шаг сетки	$M$	$U_1(0.6)$	$U_2(0.6)$
$h=0.100$	1.7691	7.8183	6.6219
$h/2=0.050$	1.7744	7.7721	6.6048
$h/4=0.025$	1.7757	7.7761	6.6005
$\Sigma = (h - h/2)/(h/2 - h/4)$	4.16	4.05	3.94

Вычисления проводились на ЭВМ VAX 8350 и PC/AT-486.

Необходимо отметить, что применение описанного алгоритма возможно лишь при  $\bar{\sigma} \neq 0$ . Кроме того, вычисления показали, что при  $\bar{\alpha} \gg 2\bar{\sigma}$  итерационный процесс не сходится.

#### 4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В таблицах 2а и 2б представлены результаты вычислений для различных значений параметров  $\bar{\alpha}, \bar{\sigma}$  и  $m_0$  при так называемом "свободном решении" уравнения Ш-Д

$$v(p) = \arctg \frac{p}{m_0}, \quad E(p) = \sqrt{m_0^2 + p^2} \quad (40)$$

соответствующем выбору  $f_1(p) \equiv f_2(p) \equiv 0$ .

Таблица 2а. Интервал [0,10],  
 $h = 0.1, m_0 = 0.01$

$\bar{\alpha}$	$\bar{\sigma}$	$F_\pi$	$M_\pi$	$M_{\pi'}$
0.0	0.005	0.005	0.48	0.92
0.0	0.01	0.005	0.68	1.12
0.0	0.10	0.005	2.05	3.21
0.0	0.50	0.005	4.62	6.96
0.0	1.00	0.005	6.71	10.35
0.1	0.10	0.006	1.83	2.75
0.2	0.10	0.006	1.51	2.43

Таблица 2б. Интервал [0,10],  
 $h = 0.1, \bar{\alpha} = 0.1, \bar{\sigma} = 0.1$

$m_0$	$F_\pi$	$M_\pi$	$M_{\pi'}$
0.01	0.006	1.31	2.58
0.10	0.06	1.83	2.75
0.50	0.27	2.02	3.61
1.00	0.34	2.71	3.35

Здесь и далее  $M_\pi$  и  $M_{\pi'}$  — собственные значения уравнения Б-С для безузловых и одноузловых решений, соответствующих в рассматриваемой модели основному и первому радиально возбужденному состояниям пиона.

При решении уравнения Ш-Д использовались все варианты выбора функций  $f_1$  и  $f_2$ , приведенные в п.1.

Следует отметить, что при использовании формул (11) интеграл  $I_{2L}$  расходится при  $p \rightarrow 0$ . При использовании

$$f_i = (V_i(p_0, q) - V_i(p, q))/V_i(p, q) \quad (i = 1, 2),$$

обеспечивающем сходимость в нуле, мы получаем логарифмическую расходимость интегралов  $I_{1K}$  и  $I_{2K}$  при  $p \rightarrow \infty$ .

Правильное асимптотическое поведение интегралов  $I_1$  и  $I_2$  удавалось обеспечить путем выбора  $f_1$  и  $f_2$  в виде  $p^\alpha \exp(-\beta p)$  или  $\gamma p^\alpha / (p^\alpha + 1)^\beta$ , если  $\alpha \geq 2, \beta \geq 2$ . Однако при этом их вклад по норме не превышал  $5 \cdot 10^{-2}$ , и решения задачи (4), (10) мало отличались от (40), а результаты решения уравнения Б-С практически совпадали с приведенными выше.

Поскольку условием одновременного описания  $M_\pi$  и  $F_\pi$  является выполнение соотношения

$$M_\pi/F_\pi = 137/132 \simeq 1.04, \quad (41)$$

соответствующего экспериментальным данным для основного состояния пиона [5], понятно, что значение  $F_\pi$  получается существенно ниже имеющихся оценок.

Некоторого улучшения результатов удалось добиться, выбирая  $f_1(p, q) = I_{1Y}/[I_{1K} + I_{1L}]$ ,  $f_2 \equiv 0$ , т.е. фактически исключая линейный потенциал из уравнения Ш-Д и заменяя кулоновский потенциал аппроксимирующим его потенциалом Юкавы:

$$V_Y(r) = \alpha \exp(-\mu r)/r, \quad \mu = 0.001,$$

$$I_{1Y}(p) = \frac{\bar{\alpha}}{p} \int_0^\infty dq q \ln \left| \frac{(p+q)^2 + \mu^2}{(p-q)^2 + \mu^2} \right|.$$

Однако и в этом случае соотношение (41) не было получено. Динамика изменения значений  $M_\pi$  и  $F_\pi$  для этого вида  $f_i$  представлена в таблицах 3а, 3б, 3в.

Таблица 3а. Интервал [0,8].

$$\bar{\alpha} = 0.3, m_0 = 0.1$$

$\bar{\sigma}$	$M_\pi$	$F_\pi$	$M_\pi/F_\pi$
0.30	2.06	0.87	2.4
0.25	1.96	0.89	2.2
0.20	1.87	0.99	1.9
0.15	1.81	0.91	2.0
0.13	1.79	0.85	2.1

Таблица 3б. Интервал [0,8].

$$\bar{\sigma} = 0.2, m_0 = 0.1$$

$\bar{\alpha}$	$M_\pi$	$F_\pi$	$M_\pi/F_\pi$
0.25	2.05	1.83	2.0
0.30	1.87	0.99	1.9
0.35	1.66	0.87	1.9
0.40	0.47	0.35	1.4

Таблица 3в. Интервал [0,8].

$$\bar{\sigma} = 0.2, \bar{\alpha} = 0.3$$

$m_0$	$M_\pi$	$F_\pi$	$M_\pi/F_\pi$
0.01	0.75	0.06	13.6
0.05	1.35	0.21	6.9
0.1	1.87	0.99	1.9
0.15	2.93	1.02	2.9

Добиться выполнения условия (41) удалось лишь путем специального выбора функций  $v(p)$  и  $E(p)$  без решения системы (4), (10). В качестве  $v(p)$  было использовано решение задачи Ш-Д с потенциалом Гаусса при  $f_1 \equiv 1, f_2 \equiv 0, m_0 = 0.1, R^2 = 5$  (здесь  $R$  — параметр потенциала Гаусса,  $V_G(r) = \exp(-r^2/R^2)$ ) [4], а в качестве функции энергии кварка была выбрана функция

$$E(p) = \sqrt{m_0^2 + p^2} - C e^{-p}, \quad C = 3.85, m_0 = 0.1.$$

Полученные результаты для основного и двух радиально возбужденных состояний пиона ( $\pi^0, \pi^+, \pi^-$ ) приведены в таблице 4.



Таблица 4. Интервал [0,6],  
 $h = 0.06, m_0 = 0.1$  или  $m_0 = 4M\text{эВ}$ ,  
 $\bar{\sigma} = 0.05, \bar{\alpha} = 0.1, \hat{\alpha} = 137/M_\pi = 380$

пион	$M$	$M(M\text{эВ})$	$F$	$F(M\text{эВ})$
$\pi$	0.362	137	0.345	132
$\pi'$	1.633	520	0.228	8
$\pi''$	2.581	1030	0.133	4

Отметим, что так же, как и в [4], вычисленные значения  $M_{\pi'}$  и  $M_{\pi''}$  оказались существенно ниже экспериментальных оценок, приведенных в [15].

Функции  $f_1$  и  $f_2$  в рассматриваемом случае могут быть найдены из уравнений (4),(10) с известными  $E(p)$  и  $v(p)$ , что является самостоятельной задачей, решение которой выходит за рамки настоящего исследования.

Не претендуя на физическую обоснованность, полученные численные результаты подтверждают принципиальную возможность одновременного описания массы  $M_\pi$  и константы распада  $F_\pi$  основного состояния пиона для случая потенциала (1),(2) при соответствующем выборе схемы "перенормировки".

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение мы хотим обратить внимание на следующие обстоятельства, которые необходимо учитывать в дальнейших исследованиях.

Известно, что в линейных спектральных задачах (таких как уравнение Шредингера или система Бете - Солпитера) при сдвиге потенциала взаимодействия на некоторую константу энергия системы (спектр) сдвигается на ту же самую величину.

Легко убедиться, что это свойство справедливо и для исходной нелинейной системы Ш-Д (4)-(6). Естественно было бы потребовать выполнения этого условия и для модифицированной системы (4),(10). При этом функции  $f_1$  и  $f_2$  должны удовлетворять дополнительному условию:

$$f_i(p, p) = 1, \quad i = 1, 2.$$

С другой стороны, любая модификация системы Ш-Д в некотором смысле эквивалентна введению нового потенциала  $\hat{V}$ , который в общем

случае является нелокальным. Для того чтобы этот новый потенциал  $\hat{V}$ , так же как и исходный потенциал  $V$ , был локальным, необходимо, чтобы функции  $f_1$  и  $f_2$  принадлежали классу функций  $F(|\vec{p} - \vec{q}|)$ .

Поскольку указанные требования ограничивают возможности выбора функций  $f_1$  и  $f_2$ , для некоторых потенциалов (в частности, для (1), (2)) уже не удастся найти модификацию, обеспечивающую сходимость интегралов (5),(6) и выполнение асимптотических условий (9).

Поэтому с нашей точки зрения более удобно было бы устранять сингулярности исходного потенциала на уровне координатного представления (например, путем аппроксимации элементарными функциями с "хорошими" свойствами).

И, наконец, поскольку вопрос выбора потенциала межкваркового взаимодействия и способа "перенормировки" системы Ш-Д в настоящее время не решен, весьма актуальной представляется проблема постановки обратной задачи, учитывающей в рамках рассматриваемого подхода все имеющиеся экспериментальные данные, а также все ограничения, накладываемые на асимптотику и свойства решений.

Один из вариантов такой постановки может быть следующим. Из физических соображений задается явный вид функций  $I_1$  и  $I_2$  с нужными асимптотическими свойствами с точностью до произвольных констант, которые затем определяются фитированием имеющихся экспериментальных данных.

Авторы благодарны профессору Е.П.Жидкову за внимание к работе и ценные замечания, а также профессору В.Н.Первушину за полезные обсуждения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 94-01-01119).

## ПРИЛОЖЕНИЕ

Другой вариант представления интегралов (26) и (27):

$$W_{1K}^{(+)} = \tilde{W}_{11K}^{(+)} + \tilde{W}_{12K}^{(+)}, \quad W_{2K}^{(+)} = \tilde{W}_{21K}^{(+)} + \tilde{W}_{22K}^{(+)},$$

где

$$\tilde{W}_{11K}^{(+)} = C_p^{(+)} S \tilde{V}_1(p) U_{(1)}^{(+)}(p),$$

$$\tilde{W}_{12K}^{(+)} = \int_0^\infty dq |n| \frac{p+q}{p-q} [C_q^{(+)} U_{(1)}^{(+)}(q) - \frac{q}{p} C_p^{(+)} U_{(1)}^{(+)}(p)],$$

$$\tilde{W}_{21K}^{(+)} = S_p^{(+)} \tilde{S}V_2(p) U_{(1)}^{(+)}(p),$$

$$\tilde{W}_{22K}^{(+)} = \int_0^\infty dq \left[ -1 + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right] \left[ S_q^{(+)} U_{(1)}^{(+)}(q) - \frac{q}{p} S_p^{(+)} U_{(1)}^{(+)}(p) \right],$$

$$\tilde{S}V_1(p) = \frac{1}{p} \int_0^\infty dq q \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right|, \quad \tilde{S}V_2(p) = \frac{1}{p} \int_0^\infty dq q \left[ -1 + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \ln \left| \frac{p+q}{p-q} \right| \right].$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Le Yaouanc, L. Oliver, P. Pene and J. C. Raynal. Spontaneous breaking of chiral symmetry for confining potentials. // Phys. Rev. D29, p.1233, 1984; Quark model of light mesons with dynamically broken chiral symmetry. // Phys. Rev. D31, p.137, 1985; Ю.Л.Калиновский, В.Каллис, Б.Н.Куранов, В.Н.Первушин, Н.А.Сариков. Билокальные мезонные лагранжианы и потенциальная модель. // ЯФ, Т.49, с.1709-1717, 1989; Yu. L. Kalinovsky, W. Kallies, L. Kaschluhn, L. Münchow, V. N. Pervushin and N. A. Sarikov. Mesons in the Low - Energy Limit of QCD. // Fortschr. Phys. 38, p.333, 1990; Relativistic Bound States in QCD. // Few Body Systems, 10, p.87, 1991.
2. S. L. Adler and A. C. Davis. Chiral symmetry breaking in coulomb gauge QCD. // Nucl. Phys. B244, p.469, 1984; A. Kocic. Chiral - symmetry restoration at finite densities in coulomb - gauge QCD. // Phys. Rev. D33, p.1785, 1986; R. Alkofer and P. A. Amundsen. Chiral symmetry breaking in an instantaneous approximation to coulomb gauge QCD. // Nucl. Phys. B306, p.305, 1988; D. W. McKay, H. J. Munczek and Bing-Lin Young. From QCD to the low-energy effective action through composite fields: Goldstone's theorem and  $f_\pi$ . // Phys. Rev. D37, p.195, 1988.
3. И.В.Амирханов, Т.З.Насиров, Н.А.Сариков. Численное решение краевой задачи для уравнения Бете-Солпитера с квадратично растущим потенциалом. // Сообщение ОИЯИ Р11-93-173, Дубна, 1993.
4. И.В. Амирханов, Е.В. Земляная, В.Н. Первушин, И.В. Пузынин, Т.П. Пузынина, Н.А. Сариков, Т.А. Стриж. Численное исследование уравнений Швингера - Дайсона и Бете - Солпитера с потенциалом Гаусса в рамках модели кваркония. // Математическое Моделирование, Т.6, No.7, с.55, 1994.
5. Chikade Habe (Yoshida), Kenzô Iwata, Masanobu Hirano, Toshiyuki Murota and Denju Tsuruda. Systematization of  $q - \bar{q}$  Mesons by the Bethe - Salpeter Equations. // Prog. Th. Phys. 77,4, p.917, 1987.
6. Е.П.Жидков, Г.И.Макарепко, И.В.Пузынин. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. // ЭЧАЯ, 4, 1, с.127, 1973; Т.Жанлаб, И.В.Пузынин. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона. // ЖВМиМФ, 32, 6, с.846-856, 1992.
7. И.В.Амирханов, О.М.Жураев, В.Каллис, В.Н.Первушин, И.В.Пузынин, Н.А.Сариков, Т.А.Стриж. Кварконий в КХД с растущим потенциалом. // Сообщение ОИЯИ Р11-88-506, Дубна, 1988; I. V. Amirkhanov, O. M. Juraev, V. N. Pervushin, I. V. Puzynin, N. A. Sarikov. Instantaneous approximation for QCD and the properties of mesons ( $\pi, \pi', K, K'$ ). // Preprint JINR E2-90-414, Dubna, 1990.
8. I. V. Amirkhanov, O. M. Juraev, V. N. Pervushin, I. V. Puzynin, N. A. Sarikov. Newtonian iterative scheme for solving Schwinger - Dyson equation for a quark. // Preprint JINR E11-91-108, Dubna, 1991; И.В. Амирханов, О.М. Жураев, В.Н. Первушин, И.В. Пузынин, Н.А. Сариков. Численный метод решения краевой задачи для системы интегро - дифференциальных уравнений (уравнение Бете-Солпитера). // Сообщение ОИЯИ Р11-91-111, Дубна, 1991.
9. A. Trzupek. Chiral symmetry breaking in the pairing model of QCD with the coulomb potential. // Acta Physica Polonica, vol. B20, N2, p.93, 1989.
10. Г.Бете, Е.Е.Солпитер. Квантовая механика с одним и двумя электронами. // Физматгиз, М., 1960.
11. Л.Коллатц. Функциональный анализ и вычислительная математика. // Наука, М., 1960.

12. *И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, Т.П.Пузынина.* Итерационный метод решения уравнения полярона в сферически симметричном случае. // Сообщение ОИЯИ P11-91-139, Дубна, 1991; *I.V.Amirkhanov, I.V.Puzynin, T.P.Puzynina, E.V.Zemlyanaya.* Iterative method for solving the spherically non-symmetrical polaron equation (the Luttinger - Lu model). // In "Polaron and Applications", Ed. V.D.Lakhno, John Willey & Sons Ltd., p. 445, 1994.
13. *Т.П.Пузынина.* SLIPS2 — программа численного решения задачи Штурма - Лиувилля для системы дифференциальных уравнений. // Сообщение ОИЯИ P11-89-728, Дубна, 1989.
14. *Дж.Ортега, Б.Рейнболдт.* Итерационные методы решения нелинейных систем со многими неизвестными. // Мир, М., 1975.
15. *S.Golfrey, N.Isgur.* Mesons in relativised quark model with chromodynamics. // Phys. Rev. D, V.32, No.1, 1985.

**Рукопись поступила в издательский отдел  
13 января 1995 года.**

О некоторых проблемах численного исследования модели кваркония с кулоновским и линейным потенциалами

Для кварковой потенциальной модели КХД с использованием уравнений Швингера — Дайсона и Бете — Солпитера формулируется математическая постановка граничных задач в случае комбинации кулоновского и линейно растущего потенциалов. Рассматривается математическая постановка задачи о перенормировке систем уравнений Швингера — Дайсона, устраняющей расходимость интегралов: Представлен итерационный процесс на основе непрерывного аналога метода Ньютона для решения уравнения Бете — Солпитера в рамках рассматриваемого подхода. Обсуждаются условия совместного описания массы и константы лептонного распада пиона.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1995

Перевод авторов

On Some Problems of Numerical Investigation of the Quarkonium Model with the Coulomb and Linear Potentials

The mathematical statement of boundary problems is formulated for the quark potential QCD model on the basis of Schwinger — Dyson and Bethe — Salpeter equations in the case of the combination of coulomb and linear potentials. Mathematical statement of problem for renormalization of the Schwinger — Dyson system is considered. Iterative method on the base of continuous analogue of the Newton method is presented for numerical solution of the Bethe — Salpeter equation in the framework of considered approach. Conditions of description of the mass and the leptonic decay constant of pion are discussed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1995