

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-530

P11-95-530

О.В.Зейналова, Ш.С.Зейналов

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДОВ  
ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ  
ПРИ СПЕКТРОМЕТРИИ ХОЛОДНЫХ НЕЙТРОНОВ  
ПО ВРЕМЕНИ ПРОЛЕТА

Направлено в журнал «Nuclear Instruments and Methods A»

1995

## Введение

Предметом исследования при спектрометрии холодных нейтронов по времени пролета, как правило, является поперечное сечение взаимодействия нейтронов пучка с образцом в зависимости от энергии нейтронов. На практике, однако, удобнее измерять зависимость сечения рассеяния нейтронов от времени пролета фиксированного расстояния - пролетной базы /2,3/. Типичная схема эксперимента приведена на рис. 1.

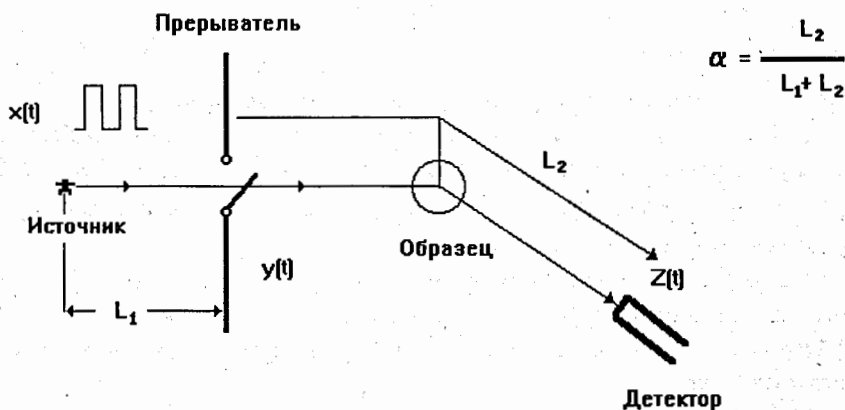


Рис. 1. Схема эксперимента

Длина пролетной базы есть сумма расстояний от прерывателя нейтронов до исследуемого образца ( $L_1$ ) и от образца до детектора ( $L_2$ ). Устройство, называемое прерывателем, является входным элементом системы и служит для модуляции нейтронного пучка по интенсивности. Это устройство состоит из двух имеющих общую ось дисков, разделенных на сектора с периодически изменяющейся степенью прозрачности для нейтронов. Один из дисков - статор, зафиксирован на общей оси, а второй - ротор, может вращаться вокруг этой оси с регулируемой частотой. Часть нейтронов из модулированного пучка, зависящая от физических свойств образца и геометрических характеристик системы, после рассеяния регистрируется детектором.

Сигналы детектора поступают на электронную аппаратуру и используются для формирования функции интенсивности рассеянного пучка от времени  $Z(t)$ .

Предполагаем, что степень прозрачности прерывателя не зависит от скорости нейтронов, отсутствуют геометрические искажения в системе и плотность распределения нейтронов по времени пролета  $S(t)$  равна нулю вне интервала  $(0, T)$ . На практике эти предположения всегда выполняются. Тогда получим следующее уравнение, связывающее исследуемую функцию  $S(t)$  и измеряемую  $Z(t)$ :

$$Z(t) = \int_0^T S(\tau) X(t-\tau) d\tau. \quad (1)$$

Здесь использованы следующие обозначения:

$S(\tau)$  - функция плотности распределения нейтронов по времени пролета на пролетной базе длиной  $L = L_1 + L_2$ , т. е.  $S(\tau) d\tau$  равно числу нейтронов, имеющих время пролета данной базы  $\tau$  единиц;

$X(t)$  - модулирующая функция, т. е.  $X(t-\tau)$  - значение коэффициента прозрачности прерывателя для нейтронов, пересекающих прерыватель в интервале времени около  $t-\tau$ ;

$Z(t)$  - скорость счета нейтронов детектором в интервале времени  $(t, t+dt)$ ;

$t, \tau$  - соответственно текущее время и время пролета.

Ядро уравнения (1) - функция  $X(t-\tau)$  зависит от способа модуляции нейтронного пучка или типа прерывателя, используемого в эксперименте. Классический способ модуляции интенсивности нейтронного пучка, используемый в экспериментах, реализуется так называемым прерывателем Ферми. В результате из стационарного нейтронного пучка формируются периодически повторяющиеся узкие импульсы с высокой скважностью. Измеряемая функция при этом практически совпадает с искомой функцией в силу близости ядра уравнения к дельта-функции Дирака. Аппаратурная реализация спектрометра в этом случае традиционна и не имеет каких-либо особенностей по сравнению с

многоканальными анализаторами, обычно используемыми в ядерно-физических экспериментах. Существенным недостатком этого метода, однако, является крайне низкая эффективность использования нейтронов источника. Вследствие этого на практике предпочтение отдается значительно более экономичному с точки зрения использования нейтронов источника корреляционному методу с модуляцией пучка так называемым прерывателем Фурье [1].

В корреляционном методе для определения функции плотности распределения нейтронов по времени пролета  $S(t)$  вычисляется взаимная корреляционная функция

$$W(\tau) = \int_{\Delta} Z(t) Y(t-\tau) dt, \quad (2)$$

где  $\Delta$  - интервал измерения, а  $Y(t-\tau)$  - бинарная функция, жестко привязанная по фазе и частоте к реальной функции прерывателя. Одновременно проводится интегрирование по всем интервалам  $[0, T]$ :

$$\tilde{S}(\tau) = \int_0^T W(\tau, \omega_0) d\omega_0 = \int_0^T S(t) R(t-\tau) dt. \quad (3)$$

В настоящее время техническая реализация процедуры вычисления по формулам (1-3) в реальном масштабе времени связана с применением дорогостоящих устройств на заказных интегральных схемах, называемых коррелометрами полярности. В данной работе приводится альтернативный алгоритм вычисления, а также метод реализации аппаратуры коррелометров на базе серийно производимых промышленностью процессоров для цифровой обработки сигналов.

#### Процедура Фурье-синтеза функции разрешения

Будем называть циклом измерения промежуток времени  $[0, G]$ , в течение которого частота вращения ротора прерывателя  $n$  равномерно возрастает от нулевого значения до максимального  $\Omega$ . Весь цикл измерения делится на  $J$  интервалов длиной  $T$ , как показано на рис. 2.

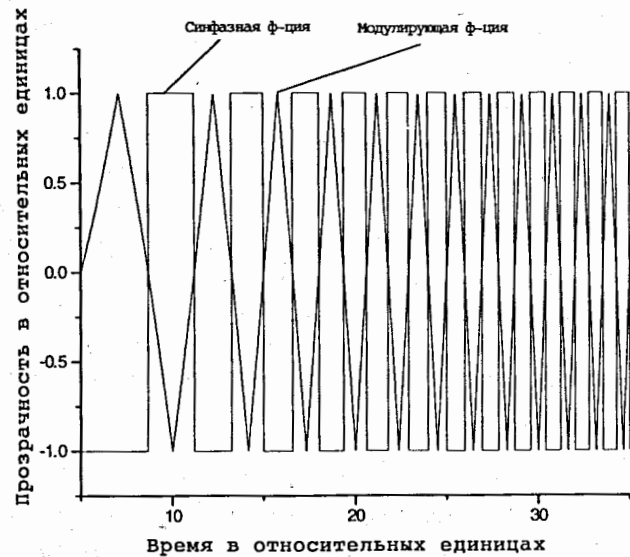


Рис. 2. Модулирующая и синфазная с ней ф-ции

На каждом интервале  $(t_j, t_{j+1})$  частота вращения ротора прерывателя  $\nu$  меняется незначительно и среднее ее значение равно некоторому

$$\nu_0^j = \frac{1}{T} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \nu(t) dt.$$

Функции  $X(t)$ ,  $Y(t)$  на каждом интервале разбиения  $[t_j, t_{j+1}]$ , близки к периодическим с периодом  $\nu_0^j$ .

Вместо функций  $X(t)$ ,  $Y(t)$  будем рассматривать функции, совпадающие с  $X(t)$ ,  $Y(t)$  на отрезке  $[t_j, t_{j+1}]$  и продолженные на  $\mathbb{R}$  по периодичности:

$$X^j(t) = X(t), \quad t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$Y^j(t) = Y(t), \quad t \in [t_j, t_{j+1}].$$

Функции  $X^j(t)$ ,  $Y^j(t)$  разлагаются в ряды Фурье:

$$X^j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{X}^j(k) \exp\left(\frac{ikt}{T}\right),$$

$$Y^j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{Y}^j(k) \exp\left(\frac{ikt}{T}\right).$$

Функции  $Z^j(t)$ ,  $W^j(t)$  можно представить в виде:

$$Z^j(t) = \int_0^T S(\tau) X^j(t-\tau) d\tau,$$

$$W^j(\tau) = \int_{t_j}^{t_{j+1}} Z^j(t) Y^j(t-\tau) dt.$$

$Z^j(t)$ ,  $W^j(\tau)$  также периодичны с периодом  $T$ . Так как для каждой гармоники функций  $Z^j(t)$ ,  $W^j(\tau)$  справедлива формула свертки, то

$$\hat{Z}^j(k) = \hat{S}(k) \hat{X}^j(k),$$

$$\hat{W}^j(k) = \hat{Z}^j(k) \hat{Y}^{j*}(k) = \hat{S}(k) \hat{X}^j(k) \hat{Y}^{j*}(k). \quad (4)$$

Заметим, что формула (4) не позволяет непосредственно вычислить все коэффициенты  $\hat{S}(k)$ . Действительно, коэффициенты рядов Фурье периодических треугольной и прямоугольной функций отличны от нуля лишь при некоторых значениях  $k: rk_0, r=0, 1, \dots$ . Так как функции  $X^j(t)$ ,  $Y^j(t)$  близки к периодическим треугольной и прямоугольной, то их коэффициенты отличны от нуля лишь при  $k$ , близких  $rk_0$ , и лишь для этих  $k$  мы можем с помощью формулы (4) вычислить коэффициенты  $\hat{S}(k)$ . Имея набор функций  $\hat{W}^j(k)$  для разных интервалов  $[t_j, t_{j+1}]$ , после суммирования по всем интервалам  $[t_j, t_{j+1}]$  в пределах цикла  $[0, \Gamma]$  получим

$$\sum_{j=0}^{J-1} \hat{W}^j(k) = \hat{S}(k) \sum_{j=0}^{J-1} \hat{X}^j(k) \hat{Y}^{j*}(k) = G \hat{S}(k). \quad (5)$$

Можно показать, что величина

$$G = \sum_{j=0}^{J-1} \hat{X}^j(k) \hat{Y}^{j*}(k)$$

вещественна и имеет смысл функции плотности распределения значений частоты в цикле измерения. Перейдя в (5) от фурье-образов к оригиналам, получим

$$\tilde{S}(t) = \int_0^T S(\tau) \hat{Q}(t-\tau) d\tau. \quad (6)$$

Таким образом, выражения (2-6) определяют процедуру, называемую фурье-синтезом функции разрешения  $\hat{Q}(t-\tau)$  спектрометра.

При практической реализации процедуры фурье-синтеза по формулам (2-6) основная трудность связана с большим объемом вычислений, которые должны проводиться в реальном масштабе времени. В экспериментах требуются вычисления с массивами большой размерности (>4000) при значении частоты дискретизации около 500 кГц.

#### Анализ процедуры дискретизации

Особенности применяемой аппаратуры таковы, что вместо значений функции  $Z(t)$  в точках  $t_j+k\Delta$ ,  $\Delta=T/N$ ,

$k=0,1, \dots, N-1$ , мы измеряем функцию

$$Z_1(t_j+k\Delta) = \int_{t_j+k\Delta}^{t_j+(k+1)\Delta} Z^j(t) dt. \quad (7)$$

Будем рассматривать непрерывную функцию  $Z_1(t)$ , совпадающую с дискретными значениями функции  $Z$  в точках  $t_j+k\Delta$ ,  $k=0,1, \dots, N-1$ :

$$Z_1(\tau_0) = \int_{\tau_0}^{\tau_0+\Delta} Z(t) dt.$$

Введем прямоугольную функцию  $\Pi_\Delta(t)$ , которая равна 1 внутри интервала  $\left[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}\right]$  и 0 в остальных точках.

Справедливо равенство

$$Z_1(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} Z(t) \Pi(t-\tau-\frac{\Delta}{2}) dt. \quad (8)$$

Применив преобразование фурье к обеим частям (8), получим

$$\hat{Z}_1(v) = \hat{Z}(v) \Delta \frac{\sin(\pi v \Delta)}{\pi v \Delta} \text{Exp}(-i\pi v \Delta). \quad (9)$$

Поэтому, перемножая полученные в результате измерений значения  $Y(t_j+k\Delta)$  и  $Z_1(t_j+k\Delta)$ , мы вычисляем фурье-образ некоторой функции

$$W_1(t) = \int_{t_1}^{t_2} Z_1(\tau) Y(t-\tau) d\tau,$$

отличной от искомой нами  $W(t)$ . В силу формул (7-9) функции  $W(t)$  и  $W_1(t)$  связаны соотношением

$$\hat{W}_1(k) = \hat{W}(k) \frac{\sin(\pi v \Delta)}{\pi v \Delta} \Delta \text{Exp}(-i\pi v \Delta). \quad (10)$$

Следовательно, зная фурье-образ функции  $\hat{W}_1(k)$ , мы можем восстановить фурье-образ функции  $\hat{W}(k)$ . Для периодической функции  $X(t)$  с периодом  $T$ , заданной в точках дискретизации  $t_j+k\Delta$ ,  $k=0,1, \dots, N-1$ ,  $\Delta=T/N$ ,

$$X(k\Delta) = \sum_{n=0}^N \hat{X}(n) \text{Exp}\left(\frac{2\pi i n k}{T}\right),$$

$$\hat{X}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N X(k\Delta) \text{Exp}\left(-\frac{2\pi i n k}{T}\right).$$

Перейдем от функций  $X^j(t), Y^j(t), Z^j(t)$  к их периодическим продолжениям за  $[t_j, t_{j+1}]$ . Функция  $Z_1(t)$  имеет тот же период. Тогда

$$W_1(k\Delta) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{W}_1(n) \text{Exp}\left(\frac{2\pi i k n}{T}\right).$$

Так как

$$\hat{W}_1 = \hat{Z}_1^j \hat{Y}^{j*},$$

то

$$\hat{W}_1(k\Delta) = \sum_{n=0}^{N-1} \hat{Z}_1^j(n) \hat{Y}^{j*}(n) \text{Exp}\left(\frac{2\pi i k n}{T}\right).$$

Функция  $X^j(t)$  является треугольной периодической функцией с амплитудами гармоник, убывающими, как  $1/n^2$ , где  $n$  - номер гармоники. У прямоугольной периодической функции  $Y(t)$  амплитуда гармоник убывает пропорционально  $1/n$ . Учитывая соотношения (9-10) и ограниченный характер функции  $S(t)$ , получаем, что для функции  $Z_1(t)$  скорость убывания амплитуд гармоник к 0 не медленнее  $1/n^2$ . Тогда для функции  $W_1(t)$  скорость убывания амплитуд гармоник к 0 не медленнее  $1/n^4$ . Так как функции  $X^j(t), Y^j(t)$  не содержат четных гармоник, то  $W_1(t)$  также содержит только нечетные гармоники. Следовательно, вклад любой гармоники с  $n > 1$  не превышает  $O(1/n^4)$ , и мы будем пренебрегать

гармониками с номерами, большими 1. Имеет место

$$W_1(k\Delta) = \hat{Z}_1(0)\hat{Y}^*(0) + \hat{Z}_1(1)\hat{Y}^*(1) + O(1/N^3).$$

Так как изменение скорости вращения ротора на интервале  $[t_j, t_{j+1}]$  мало, то функция  $X^j(t)$  близка к периодической треугольной функции, ее спектр отличен от нуля лишь в малых окрестностях точек  $kv_0^j$ ,  $k=0,1, \dots$ . Для близкой к прямоугольной функции  $Y^j(t)$  спектр равен 0 везде, кроме малых окрестностей точек  $kv_0^j$ ,  $k=0,1, \dots$ . Следовательно, функция  $W_1^j(t)$  также имеет спектр, отличный от нуля лишь в малых окрестностях точек  $kv_0^j$ ,  $k=0,1, \dots$ . Пренебрегая гармониками, для которых  $k > 1$ , считаем, что спектр имеет вид, как на рис. 3.

Согласно теореме Шеннона для однозначного восстановления функции  $X(t)$  с периодом  $T$  по ее дискретным значениям  $X(k\Delta)$ ,  $\Delta=T/N$ , достаточно выполнения условия

$$F_\varepsilon > 2\nu_{\max},$$

где  $F_\varepsilon=N/T$  - частота точек разбиения интервала  $[0, T]$ ,

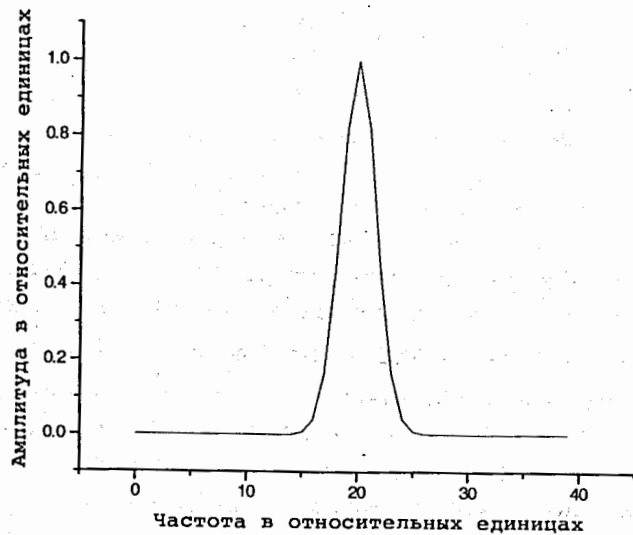


Рис. 3. Распределение амплитуд гармоник

$\nu_{\max}$  - максимальное значение частоты  $\hat{X}(\nu)$ . Следовательно, для однозначного восстановления функции  $W_1(t)$  по ее дискретным значениям нужно, чтобы число точек разбиения интервала  $N$  отвечало условию  $N > 2\nu_2 T$ .

При малых значениях  $\nu_0$  данное условие выполняется при относительно небольших значениях  $N$ . Однако при больших значениях  $\nu_0$  (частоты вращения) требуются большие вычислительные мощности и время для вычисления  $W_1$  в достаточно большом числе точек  $N$ , необходимом для однозначного ее восстановления. В этом случае для уменьшения частоты разбиения интервала  $[t_j, t_{j+1}]$  применим следующий процесс/4,5/. Рассмотрим функции

$$\tilde{Z}_1(t_j + k\Delta) = Z_1(t_j + k\Delta) \cos(\nu_1 k\Delta),$$

$$\tilde{Y}_1(t_j + k\Delta) = Y_1(t_j + k\Delta) \cos(\nu_1 k\Delta).$$

Произведем фильтрацию этих функций посредством фильтра  $\Pi(\delta)$ :

$$Z_2(l\delta) = \sum_{k\Delta=l\delta}^{(l+1)\delta} \tilde{Z}_1(k\Delta),$$

$$Y_2(l\delta) = \sum_{k\Delta=l\delta}^{(l+1)\delta} \tilde{Y}_1(k\Delta).$$

Тогда для фурье-образов имеют место соотношения

$$\tilde{Z}_2(\nu) = \tilde{Z}_1(\nu) \frac{\sin(\pi\nu\delta)}{\pi\nu\delta} e^{-i\pi\delta},$$

$$\hat{Y}_2(\nu) = \hat{Y}_1(\nu) \frac{\sin(\pi\nu\delta)}{\pi\nu\delta} e^{-i\pi\delta}.$$

Так как

$$\tilde{Z}_1(\nu) = \hat{Z}_1(\nu - \nu_1) + \hat{Z}_1(\nu + \nu_1),$$

$$\tilde{Y}_1(\nu) = \hat{Y}_1(\nu - \nu_1) + \hat{Y}_1(\nu + \nu_1),$$

то

$$\tilde{Z}_2(\nu) = \hat{Z}_1(\nu - \nu_1) \frac{\sin(\pi\nu\delta)}{\pi\nu\delta} e^{-i\pi\delta} + \hat{Z}_1(\nu + \nu_1) \frac{\sin(\pi\nu\delta)}{\pi\nu\delta} e^{-i\pi\delta}, \quad (11)$$

$$\hat{Y}_2(\nu) = \hat{Y}_1(\nu - \nu_1) \frac{\sin(\pi\nu\delta)}{\pi\nu\delta} e^{-i\pi\delta} + \hat{Y}_1(\nu + \nu_1) \frac{\sin(\pi\nu\delta)}{\pi\nu\delta} e^{-i\pi\delta}. \quad (12)$$

В формулах (11-12) первые слагаемые отличны от нуля

вблизи нуля, а вторые - в окрестности точки  $2\nu_0$  и, следовательно, подавляются множителем

$$\frac{\sin(\pi\nu\Delta)}{\pi\nu\Delta},$$

и ими можно пренебречь. Таким образом, для функции  $\tilde{W}_1$  получаем спектр, расположенный вблизи нуля, и, следовательно, для однозначного восстановления функции требуется меньшая частота разбиения.

#### Анализ статистических флуктуаций

Функция  $S(t)$  по определению является стационарной статистической функцией, подчиненной статистике Пуассона. Следовательно, и функция

$$\tilde{S}(t) = \int_0^T S(\tau)R(t-\tau)d\tau$$

является пуассоновской случайной функцией. Для стационарной случайной функции усреднение по ансамблю эквивалентно усреднению по времени. Тогда

$$\langle S(\tau) \rangle_k = \int_0^T S(\tau)dt = M, \quad (13)$$

где  $M$  - полное число нейтронов прошедших через систему за время измерения. Среднеквадратичное отклонение для функции  $S(t)$  есть

$$\sigma^2 = \langle S(t) - \bar{S}(t) \rangle_k^2. \quad (14)$$

Раскрыв формулу (13) и подставив в нее значение (12), получим

$$\sigma^2 = \langle S(t) - \bar{S}(t) \rangle_k^2 = \langle S^2(t) \rangle_i - \langle S(t) \rangle_i^2 = \langle S^2(t) \rangle_i - M^2.$$

Для выражения  $\langle S^2(t) \rangle_i$  согласно теореме Парсеваля имеем

$$\int_0^T \hat{S}(\omega)\hat{S}^*(\omega)d\omega,$$

что согласно теореме Винера-Хинчина равно  $C(0)$ , где  $C(t)$  корреляционная функция случайного пуассоновского процесса

$$C(\tau) = \int P(s)S(t)S(t+\tau)df.$$

Тогда

$$C(0) = \int P(S)S^2(\tau)df.$$

Для распределения Пуассона получаем

$$C(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(M)^n}{n!} e^{-M} = M^2 + M,$$

откуда для среднеквадратичного отклонения имеем

$$\sigma^2 = M^2 + M - M^2 = M.$$

#### Литература

1. P.Hiismaki, in Proc. Symp. on Neutron inelastic scattering, Grenoble, 1972 (IAEA, Viena, 1972) p.803.
2. J.F. Colwel, P.H. Miller and W.L. Whittermore, in Proc. Symp. on Neutron inelastic scattering, Copenhagen, 1968, vol.2 (IAEA, Viena, 1968) p. 429
3. A. Virjo, Nucl. Instr. and Meth. vol.73 (1969) p.189.
4. Дж. Бендат, А. Пирсол. Прикладной анализ случайных данных. М.: Мир. 1989. с.394.
5. Ж. Макс. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир. 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 декабря 1995 года.