



ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

95-455

P11-95-455

А.Д.Егоров¹, Е.П.Жидков, В.А.Петров¹

ПРИБЛИЖЁННЫЕ ФОРМУЛЫ
ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ИНТЕГРАЛОВ,
УЧИТЫВАЮЩИЕ ВКЛАД
ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ ЗАДАННОГО ТИПА²

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

¹Институт математики АН Белоруссии, Минск

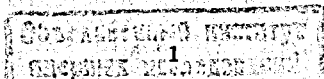
²Работа выполнена при поддержке Российского фонда
фундаментальных исследований (код проекта 95-01-01467)

1995

Введение

В настоящее время наиболее разработанным и известным подходом к приближенному вычислению функциональных интегралов является подход, основанный на построении формул, точных на специальных классах функционалов, чаще всего — формул, точных для функциональных многочленов. Формулы такого типа получены для интегралов по мерам, охватывающим многие известные в приложениях меры, соответствующие случайным процессам, в частности, процессам с независимыми приращениями и др. [1-3]. Эти же формулы использовались в [3,4] для численного исследования некоторых физических задач. Одной из серьезных технических проблем указанного подхода является быстрый рост объема вычислений при увеличении степени точности формул. Поэтому важно рассмотреть его модификации, которые позволили бы упростить формулы при той же точности вычислений и расширить класс интегрируемых приближенно функционалов. Эффективным и, в определенном смысле, естественным для функциональных интегралов средством решения этой задачи оказалось привлечение элементов диаграммного метода Фейнмана к процессу построения приближенных формул, а именно учет при их построении вклада диаграмм заданного вида, определяемого условием задачи. В работах [1,5-8] этот модифицированный подход был разработан для интегралов по гауссовым мерам и некоторым квазимерам.

В настоящей работе исследуются другие классы задач, в которых целесообразно использовать подход, учитывающий вклады диаграмм, получены соответствующие приближенные формулы, в том числе для интегралов по гауссовой и пуассоновской мерам.



В общем случае мы будем использовать обозначение

$$\int_X f(x) d\mu(x)$$

для функционального интеграла по мере μ от функционала $f(x)$, заданного на линейном пространстве X . В конкретных случаях мера будет указываться, а вид пространства X в дальнейших рассмотрениях не существенен; как правило, это будет пространство функций. Все рассматриваемые меры задаются своим характеристическим функционалом

$$\chi(\xi) = \int_X \exp\{i \langle \xi, x \rangle\} d\mu(x),$$

где $\langle \xi, \cdot \rangle$ — линейный непрерывный функционал ξ на X . Используются диаграммы, возникающие при вычислении моментов либо интегралов от более общих выражений вида $\prod_{j=1}^k \langle \xi_j, x \rangle^{\alpha_j}$, в частности, от функционалов $\prod_{j=1}^k x^{\alpha_j}(t_j)$, когда X — пространство функций. Значение интеграла от такого функционала представляется в виде суммы, каждому из слагаемых которой может быть сопоставлена диаграмма. Полученные диаграммы легко классифицируются по различным признакам, что позволяет рассмотреть вопрос о степени их вклада в значение интеграла и частично просуммировать. Каждому значению индекса j ставится в соответствие вершина диаграммы, а целому показателю α_j — линии (α_j штук), исходящие из этой вершины; соединение линий, выходящих из вершин в диаграмму, определяется видом меры. В частности, для гауссовых мер линии соединяются попарно, а для квазимер, рассмотренных в [7,8] — пучками по $2r$ штук, если квазимера определяется характеристической функцией с однородной формой $2r$ -го порядка в показателе экспоненты. В других случаях порядок соединения линий более сложный. В данной работе сами диаграммы не изображены, а выписываются только соответствующие им аналитические выражения.

Типичная ситуация, когда используются приближенные формулы, учитывающие вклад диаграмм определенного вида, возникает при вычислении интегралов от функционалов вида $f(x) = F(x + \lambda V(x))$, где $V(x)$ — функционал специального вида и λ — малый параметр. Примеры такого рода формул приведены в [1,7,8].

Мы вначале рассмотрим два случая, которые показывают, что метод может быть применен в других обстоятельствах и приведем соответствующие формулы. В 3-м параграфе будут построены аппроксимации общего вида для интегралов по пуассоновской мере.

1. Интегралы по мерам, содержащим малый параметр

Пусть характеристический функционал меры μ имеет вид

$$\chi(\xi) = \int_X \exp\{i \langle \xi, x \rangle\} d\mu(x) = \exp\{-K(\xi, \xi)/2 + \lambda V(\xi)\},$$

где

$$V(\xi) = \sum_{m=1}^{\infty} (i^m/m!) K_m(\xi);$$

$$K_m(\xi) = K_m(\xi, \dots, \xi),$$

$K_m(\xi, \dots, \xi)$ — m -линейная форма на $X' \times \dots \times X'$; λ — малый параметр; $K(\xi, \xi)$ — билинейный функционал, обладающий свойствами корреляционного функционала гауссовой меры, которую мы обозначим через μ_0 .

Имеем с точностью до первого порядка по λ

$$\begin{aligned} \int_X \prod_{j=1}^n \langle \xi_j, x \rangle d\mu(x) &= i^{-n} \frac{\partial^n}{\partial \lambda_1 \partial \lambda_2 \dots \partial \lambda_n} \Big|_{\lambda_j=0, (j=1, n)} \chi \left(\sum_{j=1}^n \lambda_j \xi_j \right) \cong \\ &\cong \sum_{m=0}^n \sum_{j_1 \neq \dots \neq j_m=1}^n \lambda^{r(m)} (m!(n-m)!)^{-1} M_m(\xi_{j_1}, \dots, \xi_{j_m}) K_{n-m}(\xi_{j_{m+1}}, \dots, \xi_{j_n}) = \\ &= \sum_{m=0}^n \lambda^{r(m)} \Sigma^* M_m(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_m}) K_{n-m}(\xi_{i_{m+1}}, \dots, \xi_{i_n}), \end{aligned}$$

где $M_m(\cdot, \dots, \cdot)$ — моментная функция гауссовой меры μ_0 (заметим, что для нечетных m имеет место равенство $M_m = 0$), $r(m) = 1$ для $m \neq n$ и равно нулю при $m = n$, $K_0 = 1$ по определению, Σ^* — суммирование по непересекающимся разбиениям множества $\{1, 2, \dots, n\}$ на два подмножества.

Пусть $I_n(f(\theta_n(\cdot)))$ — заданная приближенная формула для интеграла по гауссовой мере μ_0 , точная для функциональных многочленов степени n , здесь $\theta_n(\cdot)$ — некоторые функции — параметры формулы.

Пусть, далее, $J_n \equiv J_n f(\rho_n(\cdot))$ — функционал, заданный на множестве интегрируемых по мере μ_0 функционалов f , такой, что

$$J_n \left(\prod_{j=1}^l \langle \xi_j, \cdot \rangle \right) = \lambda K_l(\xi_1, \dots, \xi_l), \text{ для } l = 1, \dots, n,$$

$$J_n f = C, \text{ для } f(x) = C = \text{const.}$$

Теорема 1. Приближенная формула

$$\int_X f(x) d\mu(x) \approx J_n I_n f(\theta_n(\cdot) + \rho_n(\cdot)) \quad (1)$$

с точностью до первого порядка по λ точна для функциональных многочленов степени не выше n .

Доказательство непосредственно вытекает из сравнения левой и правой частей приближенного равенства (1) после подстановки в них функционалов

$$f(x(\cdot)) = \prod_{j=1}^k \langle \xi_j, x \rangle.$$

При $n \rightarrow \infty$ мы получаем в правой части (1) линейную по λ часть значения интеграла.

Пример 1. Пусть

$$V(\xi) = \int_U (\exp\{i \langle \xi, \rho(u) \rangle\} - 1) \nu(du),$$

где $\rho(u, t)$ и ν — заданные функция и вероятностная мера, U — подмножество \mathbf{R} . В этом случае

$$K_m(\xi, \dots, \xi) = \int_U \langle \xi, \rho(u) \rangle^m \nu(du)$$

и в качестве $J_n f(\rho_n)$ можно взять

$$J_n f = \lambda \int_U f(\rho(u)) \nu(du) \text{ и } J_n f = c \text{ для } f = c = \text{const.}$$

Пример 2. Пусть

$$V(\xi) = ((-1)^r / (2r)!) \int_U \langle \xi, \rho(u) \rangle^{2r} \nu(du),$$

где $\rho(u, t)$ и ν — те же, что и в предыдущем примере, а r — заданное положительное целое число. Тогда имеем

$$K_{2r}(\xi, \dots, \xi) = \int_U \langle \xi, \rho(u) \rangle^{2r} \nu(du),$$

$K_m(\xi, \dots, \xi) = 0$ при $m \neq 2r$, и в качестве $J_n f$ можно взять функционал

$$J_n f = f(0) + (\lambda/2) \int_{\mathbf{R}} \int_U [f(v\rho(u)) - f((-1)^{(1/2r)}v\rho(u))] p(v) \nu(du) dv,$$

где

$$p(v) = (1/((-1)^{r+1}(2r)!2\pi)) \int_{\mathbf{R}} \exp\{-w^{2r} + i w v\} dw,$$

и мы используем тот факт, что

$$\int_{\mathbf{R}} v^{2r} p(v) dv = (-1)^{r+1} (2r)! 2\pi,$$

$$\int_{\mathbf{R}} v^k p(v) dv = 0 \text{ при } k \neq 2r, l = 1, 2, \dots$$

2. Формулы, точные для одноэлементных (связанных) диаграмм заданного порядка

Известная теорема теории возмущений о связанных диаграммах [9] утверждает, что при вычислении вкладов от различных диаграмм в функцию Грина можно ограничиться одноэлементными диаграммами, то есть такими, в которых можно пройти из любой вершины диаграммы в любую другую вершину, двигаясь по линиям диаграммы. Это обстоятельство можно использовать при построении приближенных формул от функционалов вида $\exp\{-\int_0^T V(x(\tau)) d\tau\}$.

Опишем наш подход на примере вычисления интегралов по гауссовым мерам на функциональном пространстве с корреляционной функцией $B(t, s)$ и нулевым средним значением. Пусть в вышеприведенных обозначениях $T = 1$ и

$$\int_0^1 V(x(\tau)) d\tau = \int_0^1 \rho(\tau) x^2(\tau) d\tau.$$

Одноэлементная диаграмма возникает в каждом моменте

$$M_n = \int_X \left[\int_0^1 \rho(\tau) x^2(\tau) d\tau \right]^n d\mu(x)$$

и ее вклад Γ_n дается формулой

$$\begin{aligned} \Gamma_n &= (n-1)! 2^{n-1} \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{j=1}^n p(t_j) B(t_1, t_2) B(t_2, t_3) \dots B(t_n, t_1) d^n t = \\ &= (n-1)! 2^{n-1} \text{tr} B^n, \end{aligned} \quad (2)$$

где B^n — n -я степень интегрального оператора B , определяемого ядром $B(t, s)$, $\text{tr} B^n$ — след оператора B^n , $d^n t = dt_1 \dots dt_n$.

Нетрудно показать, что следующая приближенная формула учитывает вклад всех одноэлементных диаграмм до n -го порядка:

$$I \equiv \int_X f \left(\int_0^1 p(t) x^2(t) dt \right) d\mu(x) \approx \sum_{k=1}^n A_k f(c_k). \quad (3)$$

Здесь коэффициенты $A_i, i = 1, \dots, n$, находятся как решение системы линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k^r A_k = \Gamma_r, r = 1, \dots, n:$$

$c_k, k = 1, \dots, n$ — произвольные числа такие, что $\det[c_k^r] \neq 0$.

Доказательство вытекает из сравнения обеих сторон равенства (3), если учесть, что с точностью до учета вклада связанных диаграмм левая часть для $f(u) = u^r, r = 1, \dots, n$, равна Γ_r , что совпадает с правой частью. Если $f(u) = e^u$, то в силу упомянутой выше теоремы о связанных диаграммах имеет смысл заданная формулой

$$I \approx \exp\left(\sum_{k=1}^n A_k(\exp(c_k) - 1)\right)$$

аппроксимация, равная сумме вкладов всех диаграмм (связанных и несвязанных) порядка не выше n , умноженной на величину

$$\exp\left(\sum_{l=n+1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n A_k c_k^l\right)/l!\right).$$

Заметим также, что если известны собственные значения $\lambda_k, k = 1, 2, \dots$, интегрального оператора с ядром

$$\int_0^1 B_{1/2}(t, u)p(u)B_{1/2}(u, s)du,$$

где $B_{1/2}(t, u)$ — ядро квадратного корня из корреляционного оператора меры, $p(u) > 0$, то в случае $f(u) = \exp(u)$ можно написать точную формулу сразу для вычисления $\ln I$, учитывающую вклад всех одноэлементных диаграмм:

$$\ln \int_X \exp\left(\int_0^1 p(\tau)x^2(\tau)d\tau\right) \approx (1/2) \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 [\exp(-2\lambda_k \tau) - 1]/\tau d\tau \equiv \Gamma.$$

В частности, пусть μ — мера Винера, то есть $B(t, s) = \min(t, s)$ и $p(\tau) = -\lambda^2/2$. Тогда имеем

$$I = \int_X \exp\left\{-\left(\lambda^2/2\right) \int_0^1 x^2(\tau)d\tau\right\} d\mu(x) = [ch\lambda]^{-1/2},$$

$$\ln I = -(1/2) \ln(ch\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{2k-1} \frac{2^{2k-2}(2^{2k}-1)}{(2k)!k} B_{2k} \lambda^{2k}, \quad (4)$$

где B_{2k} — числа Бернулли. С другой стороны,

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}, k = 1, 2, \dots,$$

и, следовательно,

$$\Gamma = (1/2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\lambda^{2n}}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n,$$

что совпадает с (4), так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^n = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{4}{\pi^2(2k-1)^2}\right]^n = (-1)^{n-1} \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1)}{(2n)!} B_{2n}.$$

Из сказанного вытекает, что построение приближенных формул, учитывающих вклады только связанных диаграмм, имеет смысл. В общем случае задача построения достаточно компактных формул, точных для связанных диаграмм высокого порядка, не является простой. Мы приведем здесь одну формулу, которая учитывает вклады только части связанных диаграмм, чтобы проиллюстрировать принципиальную возможность их получения в весьма общей ситуации.

Пусть интегрируемый функционал имеет вид $f(x^m(\cdot)), m > 1$, и μ — гауссова мера. Тогда следующая приближенная формула в случае многочленов степени не выше n учитывает только вклады связанных диаграмм, симметричных относительно перестановки вершин:

$$\int_X f(x^m(\cdot)) d\mu(x) \approx \sum_{k=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \int_{\mathbb{R}} \int_0^1 \int_0^{(k)} \dots \int_0^1 f(v[c_{i_1}^{(k)} \rho(u_1, \cdot) \rho(u_2, \cdot) + c_{i_2}^{(k)} \rho(u_2, \cdot) \rho(u_3, \cdot) + \dots + c_{i_k}^{(k)} \rho(u_{k-1}, \cdot) \rho(u_k, \cdot)]) p_k(v) d^k u dv,$$

здесь $\rho(u, t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \rho(u, t) \rho(u, s) du = B^m(t, s),$$

$c_i^{(k)}, i = 1, \dots, k$ — корни многочлена,

$$\sum_{j=0}^n (-1)^j z^{n-j}/j!,$$

$p_k(v)$ — те же, что и в примере 2.

3. Аппроксимация пуассоновских континуальных интегралов

Рассматриваются следующие интегралы:

$$I = \int F(x) d\mu(x), \quad (5)$$

где μ — пуассоновская мера, определяемая характеристическим функционалом

$$\chi(\xi) \equiv \exp\left\{\lambda \int_0^T [\exp(i\xi(\mathbf{1}_{[t, T]}(\cdot))) - 1 - i\xi(\mathbf{1}_{[t, T]}(\cdot))] dt\right\}.$$

Здесь λ — параметр пуассоновского процесса ($\lambda > 0$), i — мнимая единица, $\xi(\cdot)$ является линейным функционалом, $\mathbf{1}_{[t, T]}(\tau)$ — функция, равная единице при $\tau \in [t, T]$ и нулю при $\tau \notin [t, T]$, $x(t) = x(t) - \lambda t$.

Моменты центрированного пуассоновского процесса, другими словами интегралы

$$M_N = \int \prod_{j=1}^n x(t_j) d\mu(x),$$

имеют следующий вид:

$$M_1 = 0,$$

$$M_n = \sum_{i=1}^n (1/i!) \sum_{q=1}^{[n/2]} \prod_{q=1}^l (\lambda/k_q!) \min(t_{i_{q-1}+1}, \dots, t_{i_q}), n \geq 2.$$

Здесь и в дальнейшем $[\cdot]$ — целая часть числа, $r_0 = 0, r_q = k_1 + \dots + k_q, \sum_{i=1}^n$ обозначает суммирование по всем перестановкам элементов $1, \dots, n$, а \sum^* — суммирование по индексам k_1, \dots, k_l , которые не меньше 2 и в сумме равны n . Такая запись моментов наилучшим образом отвечает диаграммному методу Фейнмана [9]. Индекс суммирования l в выражении M_n соответствует количеству несвязанных между собой элементов.

Введем для удобства следующие обозначения: под N будем подразумевать максимальный из рассматриваемых моментов ($N \geq 2$),

$$c_{Nm} = ((-1)^{N-m} m^{N+1}) / (m!(N-m)!),$$

$$\sigma_N = \sum_{m=1}^N c_{Nm}, D = T(1 - \sigma_N), J_{N0}(F) = F(0),$$

$$J_{N1}(F) = \int_0^T \left[F(\mathbf{1}_{[u, T]}(\cdot) - \sum_{m=1}^N c_{Nm} F(\frac{1}{m} \mathbf{1}_{[u, T]}(\cdot))) \right] du,$$

$$J_{Nn}(F) = \int_0^T \dots \int_0^T (F(\mathbf{1}_{[u_1, T]}(\cdot) + \dots + \mathbf{1}_{[u_n, T]}(\cdot)) -$$

$$- c_n^1 \sum_{m_n=1}^N c_{Nm_n} F(\mathbf{1}_{[u_1, T]}(\cdot) + \dots + \mathbf{1}_{[u_{n-1}, T]}(\cdot) + \frac{1}{m_n} \mathbf{1}_{[u_n, T]}(\cdot)) +$$

$$+ c_n^2 \sum_{m_{n-1}=1}^N c_{Nm_{n-1}} \sum_{m_n=1}^N c_{Nm_n} F(\mathbf{1}_{[u_1, T]}(\cdot) + \dots + \mathbf{1}_{[u_{n-2}, T]}(\cdot) +$$

$$+ \frac{1}{m_{n-1}} \mathbf{1}_{[u_{n-1}, T]}(\cdot) + \frac{1}{m_n} \mathbf{1}_{[u_n, T]}(\cdot)) - \dots +$$

$$+ (-1)^{n-1} c_n^{n-1} \sum_{m_2=1}^N c_{Nm_2} \dots \sum_{m_n=1}^N c_{Nm_n} F(\mathbf{1}_{[u_1, T]}(\cdot) + \frac{1}{m_2} \mathbf{1}_{[u_2, T]}(\cdot) + \dots +$$

$$+ \frac{1}{m_n} \mathbf{1}_{[u_n, T]}(\cdot)) +$$

$$+ (-1)^n c_n^n \sum_{m_1=1}^N c_{Nm_1} \dots \sum_{m_n=1}^N c_{Nm_n} F(\frac{1}{m_1} \mathbf{1}_{[u_1, T]}(\cdot) + \dots + \frac{1}{m_n} \mathbf{1}_{[u_n, T]}(\cdot)) du_1 \dots du_n.$$

При построении аппроксимации мы исходим из требования точности для диаграмм, состоящих из определенного количества несвязанных между собой элементов и возникающих в выражениях для моментов до N -го включительно.

Будем рассматривать следующую приближенную формулу для вычисления рассматриваемого интеграла (5):

$$I \approx I_N^{(n)}(F) = \sum_{p=0}^n (1/p!) J_{Np}(F) \sum_{q=0}^{n-p} ((-1)^q / q!) \lambda^{p+q} D^q, 1 \leq n \leq N/2. \quad (6)$$

Лемма 1. Если функционал F постоянен ($F(x) = C$), то

$$I_N^{(n)}(C) = C.$$

Данное соотношение легко получить, если учесть, что $J_{Np}(C) = C D^p, 1 \leq p \leq n$.

В случае линейного функционала имеют место равенства:

$$J_{N0}(x(t)) = 0 \text{ и } J_{Np}(x(t)) = 0, 1 \leq p \leq n.$$

Поэтому справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. Если функционал F является линейным ($F(x) = x(t)$), то

$$I_N^{(n)}(x(t)) = 0.$$

Лемма 3. При $2 \leq k \leq N$ и $2 \leq p \leq n$ имеет место рекуррентное соотношение

$$J_{Np} \left(\prod_{j=1}^k x(t_j) \right) = D^{p-1} \min(t_1, \dots, t_k) + D J_{Np-1} \left(\prod_{j=1}^k x(t_j) \right) +$$

$$+ \chi_{k \geq 4} \sum_{\alpha + \beta = k, \alpha, \beta \geq 2}^k (1/\alpha!) J_{Np-1} \left(\prod_{r=1}^{\alpha} x(t_{i_r}) \right) (1/\beta!) \min(t_{i_{\alpha+1}}, \dots, t_{i_k}),$$

где параметр $\chi_{k \geq 4}$ равен единице при $k \geq 4$ и нулю при $k = 2, 3$.

Доказательство этого равенства основано на записи выражения для

$$J_{Np} \left(\prod_{j=1}^k x(t_j) \right)$$

в симметричной по u_1, \dots, u_p форме и интегрировании по u_p . Теперь можно воспользоваться методом математической индукции.

Лемма 4. *Справедливо равенство ($2 \leq k \leq N, 2 \leq p \leq n$)*

$$J_{Np} \left(\prod_{j=1}^k x(t_j) \right) = \sum_{l=1}^{\min(p, [k/2])} C_p^l D^{p-l} \Sigma_i^k \Sigma^* \prod_{q=1}^l (1/k_q!) \min(t_{i_{q-1}+1}, \dots, t_{i_q});$$

в данном случае Σ^* обозначает суммирование по индексам k_1, \dots, k_l , которые не меньше 2 и в сумме равны k .

Благодаря полученным результатам имеет место следующее утверждение:

Теорема 2. *Аппроксимация (6) дает точный результат для постоянного функционала и для всех k -элементных ($k = 1, \dots, n$) диаграмм, возникающих в выражениях для моментов до N -го включительно.*

Замечание 1. Приведенная аппроксимация континуального интеграла по пуассоновской мере обнуляет все слагаемые в выражениях для моментов, отвечающие другим типам диаграмм.

Замечание 2. Полученная приближенная формула не только дает точный результат для функционального полинома $(2n+1)$ -й степени (то есть уже является приближенной формулой $(2n+1)$ -й степени точности), но и точно вычисляет те слагаемые, которые отвечают указанным типам диаграмм в моментах от $2n+2$ до N .

4. Составные приближенные формулы

Используя рассмотренные здесь аппроксимации функциональных интегралов, можно получить более точные формулы, если строить составные приближенные формулы аналогично тому, как это имеет место в случае формул, точных для функциональных многочленов. Составные формулы такого вида приведены в [6,8] и в общем случае могут быть записаны в виде

$$I(f) \equiv \int_X f(x) d\mu(x) \approx \int_{\mathbf{R}^N} f(\psi^{(N)}(u)) d\mu_N(u) + I_n(f) - I_{n,N}(f). \quad (7)$$

Здесь $\psi^{(N)}(u)$ — функция на \mathbf{R}^N , соответствующая цилиндрической аппроксимации $\psi^{(N)}(\langle \xi_1^{(N)}, x \rangle, \dots, \langle \xi_N^{(N)}, x \rangle)$, сходящейся при $N \rightarrow \infty$ к $x \in X$ в топологии пространства X ; $\xi_j^{(N)} \in X^j$, $j = 1, \dots, N$; μ_N — конечномерная проекция меры μ в \mathbf{R}^N , определяемая отображением $x \rightarrow \langle \xi_j^{(N)}, x \rangle$, $j = 1, \dots, N$; I_n

— аппроксимация функционального интеграла $I(f)$, обладающая требуемыми свойствами, $I_{n,N}(f)$ аналогичная I_n аппроксимация, построенная по μ_N . При некоторых ограничениях правая часть при любом фиксированном n сходится к точному значению интеграла, когда $N \rightarrow \infty$, сохраняя свойства аппроксимации I_n .

Для иллюстрации подхода приведем параметры составной формулы, построенной на основе приближенной формулы (3). Пусть

$$x^{(N)}(t) = \sum_{j=1}^N \int_0^1 x(\tau) \varphi_j(\tau) d\tau \varphi_j(t),$$

где $\{\varphi_j(t)\}$ — собственные функции ядра $B(t, s)$. Тогда

$$f(\psi^{(N)}(u)) = f\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(\cdot)\right),$$

$$d\mu_N(u) = \left((2\pi)^N \prod_{j=1}^N \lambda_j \right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N u_j^2 \lambda_j\right),$$

где $\{\lambda_j\}$ — собственные значения, соответствующие собственным функциям $\varphi_j(t)$; $I_n(f)$ совпадает с правой частью (3);

$$I_{n,N}(f) = \sum_{k=1}^N A_k f(c_k^{(N)}),$$

где $c_k^{(N)}$, $k = 1, \dots, n$, находятся как решение системы уравнений

$$\sum_{k=1}^n c_k^r A_k = \Gamma_r, \quad r = 1, \dots, n,$$

где Γ_r определяются формулой (2), в которой нужно заменить $B(t, s)$ на

$$B_N(t, s) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \varphi_j(t) \varphi_j(s).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.Д. Егоров, П.И. Соболевский, Л.А. Янович. Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. — Мн.: Наука и техника, 1985.
2. Б.С. Елепов, А.А. Кронберг, Г.А. Михайлов, К.К. Сабельфельд. Решение краевых задач методом Монте-Карло. — Новосибирск: Наука, 1980.

3. Yu. Yu. Lobanov, R.R. Shahbagan, O.V.Sidorova and E.P. Zhidkov. Computation of conditional Wiener integrals by the composite approximation formulas with weight // J. Comput. Appl. Math., 1990, v.29, p.51-60.
4. Е.П. Жидков, Ю.Ю. Лобанов. Расчет топологических эффектов в калибровочных теориях на основе приближенного вычисления винеровских интегралов. Модели квантовой механики. Дубна. Сообщ. ОИЯИ, 1986, P2-86-433.
5. А.Д. Егоров, В.А. Петров. О приближенных формулах для континуальных интегралов, согласующихся с диаграммными методами // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1984, № 2, с.3-7.
6. В.А. Петров. Составные приближенные формулы для континуальных интегралов от функционалов специального вида // Доклады АН БССР, 1986, т.30, № 2, с.116-119.
7. А.Д. Егоров. Виковские мономы, диаграммы, формула инфинитезимальной замены моментной функции для квазимер // Доклады АН БССР, 1992, т.36, № 2, с.101-106.
8. A.D. Egorov, P.I.Sobolevsky and L.A. Yanovich. Functional integrals: Approximate Evaluation and Applications.- Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1993, 418p.
9. P. Маттук. Фейнмановские диаграммы в проблеме многих тел.- М.:Мир, 1969.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 ноября 1995 года.