

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-94-74

И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, В.Н.Первушин,
И.В.Пузынин, Т.В.Пузынина, Н.А.Сариков,
Т.А.Стриж

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ
ШВИНГЕРА — ДАЙСОНА
И БЕТЕ — СОЛПИТЕРА
С ПОТЕНЦИАЛОМ ГАУССА
В РАМКАХ МОДЕЛИ КВАРКОНИЯ

Направлено в журнал «Математическое моделирование»

1994

Численное исследование уравнений Швингера — Дайсона и Бете — Солпитера с потенциалом Гаусса в рамках модели кваркония

Рассматривается математическая модель «кваркония» на основе уравнений Швингера — Дайсона для массовой функции кварков и Бете — Солпитера для связанных состояний кварков. Разработано алгоритмическое программное обеспечение для численного исследования этой модели и получены численные решения краевых задач для указанной системы уравнений с потенциалом Гаусса для пиона. Рассмотрены различные схемы перенормировки волновой функции кварка «внутри» мезона. Показано, что в обсуждаемой схеме перенормировки модель с потенциалом Гаусса описывает динамическую массу кварка, обусловленную спонтанным нарушением киральной симметрии, а также массы и константы лептонного распада пиона.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Numerical Investigation of Schwinger–Dyson and Bethe–Salpeter Equations with Gauss Potential at the Framework of the Quarkonium Model

The mathematical model «quarkonium» is considered on the basis of Schwinger — Dyson equation for the quark mass function and Bethe — Salpeter equation for the bound states. The software for numerical investigations of the model is constructed, and the solutions to the boundary problems for these equations with the Gauss potential for pion are obtained. The several renormalization scheme of the quark wave function «inside» meson are considered. It is shown that in the considered renormalization scheme the model with the Gauss potential describes the quark dynamical mass, due to the spontaneous chiral symmetry breaking, as well as the mass and the leptonic decay constant of pion.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Физические программы экспериментов на "мезонных фабриках" ставят перед теорией элементарных частиц задачу построения модели для единообразного описания спектра и форм-факторов взаимодействия легких и тяжелых мезонов. В последнее время в ряде работ [1-10] для решения этой задачи развивается кварковая потенциальная модель, основанная на эффективном гамильтониане квантовой хромодинамики (КХД) в кулоновской калибровке. При таком подходе описание спектра мезонов сводится к решению краевых задач для уравнений Швингера - Дайсона (Ш-Д) и Бете - Солпитера (Б-С) в трехмерной форме. Уравнение Ш-Д описывает кварки "внутри" мезона и позволяет с помощью одного и того же феноменологического потенциала, используемого в спектроскопии тяжелых кваркониев, вычислить "динамическую" массу кварка, которая является мерой спонтанного нарушения киральной симметрии в области легких кварков. Решения уравнения Б-С (собственные значения и собственные функции) сопоставляются массам и волновым функциям свободных мезонов. Путем сравнения полученных решений с экспериментальными данными для масс и констант распадов исследуется вопрос построения эффективного потенциала КХД, не зависящего от аромата кварков.

В работах [1-7] кварковая потенциальная модель с различными феноменологическими потенциалами (типа гармонического осциллятора [2,5], линейно растущего потенциала в комбинации с кулоновским [3,4] и потенциала Ричардсона [5]) была применена для описания широкого спектра масс мезонов, волновых функций и их констант лептонного распада (F_π и т.п.). Главным результатом авторы указанных работ считают описание на качественном уровне спектров масс всех мезонов, представляемых в виде связанных состояний кварка и антикварка. В частности, в [6] большая разность масс ρ - и π -мезонов получена в приближении осцилляторного потенциала как следствие спонтанного нарушения киральной симметрии без учета спин - спинного взаимодействия кварка и антикварка, которое обычно добавляют в потенциал взаимодействия.

Объединенный Институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Вместе с тем, в упомянутых выше работах для констант лептонных распадов псевдоскалярных мезонов (например, F_π) получены значения, значительно меньшие, чем экспериментальные данные. Причину такого разногласия авторы этих работ видят в релятивистской нековариантности модели.

Попытка решения проблемы спектра масс и констант лептонного распада мезонов в релятивистски ковариантной кварковой потенциальной модели, предложенной в [1-7], была сделана в работах [8,9]. Однако и в этих работах не удалось воспроизвести экспериментальные значения констант распадов мезонов.

Для самосогласованного описания спектра масс и констант распадов мезонов в рамках кварковой потенциальной модели необходимо, по-видимому, учитывать особенность перенормировки волновой функции кварка "внутри" адрона. В кварковой потенциальной модели, использованной в работах [3,4], применена стандартная теоретико-полевая ("пертурбативная") схема перенормировки, которая содержит зависимость от импульса кварка. Такой путь перенормирования уравнения Ш-Д и уравнения Б-С, однако, не дал решения вышеуказанной проблемы.

В работах [10] проведено численное исследование уравнений Ш-Д и Б-С с осцилляторным потенциалом и получены решения для спектра мезонов (π, π', K, K').

В работе [11] для этого же потенциала вычислены спектры псевдоскалярных, скалярных, векторных и аксиально-векторных мезонов.

В работах [12,13] найдены численные решения уравнений Ш-Д и Б-С для потенциала, содержащего осцилляторный и кулоновский члены.

В настоящей работе системы уравнений Ш-Д и Б-С исследуются в случаях различных схем перенормировки волновой функции кварка с целью построения наиболее эффективного теоретико-полевого метода перенормировки для связанных состояний. Для упрощения рассматриваемой проблемы эффективный потенциал выбран в виде гауссиана:

$$V = v_0 \exp(-\mu^2 r^2) + C, \quad (1)$$

где C — постоянный член. В импульсном представлении указанный потенциал имеет следующий вид:

$$V(\vec{p}-\vec{q}) = \frac{v_0}{(\sqrt{\pi})^3} R^3 \exp(-R^2 |\vec{p}-\vec{q}|^2) + C(2\pi)^3 \delta(|\vec{p}-\vec{q}|), \quad R = \mu/2. \quad (2)$$

Задача состоит в подборе таких параметров потенциала и схем перенормировки, при которых численные результаты, полученные для систем уравнений Ш-Д и Б-С, соответствуют экспериментальным данным.

Работа изложена в следующем порядке. В разделе 1 сформулирована краевая задача для уравнения Ш-Д и предлагаются различные способы перенормировки волновой функции кварка. В разделе 2 изложена краевая задача для уравнения Б-С для псевдоскалярных мезонов и условие нормировки собственных функций уравнения, а также дано определение константы лептонного распада мезонов. Раздел 3 посвящен методам численного решения рассматриваемых задач. Для решения уравнения Ш-Д предложен итерационный процесс, который может быть использован при численном исследовании уравнения Ш-Д с другими видами потенциалов. Для решения задачи Б-С используется подход, определяемый непрерывным аналогом метода Ньютона [14] с применением предложенного в [15] модифицированного алгоритма. В разделе 4 анализируются численные результаты.

1. УРАВНЕНИЕ ШВИНГЕРА - ДАЙСОНА

Система уравнений Ш-Д для заданного потенциала $V(\vec{p}-\vec{q})$ имеет следующий вид:

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p}-\vec{q}|) \cos(2v(q)) / (2\pi)^3 \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + \frac{1}{2} \int d\vec{q} V(|\vec{p}-\vec{q}|) \xi \sin(2v(q)) / (2\pi)^3, \end{cases} \quad (3)$$

где интегрирование ведется в трехмерном пространстве координат вектора \vec{q} , $\xi = (\vec{p}/p, \vec{q}/q)$ — скалярное произведение единичных трехмерных векторов, m_0 — заданная константа (масса кварка). $E(p)$ и $v(p)$ — соответственно энергия и волновая функция кварка, которые надо найти.

После интегрирования по углам $\Omega_{\vec{q}}$ система (3) принимает вид

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + I_1 \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + I_2, \end{cases} \quad (4)$$

где

$$I_1 = \int d\vec{q} V_1(p, q) \cos(2v(q)), \quad (5)$$

$$I_2 = \int dq V_2(p, q) \sin(2v(q)), \quad (6)$$

$$V_1 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega V(|\vec{p} - \vec{q}|), \quad (7)$$

$$V_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^3} q^2 \int d\Omega \xi V(|\vec{p} - \vec{q}|). \quad (8)$$

Энергия кварка $E(p)$ и массовая функция кварка

$$m(p) = E(p) \cos(2v(p))$$

должны удовлетворять, исходя из физических соображений, следующим асимптотическим условиям:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E(p) = p, \quad (9)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} E(p) = \text{Const}, \quad (10)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} m(p) = m_0, \quad (11)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} m(p) = \text{Const}, \quad (12)$$

что эквивалентно требованиям

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_1 = 0, \quad (13)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} I_2 = 0, \quad (14)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_1 = \text{Const} < \infty, \quad (15)$$

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_2 = \text{Const} < \infty. \quad (16)$$

При более сильном условии

$$\lim_{p \rightarrow 0} I_2 = 0 \quad (17)$$

асимптотическое поведение функции $v(p)$ имеет вид:

$$\lim_{p \rightarrow 0} v(p) = 0, \quad \lim_{p \rightarrow \infty} v(p) = \pi/4. \quad (18)$$

Требования (9)-(18) накладывают определенные ограничения на класс допустимых потенциалов, т.к. только при их выполнении можно

надеяться на существование решений, имеющих физический смысл. Для расширения класса допустимых потенциалов ряд авторов (см., в частности, [3],[4]) предлагает производить переход к перенормированной системе, который может осуществляться разными способами. В настоящей работе применительно к потенциалу Гаусса исследуются варианты перенормированных систем, обеспечивающие выполнение асимптотических условий (13)-(18):

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + I_1 \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + I_2^{(1)}, \end{cases} \quad (19)$$

где $I_2^{(1)} = \int dq V_2(p, q) (\sin(2v(q)) - q/E(q))$,
или

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + I_1 \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + I_2^{(2)}, \end{cases} \quad (20)$$

где $I_2^{(2)} = 0$,
или

$$\begin{cases} E(p) \cos(2v(p)) = m_0 + I_1 \\ E(p) \sin(2v(p)) = p + I_2^{(3)}, \end{cases} \quad (21)$$

где $I_2^{(3)} = \int dq V_2(p, q) (\sin(2v(q)) - q/E_0(q))$, $E_0 = \sqrt{m_0^2 + p^2}$.

Подставляя потенциал (2) в систему (4)-(8) и переходя к безразмерным величинам по формулам

$$\tilde{E} = E/\hat{\alpha}, \quad \tilde{m}_0 = m_0/\hat{\alpha}, \quad \tilde{p} = p/\hat{\alpha}, \quad \tilde{q} = q/\hat{\alpha}, \quad \tilde{R} = R\hat{\alpha}, \quad \tilde{C} = C/\hat{\alpha}, \quad (22)$$

где $\hat{\alpha} = v_0/(8\pi^3 \sqrt{\pi})$, получаем:

$$\begin{cases} (\tilde{E}(\tilde{p}) - \tilde{C}/2) \cos(2v(\tilde{p})) = \tilde{m}_0 + \tilde{I}_1 \\ (\tilde{E}(\tilde{p}) - \tilde{C}/2) \sin(2v(\tilde{p})) = \tilde{p} + \tilde{I}_2, \end{cases} \begin{cases} \sin(2v(\tilde{p})) \\ \cos(2v(\tilde{p})) \end{cases} \quad (23)$$

где

$$\begin{cases} \tilde{I}_1 = \int d\tilde{q} \tilde{V}_1(\tilde{p}, \tilde{q}) \cos(2v(\tilde{q})), \\ \tilde{I}_2 = \int d\tilde{q} \tilde{V}_2(\tilde{p}, \tilde{q}) \sin(2v(\tilde{q})), \end{cases} \quad (24)$$

$$\begin{cases} \tilde{V}_1 = \tilde{R} \frac{\tilde{q}}{\tilde{p}} \{ \exp(-\tilde{R}^2(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)) \text{sh}(2\tilde{R}^2 \tilde{p} \tilde{q}) \}, \\ \tilde{V}_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\tilde{R} \tilde{p}^2} \{ \exp(-\tilde{R}^2(\tilde{p}^2 + \tilde{q}^2)) [2\tilde{R}^2 \tilde{p} \tilde{q} \text{ch}(2\tilde{R}^2 \tilde{p} \tilde{q}) - \text{sh}(2\tilde{R}^2 \tilde{p} \tilde{q})] \}. \end{cases} \quad (25)$$

В дальнейшем изложении знак \sim над символами для краткости опускается.

Из системы (23) получаем:

$$E(p) - C/2 = (m_0 + I_1)\cos(2v(p)) + (p + I_2)\sin(2v(p)). \quad (26)$$

Согласно (24),(25), для потенциала V_2 интеграл $I_2 \rightarrow \text{Const}$ при $p \rightarrow \infty$. Поэтому из выражения (26) следует, что $E(p) - C/2 \rightarrow p + C^*$ при $p \rightarrow \infty$, где

$$C^* = \lim_{p_M \rightarrow \infty} \int_0^{p_M} dq V_2(p_M, q) \sin(2v(q)). \quad (27)$$

Следовательно, выбирая $C = -2C^*$, можно добиться выполнения асимптотического условия (9). Однако в этом случае при малых m_0 энергия и массовая функция в окрестности нуля становятся отрицательными.

2. УРАВНЕНИЕ ВЕТЕ - СОЛПИТЕРА

Рассмотрим уравнение Б-С для псевдоскалярных мезонов, состоящих из кварков с разными массами [10]:

$$M L_{(1)}(\vec{p}) = E_i(p) L_{(1)}(\vec{p}) - \quad (28)$$

$$- \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} V(|\vec{p} - \vec{q}|) [C_p^{(+)} C_q^{(-)} + \xi S_p^{(+)} S_q^{(-)}] L_{(1)}(\vec{q}),$$

где

$$C_p^{(\pm)} = \cos(v_1(p) \pm v_2(p)), \quad S_p^{(\pm)} = \sin(v_1(p) \pm v_2(p)),$$

v_1, v_2 и E_1, E_2 — решения уравнения Ш-Д для кварка и антикварка, $E_i(p) = E_1(p) + E_2(p)$ — полная энергия мезона, M — собственное значение (масса связанного состояния), $L_{(1)}$ — волновые функции. Условие нормировки имеет вид:

$$\frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} L_1(\vec{q}) L_2(\vec{q}) = 1, \quad (29)$$

где $N_C = 3$ — квантовое число. Используя полученные решения системы (28), можно вычислить константы лептонных распадов псевдоскалярных мезонов:

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \int \frac{d\vec{q}}{(2\pi)^3} L_2(\vec{q}) \cos(v_1(q) + v_2(q)). \quad (30)$$

Будем искать решения системы (28) в следующем виде:

$$L_{(1)}(\vec{p}) = \frac{1}{p} \sum_{l,m} U_{(1)lm}(p) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad \text{like } m \quad (31)$$

где $Y_{lm}(\theta, \phi)$ — сферические функции.

Подставим (31) в формулы (28),(29) при $l, m = 0$. Тогда для потенциала (2) при $C = 0$, обозначив для краткости $U_{(1)00} = U_{(1)}$, получим:

$$M U_{(1)}(p) = E_i(p) U_{(1)}(p) - \quad (32)$$

$$- 2 \int_0^\infty dq [C_p^{(+)} C_q^{(-)} \hat{V}_1(p, q) + S_p^{(+)} S_q^{(-)} \hat{V}_2(p, q)] U_{(1)}(q),$$

$$\frac{4N_C}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \int dq U_1(q) U_2(q) = 1, \quad (33)$$

где

$$\hat{V}_1(p, q) = \frac{p}{q} V_1(p, q), \quad (34)$$

$$\hat{V}_2(p, q) = \frac{p}{q} V_2(p, q), \quad (35)$$

$V_1(p, q)$ и $V_2(p, q)$ определяются формулами (25).

Формула (30) примет вид:

$$F_\pi = \frac{4N_C}{M} \frac{1}{(2\pi)^3} \sqrt{4\pi} \int dq U_2(q) \cos(v_1(q) + v_2(q)). \quad (36)$$

Решения системы (32) должны удовлетворять асимптотическим условиям:

$$\lim_{p \rightarrow 0} U_{(1)}(p) = 0,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} U_{(1)}(p) = 0.$$

Таким образом, мы получили задачу на собственные значения для системы двух интегральных уравнений (32) с условием нормировки (33). Еще раз отметим, что в формулы, определяющие задачу Б-С, входят решения (v_1, E_1) и (v_2, E_2) системы Ш-Д для двух масс кварков m_{01} и m_{02} .

3. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ Ш-Д И Б-С

3.1 Итерационная схема решения уравнения Швингера - Дайсона

Перепишем систему (23) в следующем виде:

$$\operatorname{tg}(2v(p)) = \Phi(v(p)), \quad (37)$$

где

$$\Phi(v(p)) = (p + I_2)/(m_0 + I_1). \quad (38)$$

С учетом (37) итерационный процесс для решения уравнения Ш-Д организован по формуле:

$$v_{n+1}(p) = \arctan [\Phi(v_n(p))]/2. \quad (39)$$

Энергия $E(p)$ вычисляется по формуле (26), интеграл I_2 определяется в зависимости от исследуемой схемы. *не требует нормировки!*

Итерационный процесс (39) завершается, если выполнено соотношение:

$$\delta_n < \epsilon, \quad (40)$$

где $\epsilon > 0$ — заданное малое число, δ_n — невязка, вычисляемая по формуле

$$\delta_n = |(m_0 + I_1(v_n(p))) \sin(2v_n(p)) - (p + I_2(v_n(p))) \cos(2v_n(p))|. \quad (41) ?$$

В качестве начального приближения используется

$$v_0 = \arctan(p/m_0)/2. \quad \rightarrow \text{если решение не существует } p \rightarrow \infty$$

При этом для выполнения неравенства (41) ($\epsilon = 10^{-4}$) обычно требуется 10-25 итераций в зависимости от выбора параметров m_0 и R . При уменьшении значений m_0 и R число итераций увеличивается. Если за начальное приближение брать уже полученные для других значений m_0 и R решения, количество итераций существенно уменьшается.

Эффективность и простота программной реализации предложенного алгоритма делают возможным его использование для решения уравнения Ш-Д с другими видами потенциалов, определяя единый подход к его исследованию.

3.2 Метод решения уравнения Бете - Солпитера

Система (32) представляет собой задачу на собственные значения для двух интегральных уравнений с условием нормировки (33). Численное решение задачи осуществлялось с использованием модифицированного алгоритма на основе непрерывного аналога метода Ньютона [14], предложенного в работе [15]. В качестве начального приближения использовалось $M_0 = 0.5$, $U_{0(1)}(p) = p \exp(-p)$, а также найденные для других значений m_0 и R решения. В большинстве случаев итерационный процесс сходится за 9-11 итераций

3.3 Общая программная реализация

Для численного исследования спектров мезонов и констант распада на основе приведенных в п.1 и п.2 уравнений Ш-Д и Б-С разработан единый программный комплекс на языке FORTRAN-77.

Решения уравнения Ш-Д по описанному в п.3.1 алгоритму последовательно вычисляются для двух масс m_{01} и m_{02} в соответствии с одним из вариантов:

1. Вычисления проводятся для системы (23)-(25) при $C = 0$.
2. Константа C для системы (23)-(25) вычисляется по формуле (27).
3. Исследуется система вида (19) ($C = 0$).
4. В вычислениях используется система вида (20) ($C = 0$).
5. Расчеты проводятся для системы (21) ($C = 0$).

Для полученных решений задачи Ш-Д (v_1, E_1) и (v_2, E_2), соответствующих массам m_{01} и m_{02} , решается задача Б-С, определяемая формулами (32)- (35). Далее по формуле (36) вычисляется константа распада F_π и определяется соотношение $\Delta = M/F_\pi$. При необходимости производится переход к размерным величинам по формулам (22).

При вычислении интегралов использовалась квадратурная формула Симпсона, обеспечивающая порядок аппроксимации $O(h^4)$.

Вычисления проводились на ЭВМ VAX-8350, CONVEX C120, PC AT-386/486.

4. АНАЛИЗ ЧИСЛЕННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Точность численных решений уравнений Ш-Д и Б-С зависит от p_M — параметра перехода от интервала интегрирования $[0, \infty)$ к конечному отрезку $[0, p_M]$ и h — шага дискретной сетки на этом отрезке. Точность полученных результатов проверялась путем численных экспериментов на последовательностях увеличивающихся интервалов $[0, p_M]$ и сгущающихся сеток с шагами $h, h/2, h/4$.

Согласно изложенным в п.3 схемам проведено численное исследование уравнений Ш-Д и Б-С по параметрам m_0 и R . Расчеты для большинства значений m_0 и R выполнены на интервалах $[0, 5]$ и $[0, 10]$ с равномерным шагом сетки $h = 0,05$ и $0,1$. При этом ставилась задача найти для различных вариантов задачи Ш-Д такие значения параметров, при которых для основных состояний выполняется условие

$$\Delta = \frac{M}{F_\pi} \simeq \frac{137}{132} \simeq 1.04, \quad (42)$$

соответствующее экспериментальным данным для π -мезонов.

Результаты расчетов по каждому из пяти вариантов п.3.3 для $m_{01} = m_{02}$ отражены в Таблицах 1-5. В тех случаях, когда условие (42) выполнено, указаны размерные величины, вычисленные по формулам (22). Масса π -мезона принимается равной 137 МэВ , значение $\hat{\alpha}$ определяется как $\hat{\alpha} = 137/M_\pi$.

Таблица 1

m_0	M_π	F_π	M_π/F_π	R
0.05	1.731	0.015	115.61	60.
0.10	2.133	0.031	69.95	35.
0.50	1.676	0.191	8.77	6.
1.00	2.876	0.299	9.63	2.

Таблица 2

m_0	m_0 (МэВ)	M_π	F_π	M_π/F_π	$m(0)$	$m^{(0)}$ (МэВ)	$\hat{\alpha}$ (МэВ)	v_0 (МэВ)	R	$R(1/\text{МэВ})$
0.5	—	.124	0.495	0.25	—	—	—	1.50	—	
0.8	210	.522	0.479	1.08	0.760	200	263	$1 \cdot 10^5$	5.25	0.02
1.0	—	.691	0.372	1.86	—	—	—	15.00	—	

Таблица 3

m_0	m_0 (МэВ)	M_π	F_π	M_π/F_π	$m(0)$	$m^{(0)}$ (МэВ)	$\hat{\alpha}$ (МэВ)	v_0 (МэВ)	R	$R(1/\text{МэВ})$
0.002	2.7	0.100	.097	1.04	.152	268	1370	$5 \cdot 10^5$	2.50	0.002
0.005	4.5	0.152	.148	1.03	.229	206	901	$4 \cdot 10^5$	2.70	0.003
0.007	5.6	0.172	.167	1.03	.266	212	796	$3 \cdot 10^5$	2.80	0.004
0.010	7.0	0.197	.190	1.04	.304	211	695	$3 \cdot 10^5$	2.90	0.004
0.050	19.7	0.347	.347	1.00	.603	236	395	$2 \cdot 10^5$	4.50	0.011
0.100	30.9	0.444	.431	1.03	.764	234	309	$1 \cdot 10^5$	7.00	0.027
0.500	—	1.301	.420	3.09	—	—	—	—	15.0	—

Таблица 4

m_0	m_0 (МэВ)	M_π	F_π	M_π/F_π	$m(0)$	$m^{(0)}$ (МэВ)	$\hat{\alpha}$ (МэВ)	v_0 (МэВ)	R	$R(1/\text{МэВ})$
0.002	2.7	0.102	.098	1.04	.152	206	1343	$6 \cdot 10^5$	2.50	0.002
0.005	4.5	0.155	.147	1.05	.218	213	913	$4 \cdot 10^5$	2.70	0.003
0.007	5.6	0.181	.177	1.03	.264	224	767	$3 \cdot 10^5$	2.85	0.003
0.010	7.2	0.195	.195	1.00	.311	236	721	$3 \cdot 10^5$	3.00	0.004
0.050	19.5	0.395	.365	1.03	.610	260	391	$2 \cdot 10^5$	5.15	0.013
0.100	31.0	0.441	.439	1.01	.776	262	311	$1 \cdot 10^5$	8.20	0.026
0.500	—	1.217	.371	3.21	—	—	—	—	28.5	—

Таблица 5

m_0	m_0 (МэВ)	M_π	F_π	M_π/F_π	$m(0)$	$m^{(0)}$ (МэВ)	$\hat{\alpha}$ (МэВ)	v_0 (МэВ)	R	$R(1/\text{МэВ})$
0.002	2.6	0.106	.102	1.04	.158	207	1295	$5 \cdot 10^5$	2.48	0.002
0.005	4.2	0.164	.155	1.06	.211	193	835	$4 \cdot 10^5$	2.60	0.003
0.007	5.3	0.182	.176	1.03	.245	190	753	$3 \cdot 10^5$	2.65	0.004
0.010	6.8	0.203	.194	1.05	.292	186	675	$3 \cdot 10^5$	2.70	0.004
0.050	19.0	0.361	.361	1.00	.554	124	380	$2 \cdot 10^5$	3.25	0.008
0.100	29.2	0.470	.461	1.02	.703	204	292	$1 \cdot 10^5$	3.75	0.013
0.5	—	1.094	.515	2.13	—	—	—	—	25.0	—

Из Таблиц видно, что только для вариантов 2-5 удалось найти параметры, обеспечивающие выполнение условия (42). Поскольку интегралы $I_2^{(1)}$ и $I_2^{(3)}$ близки к нулю, результаты расчетов по вариантам 3-5 оказались сходными. Это видно также на рис.1-3, на которых представлена зависимость от параметров m_0, R функции $v(p)$, энергии $E(p)$ и массовой функции $m(p)$, полученных в результате решения задачи Ш-Д по каждому из вариантов.

Следует отметить, что решения задачи Б-С с числом нулей $N > 0$ существуют не для всех значений параметров m_0 и R . В частности, из наборов параметров, представленных в Таблицах 2-5, решения с

числом нулей $N = 1$ найдены только для $m_0 = 0,05$ и $m_0 = 0,1$. Решения с числом нулей $N = 2$ найдены лишь для $m_0 = 0,1$. В Таблицах 6-8 представлены значения M и F_π для решений уравнения Б-С с числом нулей $N = 1, 2$ для вариантов 3,4,5. На рис.4-6 изображены графики функций $U_{(z)}$ уравнения Б-С для $m_0 = 0,1; R = 3,75$ с числом узлов $N = 0, 1, 2$ для варианта 3.

Таблица 6
 $m_0 = 0.05, N = 1$

вариант	R	R(1/ МэВ)	M_π	M_π (МэВ)	F_π	F_π (МэВ)	M_π/F_π	$\dot{\alpha}$ (МэВ)
3	4.50	0.011	1.017	401	0.055	22	14.44	395
4	5.15	0.013	0.976	382	0.115	45	8.51	391
5	3.25	0.008	1.054	422	0.049	19	21.66	380

Таблица 7
 $m_0 = 0.1, N = 1$

вариант	R	R(1/ МэВ)	M_π	M_π (МэВ)	F_π	F_π (МэВ)	M_π/F_π	$\dot{\alpha}$ (МэВ)
3	4.50	0.027	1.029	318	0.109	31	9.42	309
4	8.20	0.026	0.988	307	0.058	18	17.08	311
5	3.75	0.013	1.221	354	0.087	27	14.04	292

Таблица 8
 $m_0 = 0.1, N = 2$

вариант	R	R(1/ МэВ)	M_π	M_π (МэВ)	F_π	F_π (МэВ)	M_π/F_π	$\dot{\alpha}$ (МэВ)
3	4.50	0.027	1.458	451	0.059	19	21.62	309
4	8.20	0.026	1.404	437	0.063	20	22.21	311
5	3.75	0.013	1.528	443	0.034	10	45.06	292

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе исследованы различные схемы перенормировки волновой функции кварка и получены численные решения системы перенормированного уравнения Ш-Д и уравнения Б-С с потенциалом,

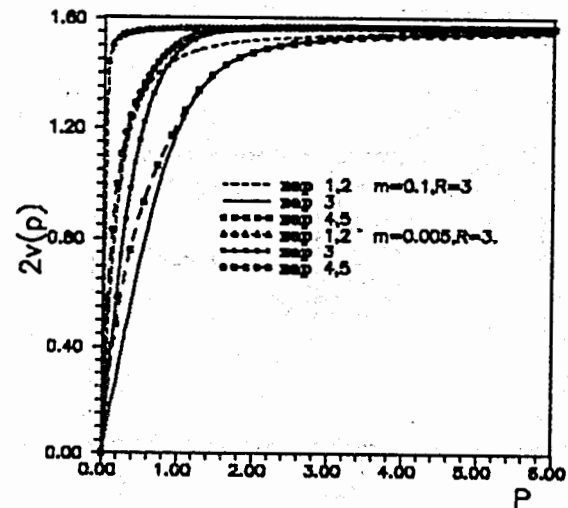


Рис. 1

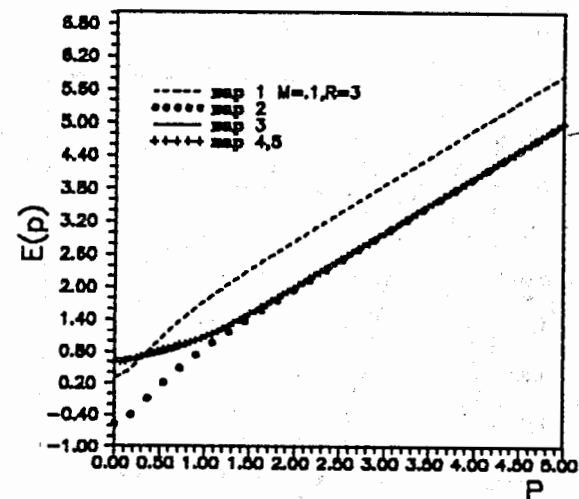
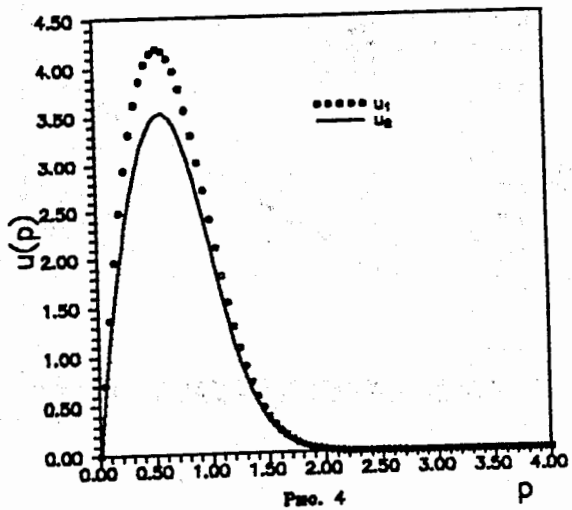
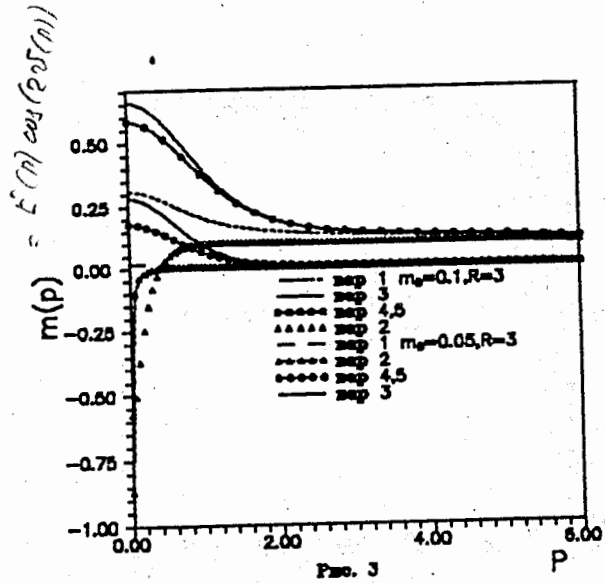
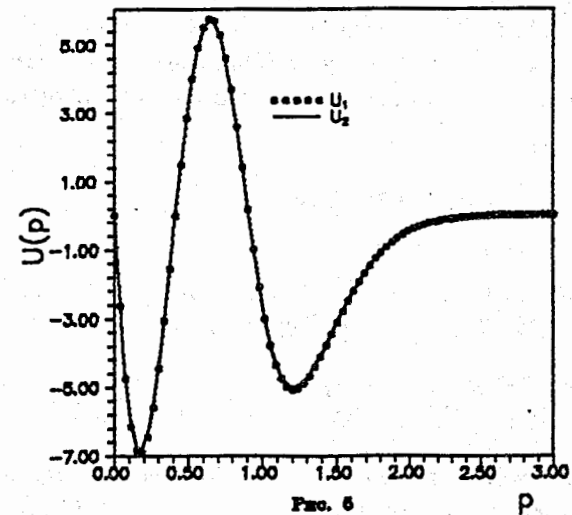
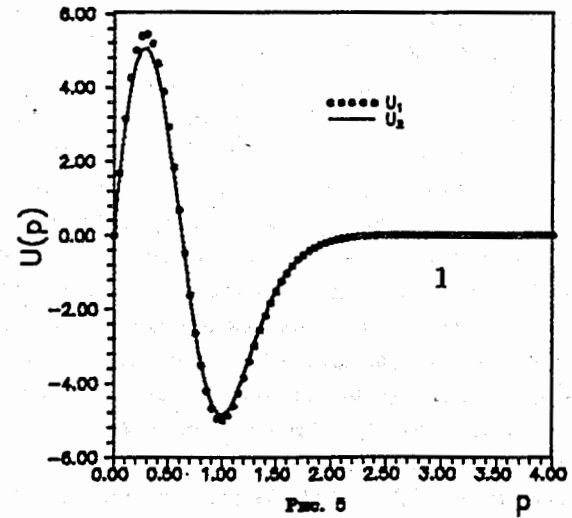


Рис. 2



$\chi_1 - ?$
 $\chi_2 - ?$



имеющим вид функции Гаусса. Решения получены для пиона как связанного состояния кварка и антикварка, имеющих ненулевые затравочные массы. В качестве критерия выбора схемы перенормировки и фиксирования свободных параметров модели использовано экспериментальное значение отношения массы и константы лептонного распада пиона. При значениях свободных параметров, фиксированных по условию описания мезона, удалось получить решения только для двух радиально возбужденных состояний пиона, причем энергии этих со-

стояний лежат значительно ниже, чем имеющиеся оценки, что можно объяснить видом выбранного потенциала.

Заметим, что множество радиально возбужденных состояний мезонов описывается в модели с осцилляторным потенциалом [12]. Поэтому можно предположить, что комбинация потенциалов Гаусса и гармонического осциллятора с использованием рассмотренных в настоящей работе схем перенормировки волновой функции кварка позволит описать спектры масс и константы распадов легких мезонов.

Расчеты для этой модели могут быть проведены по аналогичной схеме с использованием разработанного программного обеспечения.

Авторы благодарят В.Каллиса и Э.А.Кураева за обсуждение постановки задачи, Е.П.Жидкова за ценные замечания и поддержку, Х.Ф.Давлятова за помощь при оформлении работы. Один из авторов, В.Н.Первушин, благодарит Российский фонд фундаментальных исследований (грант 94 - 02 - 14411) за поддержку. Авторы И.В.Амирханов, Е.В.Земляная, И.В.Пузынин, Т.П.Пузынина, Т.А.Стриж благодарят Российский фонд фундаментальных исследований (грант 94 - 01 - 01119 - а) за поддержку и Комиссию Европейского сообщества за поддержку в рамках ЕС-российской коллаборации (контракт ECRU002).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *S.L.Adler and A.C.Davis*. Chiral symmetry breaking in coulomb gauge QCD. // Nucl. Phys. B244, p.469, 1984.
2. *A.Kocic*. Chiral - symmetry restoration at finite densities in coulomb - gauge QCD. // Phys. Rev. D33, p.1785, 1986 .
3. *R.Alkofer and P.A.Amundsen*. Chiral symmetry breaking in an instantaneous approximation to coulomb gauge QCD. // Nucl. Phys. B306, p.305, 1988 .
4. *A.Trzupiek*. Chiral symmetry breaking in the pairing model of QCD with the coulomb potential. // Acta Physica Polonica, vol. B20, N2, p.93, 1989.
5. *D.W.McKay, H.J.Munczek and Bing-Lin Young*. From QCD to the low-energy effective action through composite fields: Goldstone's theorem and f_π . // Phys. Rev. D37, p.195, 1988.

6. *A.Le Yaouanc, L.Oliver, P.Pene and J.C.Raynal*. Spontaneous breaking of chiral symmetry for confining potentials. // Phys. Rev. D29, p.1233, 1984; Quark model of light mesons with dynamically broken chiral symmetry. // Phys. Rev. D31, p.137, 1985.
7. *Pedro J. de A.Bicudo and Jose E.F.T.Ribeiro*. Current-quark model in a 3P_0 condensed vacuum. // Phys. Rev. D42, p.1611, 1990.
8. *Ю.Л. Калиновский, В. Каллис, Б.Н. Куранов, В.Н. Первушин, Н.А. Сариков*. Билочальные мезонные лагранжианы и потенциальная модель. // Ядерная физика, т.49, стр. 1709 - 1717, 1989; *Yu.L.Kalinovsky, W.Kalliss, L.Kaschlunn, L.Münchow, V.N.Pervushin, and N.A.Sarikov*. Mesons in the Low - Energy Limit of QCD. // Fortschr. Phys. 38, p.333, 1990; Relativistic Bound States in QCD. // Few Body Systems, 10, p.87, 1991.
9. *R.Horvat, D.Keker, D.Klabučar and D.Palle*. Mesons as bilocal fields in the harmonic approximation. A Reassessment. // Phys.Rev. D44, N.5, p.1585, 1991.
10. *И.В. Амирханов, О.М. Жураев, В. Каллис, В.Н. Первушин, И.В. Пузынин, Н.А. Сариков, Т.А. Стриж*. Кваркони в КХД с растущим потенциалом. — Сообщение ОИЯИ P11-88-506, Дубна, 1988; *I.V. Amirkhanov, O.M. Juraev, V.N. Pervushin, I.V. Puzynin, N.A. Sarikov*. Instantaneous approximation for QCD and the properties of mesons (π, π', K, K'). — Preprint JINR E2-90-414, Dubna, 1990.
11. *И.В. Амирханов, Т.Э. Насиров, Н.А. Сариков*. Численное решение краевой задачи для уравнения Бете-Солпитера с квадратично растущим потенциалом. — Сообщение ОИЯИ P11-93-173, Дубна, 1993.
12. *I.V. Amirkhanov, O.M. Juraev, V.N. Pervushin, I.V. Puzynin, N.A. Sarikov*. Newtonian iterative scheme for solving Schwinger - Dyson equation for a quark. - JINR Comm. E11-91-108, Dubna, 1991.
13. *И.В. Амирханов, О.М. Жураев, В.Н. Первушин, И.В. Пузынин, Н.А. Сариков*. Численный метод решения краевой задачи для системы интегро - дифференциальных уравнений (уравнение Бете-Солпитера). — Сообщение ОИЯИ P11-91-111, Дубна, 1991.

14. *Е.П. Жидков, Г.И. Макаренко, И.В. Пузынин.* Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. // ЭЧАЯ, 4, 1, с.127, 1973;

Т. Жаппаев, И.В. Пузынин О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона. // ЖВМиМФ, 32, 6, с.846-856, 1992.

15. *I.V. Puzynin, I.V. Amirkhanov, T.P. Puzynina, E.V. Zemlyanaya.* The newtonian iterative scheme with simultaneous calculating the inverse operator for the derivative of nonlinear function. // JINR Rapid Comm. 5[62]-93, p.63, Dubna, 1993.

исполн
701

НАМН

Рукопись поступила в издательский отдел
10 марта 1994 года.