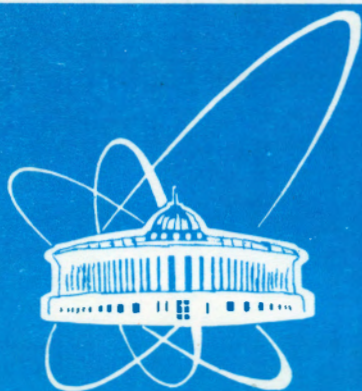


94-202



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P11-94-202

М.Б.Юлдашева, О.И.Юлдашев

КОМПЛЕКС ПРОГРАММ MSFE3D  
ДЛЯ РАСЧЕТОВ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ  
МАГНИТОСТАТИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ.  
ВЕРСИЯ 1.2

1994

## Введение

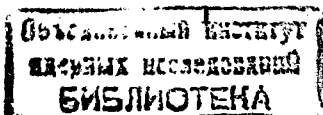
В настоящее время существует относительно большое количество программ, предназначенных для математического моделирования электромагнитных полей различных электрофизических установок [1,2]. Это, видимо, связано с бурным развитием вычислительной техники; разнообразием электрофизических установок, которые, например, в физике высоких энергий, могут быть уникальными; а также с коммерциализацией наиболее известных программ.

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию и модификации версии 1.1 программы MSFE3D с целью включения новых методов и разработанных алгоритмов [3,4]. К характерным алгоритмическим особенностям версии 1.1 следует отнести следующие.

- Использование дифференциальной формулировки задачи магнито-статистики относительно общего (внутри ферромагнетика) и редуцированного (в воздухе) скалярных потенциалов.
- Использование метода конечных элементов для дискретизации задачи; в качестве элементов разбиения ограниченной расчетной области можно выбирать произвольные выпуклые шестигранники.
- Два способа вычисления потенциала от обмоток  $\phi^S$ :
  - по формуле  $\phi^S(x) = \phi^S(y) - \int (\vec{H}_S)_\tau d\tau$ , где  $(\vec{H}_S)_\tau$  – тангенциальная компонента поля от обмоток, интегрирование ведется по некоторой кривой, принадлежащей поверхности ферромагнетика,  $x, y$  – точки этой поверхности;
  - посредством решения линейной краевой задачи для уравнения Лапласа внутри области, занимаемой ферромагнетиком.
- Два метода решения линеаризованной системы:
  - метод симметричной последовательной верхней релаксации с адаптивным полиномиальным (BT) ускорением;
  - метод неполной факторизации Холецкого с сопряженными градиентами при предварительном упорядочении неизвестных по обратному алгоритму Катхилла-Макки.

В новую версию – 1.2 программы MSFE3D добавлены следующие алгоритмы.

- Использование ускоренного итерационного процесса [4] для решения нелинейной системы уравнений, полученной в результате дискретизации задачи;



- Использование специальных алгоритмов [3] для быстрого решения линеаризованной системы уравнений с разреженной матрицей на векторных и параллельно-векторных ЭВМ;
- Использование бесконечных элементов [5] для более точного учета условия на бесконечности, поскольку задача решается во всем пространстве.

Приведем кратко содержание работы по параграфам.

В первом параграфе приводится дифференциальная формулировка задачи магнитостатики и ее конечно-элементная дискретизация; рассматривается пример задания условия Дирихле на плоскости симметрии магнитной системы с учетом закона полного тока; обсуждаются формулы для вычисления элементов матрицы и поверхностных интегралов в правой части нелинейной системы.

Во втором параграфе рассматриваются формулы и алгоритмы для вычисления потенциала и поля от обмотки. Дается краткая характеристика свойств итерационного процесса для решения нелинейной системы уравнений и предобусловленного метода сопряженных градиентов.

В третьем параграфе приводится информация об организации программы и примеры некоторых расчетов.

В заключение формулируются выводы и основные возможности версии 1.2 программы MSFE3D.

## 1 Формулировка задачи и ее дискретизация

### 1.1 Формулировка задачи

Рассмотрим задачу нахождения распределения магнитного поля, созданного стационарными токами в проводниках и намагниченностью находящихся в пространстве изотропных ферромагнетиков. Как известно, в случае отсутствия поверхностных токов и токов, протекающих по ферромагнетикам, эта задача сводится к нахождению вектора магнитной индукции  $\vec{B}$  и вектора напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  из стационарных уравнений Максвелла:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}, \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |\vec{H}| = 0. \quad (4)$$

где  $\vec{J}$  - заданная вектор-функция плотности тока;  $\mu$  - известная функция магнитной проницаемости сред, для ферромагнитных сред  $\mu = \mu(|\vec{H}|)$ ;  $\mu_0$  - постоянная магнитной проницаемости в вакууме. Представим  $\vec{H}$  в виде суммы двух векторов:

$$\vec{H} = \vec{H}_F + \vec{H}_S, \quad (5)$$

где  $\vec{H}_S$  определяется из уравнений:

$$\nabla \times \vec{H}_S = \vec{J}, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot \vec{H}_S = 0.$$

$\vec{H}_S$  представляет собой, таким образом, поле, создаваемое токовой обмоткой. Оно может быть вычислено по закону Био-Савара:

$$\vec{H}_S(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Omega_s} \vec{J} \times \nabla \frac{1}{|x-y|} dy, \quad (7)$$

где  $\Omega_s$  - область, занимаемая обмоткой,  $|x-y|$  - расстояние между точками  $x$  и  $y$ .

Из уравнений (1), (5) и (6) следует, что  $\vec{H}_F$  - это вклад от всех магнитных материалов и его можно представить в виде

$$\vec{H}_F = -\nabla \phi, \quad (8)$$

где  $\phi$  - редуцированный скалярный потенциал.

Бывают случаи, когда  $\vec{H}_F$  и  $\vec{H}_S$  имеют большие, близкие по значению и противоположные по знаку величины внутри области железа, поэтому суммарное поле  $\vec{H}$  в уравнении (5) оказывается мало и вычисляется с большой погрешностью. Кроме того, поскольку  $\vec{H}$  используется для вычисления  $\mu$  на каждой итерации при решении дискретизованной нелинейной системы, то по вышеуказанной причине  $\mu$  также может определяться с ошибкой.

Во избежание численной неустойчивости, редуцированный потенциал  $\phi$  используется только вне ферромагнитных областей. А в ферромагнитных областях, где  $\vec{J} = 0$ , вводится общий потенциал  $\psi$ :

$$\vec{H} = -\nabla \psi.$$

Таким образом, все пространство делится на две области.

1.  $\psi$ -область. Это область, занимаемая ферромагнетиками -  $\Omega_F$ . Из (2), (3) имеем

$$\nabla \cdot \mu \nabla \psi = 0, \quad x \in \Omega_F. \quad (9)$$

2.  $\phi$ -область. Это область без ферромагнетиков -  $\Omega_A = R^3 \setminus \Omega_F$ . Используя (5) и (8), получим

$$\vec{H} = -\nabla\phi + \vec{H}_S.$$

А из (2), (3) и (6) имеем

$$\nabla \cdot \nabla\phi = 0, \quad x \in \Omega_A. \quad (10)$$

Обозначим через  $\Gamma$  границу между  $\Omega_F$  и  $\Omega_A$ .

Из уравнений магнитостатики следует необходимость выполнения следующих условий. Нормальная компонента вектора  $\vec{B}$  и тангенциальная компонента вектора  $\vec{H}$  должны быть непрерывны на любой поверхности. Эти условия должны выполняться и на бесконечности, и на любой границе, в частности, на  $\Gamma$ :

$$\begin{aligned} \psi &= \phi + \phi^S, \quad x \in \Gamma, \\ \mu \frac{\partial \psi}{\partial n} &= \frac{\partial \phi}{\partial n} + \vec{n} \cdot \vec{H}_S, \quad x \in \Gamma, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} \phi &= 0, \quad x \in \Omega_A, \end{aligned} \quad (11)$$

где потенциал  $\phi^S$  вводится по формуле

$$\vec{H}_S = -\nabla\phi^S, \quad x \in \Omega_F.$$

На любой бесконечно удаленной границе имеем либо  $\partial\psi/\partial n = 0$  - условие Неймана, т.е. поле параллельно границе, либо  $\psi = const$  - условие Дирихле, т.е. поле нормально к границе.

В том случае, если  $\psi$ -область имеет два или более условия Дирихле, значение константы может быть различно для каждой из границ. Если константа берется равной нулю на одной из них, то уравнение (1) может быть проинтегрировано, и, таким образом, будут найдены значения оставшихся констант. Рассмотрим следующий пример. На рис. 1 изображена часть сечения магнитной системы в плоскости XOY, линии AB и AC - такие оси симметрии, что тангенциальная компонента поля на этих линиях равна нулю. На осях симметрии полагаем  $\phi = 0$  в  $\phi$ -области и на DE  $\psi = 0$  в  $\psi$ -области. Чтобы найти значение  $\psi = const$  на FG, проинтегрируем  $\nabla \times \vec{H} \cdot \vec{n}$  ( $\vec{n}$  - нормаль к плоскости рисунка) по поверхности S, ограниченной DFGED. Так как на DE  $\vec{H} \cdot d\vec{l} = 0$ , то

$$\int_S \nabla \times \vec{H} \cdot \vec{n} = \int_{DFGE} \vec{H} \cdot d\vec{l}.$$

Поверхность S принадлежит области  $\psi$ , где  $\vec{J} = 0$ , поэтому можно написать:

$$\vec{H} \cdot d\vec{l} = -d\psi.$$

Следовательно, из уравнения (1) сразу получаем

$$\psi_{FG} - \psi_{DE} = I$$

или

$$\psi_{FG} = I,$$

где  $I$  - полный ток. Таким образом, значение неизвестной константы на FG находится из закона полного тока.

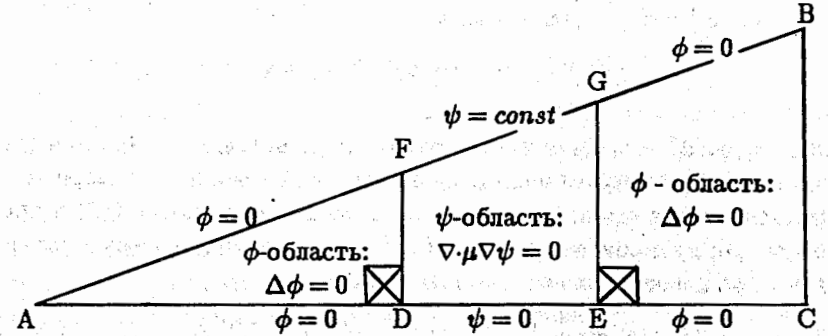


Рис. 1. Часть сечения магнитной системы плоскостью XOY (к примеру задания условия Дирихле)

## 1.2 Конечно-элементная дискретизация

Дискретизация непрерывных дифференциальных уравнений основывается на методе Галеркина, например, [6]. Выберем в пространстве некоторую ограниченную односвязную область  $\Omega$ , содержащую  $\Omega_F$ , и окружающую ее часть области  $\Omega_A$ . Разобьем  $\Omega$  на выпуклые шестигранники  $\bar{\Omega}_i$ ; так, чтобы  $\bar{\Omega}_i = \cup \bar{\Omega}_j$ ,  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ , когда  $i \neq j$ , предполагая также, что каждая грань элемента  $\bar{\Omega}_i$  является гранью другого элемента, а граница  $\Gamma$  составлена из граней выбранных элементов.

Введем в пространстве с прямоугольной декартовой системой координат относительно переменной  $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$  линейные функции формы  $N_m^e$  для куба  $[-1, 1]^3$  в виде

$$N_m^e(\xi) = (1/8)(1 + \sigma_{m1}\xi^1)(1 + \sigma_{m2}\xi^2)(1 + \sigma_{m3}\xi^3), \quad m = 1, \dots, 8,$$

где коэффициенты  $\sigma_{mk}$  выбираются равными 1 или -1, чтобы  $N_m^e$  была равна 1 в вершине с номером  $m$  и равна 0 в любой другой вершине. Учитывая, что куб  $[-1, 1]^3$  переходит в элемент  $\bar{\Omega}_i$  при использовании преобразования [7]:

$$x^k = \sum_{m=1}^8 x_{j,m}^k N_m^e(\xi), \quad k = 1, 2, 3,$$

где  $x_{j,m}^k$ ,  $k = 1, 2, 3$  - координаты вершины элемента  $\bar{\Omega}_j$  с номером  $m$ , можно получить базисные функции на элементе  $\bar{\Omega}_j - N_m(\xi(x))$ ,  $m = 1, \dots, 8$ . Решение задачи (9)-(11) будем искать в виде:

$$\psi(x) = \sum_j \psi_j N_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}_F, \quad (12)$$

$$\phi(x) = \sum_j \phi_j N_j(x), \quad x \in \bar{\Omega}_A.$$

Потенциал  $\phi^S$  также представим в виде

$$\phi^S(x) = \sum_j \phi_j^S N_j(x), \quad x \in \bar{\Omega}_F.$$

Через  $\psi_j, \phi_j, \phi_j^S$  обозначены значения потенциалов в узлах пространственной сетки, полученной в результате дискретизации области  $\bar{\Omega}$ . Подставляя выражения для  $\psi$  и  $\phi$  через базисные функции (12) в обобщенную формулировку [4] задачи (9)-(11) и учитывая краевые условия, получим уравнение для определения  $\psi$  и  $\phi$ :

$$\begin{aligned} \sum_{x_j \in \bar{\Omega}_F} \psi_j \int_{\Omega_F} \mu \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega + \sum_{x_j \in \Gamma} \psi_j \int_{\Omega_A} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega + \sum_{x_j \in \Omega_A} \phi_j \int_{\Omega_A} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega = \\ = - \int_{\Gamma} N_i \cdot \vec{n} \cdot \vec{H}^S dS + \sum_{x_j \in \Gamma} \phi_j^S \int_{\Omega_A} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

Интегралы по областям  $\Omega_F, \Omega_A$ , входящие в (13), вычисляются при помощи суммирования вкладов от отдельных элементов  $\bar{\Omega}_j$ . В пределах каждого такого элемента  $\mu$  считается постоянной, ее аргумент вычисляется в центре. Под центром элемента  $\bar{\Omega}_j$  понимается точка  $\hat{x}_j$ , каждая координата которой является средним арифметическим координат вершин шестигранника. При вычислении интегралов по отдельным элементам  $\bar{\Omega}_k$  используется изопараметрическое преобразование каждого элемента в куб  $[-1, 1]^3$ . Таким образом, для  $i, j$ - элемента  $k$ -ой элементной матрицы имеем представление:

$$\begin{aligned} a_{ij}^k &= \mu(|\vec{H}(\hat{x}_k)|) \int_{\Omega_k} \nabla N_i^k \cdot \nabla N_j^k dx = \\ &= \mu(|\vec{H}(\hat{x}_k)|) \int_{[-1,1]^3} (J_k^{-1} \nabla N_i^k)^T (J_k^{-1} \nabla N_j^k) \det(J_k) d\xi, \end{aligned}$$

где матрица  $J_k = \{\partial x^i / \partial \xi^j\}_{i,j=1,2,3}$ , онак  $T$  означает транспонирование. Используя кубатурные формулы Гаусса [8], отсюда получим:

$$a_{ij}^k = \mu(|\vec{H}(\hat{x}_k)|) \sum_{l=1}^{N_G} g(\xi_l) p_l,$$

где  $p_l$  - весовые коэффициенты.

Для вычисления поверхностных интегралов в правой части уравнения (13) используется та же техника, т.е. изопараметрическое преобразование выпуклого четырехугольника в квадрат  $[-1, 1]^2$  и кубатурные формулы Гаусса.

Вычисление элементных матриц по бесконечным элементам проводится аналогично [5].

## 2 Методы, используемые в программе

### 2.1 Вычисление поля и потенциала от обмотки

Вектор  $\vec{H}_S$  вычисляется по закону Био-Савара (7). Этот интеграл вычисляется при помощи суммирования вкладов от отдельных элементов, на которые разбивается область  $\Omega_S$ , занимаемая обмоткой. В качестве элементов берутся произвольные выпуклые шестигранники, в частности, прямые призмы с произвольными выпуклыми четырехугольниками в основаниях или прямоугольные параллелепипеды. При вычислении интеграла по произвольному выпуклому шестиграннику используются кубатуры Гаусса, по прямой призме - сначала используется формула Ньютона-Лейбница для сведения к интегрированию по четырехугольникам, а затем кубатуры Гаусса. Интеграл по прямоугольному параллелепипеду вычисляется по аналитическим формулам.

Для нахождения потенциала  $\phi^S$  можно решать задачу для уравнения Лапласа внутри области ферромагнетиков  $\Omega_F$ :

$$\Delta \phi^S(x) = 0, \quad x \in \Omega_F \quad (14)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\partial \phi^S}{\partial n} = -\vec{n} \cdot \vec{H}_S, \quad x \in \Gamma. \quad (15)$$

Решение такой задачи существует и

$$-\nabla \phi^S = \vec{H}_S(x), \quad x \in \Omega_F. \quad (16)$$

Потенциал  $\phi^S$  находится с точностью до константы, но представление (16) единственно [4]. Если обратиться к примеру из параграфа 1, то вместо условия Неймана (15) на всей поверхности ферромагнетиков лучше задать смешанные условия:

$$\partial \phi^S / \partial n = -\vec{n} \cdot \vec{H}_S,$$

на поверхности, проходящей через линии DF и EG, и

$$\phi^S = 0,$$

на поверхности, проходящей через линию DE и

$$\phi^S = const,$$

на поверхности, проходящей через линию FG. Константа находится из закона полного тока. Для решения задачи (14),(15) используется метод конечных элементов и потенциал  $\phi^S$  находится из уравнения:

$$\sum_{z_j \in \Omega_P} \phi_j^S \int_{\Omega_P} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega = - \int_{\Gamma} N_i \vec{n} \cdot \vec{H}_S dS.$$

## 2.2 Метод решения нелинейной системы уравнений.

Дискретизация непрерывной задачи приводит к нелинейной системе уравнений с разреженной матрицей:

$$F(\mu)y = b, \quad \mu = \mu(y) \quad (17)$$

Алгоритм решения системы (17) выглядит следующим образом.

1. Задаются начальные значения магнитной проницаемости  $\mu_0$ , потенциала  $y_0$ , параметр  $\tau_0 = 1$ .

Для  $n = 0, 1, \dots$  выполняются следующие этапы:

2. Решить линейризованную систему

$$F(\mu_n)\tilde{y} = b.$$

3. Положить

$$y_{n+1} = \tau_n \tilde{y} + (1 - \tau_n) y_n.$$

4. Вычислить невязку  $b - F(\mu_n)y_{n+1}$ , проверить сходимость итерационного процесса; если сходимость не достигнута, то продолжить вычисления.

5. Вычислить  $\mu_{n+1} = \mu(y_{n+1})$ .

6. В зависимости от поведения нормы  $\mu_{n+1} - \mu_n$  задать параметр  $\tau_{n+1} \in (0, 1]$  и перейти на этап 2.

Как показывают результаты численных расчетов, введение параметра  $\tau_n \in (0, 1]$  существенно ускоряет сходимость нелинейного итерационного процесса, особенно на его последних итерациях. Приведем теоретическую оценку скорости сходимости процесса, вытекающую из общей теории итерационных методов решения нелинейных уравнений [9]. Если  $\tau_n = \tau_0(1 - \alpha\rho)$  и  $y_0$  принадлежит некоторой окрестности точного решения нелинейной системы  $y^*$ , то справедливо неравенство

$$\|y_n - y^*\|_2 \leq \rho^n \|y_0 - y^*\|_2,$$

где  $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$ . Константа  $\rho$  определяется из следующих формул:

$$\rho = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma}, \quad \sigma = \frac{1 - \alpha \gamma_1}{1 + \alpha \gamma_2},$$

$$\alpha = \frac{\gamma_3}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 + \gamma_3^2}}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}.$$

Здесь постоянные  $\gamma_i, i = 1, 2, 3$  задаются неравенствами

$$\gamma_1 \leq C_n \leq \gamma_2,$$

$$\|0.5 * (C_n - C_n^T)y\|_2 \leq \gamma_3 \|y\|_2,$$

где  $C_n = F_n^{-1} F'(y_n)$ ,  $F'(y)$  - матрица Якоби.

На каждой нелинейной итерации алгоритма решается линейризованная система уравнений с разреженной матрицей:

$$F_n x = b. \quad (18)$$

Для быстрого решения системы на векторных и параллельно-векторных ЭВМ в этой версии программы есть возможность использования векторных алгоритмов [3], основанных на методе неполного разложения Холецкого с сопряженными градиентами [10].

Пусть  $F_n = \{f_{ij}\}_{i,j=1,N}$ , матрица  $M = \tilde{U}^T \hat{D} \tilde{U}$ , где  $\hat{D} = \{\hat{d}_i\}_{i=1,N}$  - диагональная матрица,  $\tilde{U} = \{\tilde{u}_{ij}\}_{i,j=1,N}$  - верхнетреугольная. Вычисление элементов матриц  $\hat{D}$  и  $\tilde{U}$  проводится по формулам

$$\text{для } i \text{ от } 1 \text{ до } N : \quad \hat{d}_i = f_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{u}_{ki}^2 \hat{d}_k$$

$$\text{для } j \text{ от } i+1 \text{ до } N : \left\{ \begin{array}{l} \text{если } f_{ij} = 0, \text{ то } \tilde{u}_{ij} = 0; \\ \text{иначе } \tilde{u}_{ij} = (f_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} \tilde{u}_{ki} \hat{d}_k \tilde{u}_{kj}) / \hat{d}_i. \end{array} \right.$$

Тогда для скорости сходимости метода неполного разложения Холецкого с сопряженными градиентами справедлива оценка [11]:

$$\|x_k - x^*\| \leq 2\sqrt{\kappa\eta^k} \|x_0 - x^*\|,$$



где  $x_0$  - некоторое начальное приближение, а  $x^*$  - точное решение системы (18),  $\eta = (\sqrt{\kappa} - 1)/(\sqrt{\kappa} + 1)$  и

$$\kappa = \lambda_{\max}(M^{-1}F_n)/\lambda_{\min}(M^{-1}F_n)$$

- число обусловленности преобусловленной системы.

Сходимость итерационного процесса по  $\mu$  контролируется числом  $\epsilon_1$ :

$$\frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \left| \frac{\mu_j^{n+1} - \mu_j^n}{\mu_j^{n+1}} \right| \leq \epsilon_1,$$

где  $N_e$  - число элементов в  $\Omega_F$ .

Итерационный процесс во втором пункте алгоритма заканчивается, как только выполняется неравенство

$$\|F(\mu_n)\bar{y} - b\|_2^2 / \|\bar{y}\|_2^2 \leq \epsilon_2.$$

### 3 Краткое описание программы MSFE3D

#### 3.1 Организация программы

Как правило, решение задачи по программе MSFE3D проводится в четыре этапа:

- 1) вычисление поля от обмоток  $\vec{H}_S$  и потенциала  $\phi^S$ ;
- 2) генерация структуры матрицы для заданной геометрии;
- 3) решение нелинейной системы уравнений;
- 4) вычисление компонент поля, вывод результатов.

После каждого этапа возможен сброс необходимой информации в файлы на диск. Она может быть использована для работы программы на следующих шагах. Возможно также отдельное выполнение каждого этапа.

Для работы программы на первом шаге задается конфигурация обмотки. С этой целью вся обмотка либо ее часть (с учетом симметрии) разбивается на суперэлементы, координаты вершин которых задаются в определенном порядке во входном файле. Здесь же определяется тип суперэлементов. Они могут быть произвольные выпуклые шестигранники, прямые призмы с выпуклыми четырехугольниками в основаниях или прямоугольные параллелепипеды. Может быть задана также вращательная симметрия для суперэлементов, число разбиений по направлениям

осей координат и направление тока в каждом из суперэлементов. Задаются также плотность тока.

Для решения задачи определения потенциала  $\phi^S$  область ферромагнетиков  $\Omega_F$  также разбивается на суперэлементы, задаются координаты их вершин, число разбиений по направлениям осей координат, код материала, граничные условия для суперэлементов. Задаются также параметры итерационного процесса: максимальное число линейных итераций и точность решения. Результат работы программы на первом шаге можно записать на диск в файл ICFI.

На втором шаге требуется информация о геометрии всей расчетной области. В этом случае данные задаются так же, как и на первом шаге для определения  $\phi^S$ , добавляется только информация о суперэлементах в воздухе и условия на границах между  $\Omega_F$  и  $\Omega_A$ . Сгенерированная структура матрицы записывается в файл ICR.

Программа MSFE3D имеет несколько встроенных таблиц для магнитной проницаемости, есть возможность ввести и другие зависимости.

На третьем шаге требуется задание следующих параметров: максимального числа нелинейных и линейных итераций, точность решения. Программа осуществляет сборку элементных матриц для элементов, зависящих от  $\mu(|\vec{H}|)$ , на каждой нелинейной итерации. Полученное решение нелинейной системы записывается в файл IFEM. Необходимо отметить, что на этом шаге можно сбросить в этот файл промежуточное решение, а затем в другом режиме продолжить итерации, используя эту информацию.

На четвертом шаге вычисляются компоненты поля в указанных областях. Результат записывается в файл OUT.

Существует также несколько программ для обработки полученной информации. С их помощью можно выделить данные в интересующих точках, провести интерполяцию, а также переформатирование для построения графиков с помощью графических пакетов программ.

#### 3.2 Примеры расчетов

На рис.2. представлен пример магнитной системы, для которой требовалось определить магнитное поле внутри ферромагнетика. Ввиду симметрии магнитной системы задача решалась в 1/16 части пространства. На рис.3 представлен пример нерегулярного разбиения на суперэлементы сечения расчетной области в плоскости XOY. На рис.4,5 изображены полученные в результате расчета  $B_y$  и  $B_z$  компоненты поля в ферромагнетике при  $z = 12$  мм, стрелками указаны границы обмотки, которая вплотную прилегала к ферромагнетiku. Максимальное значение

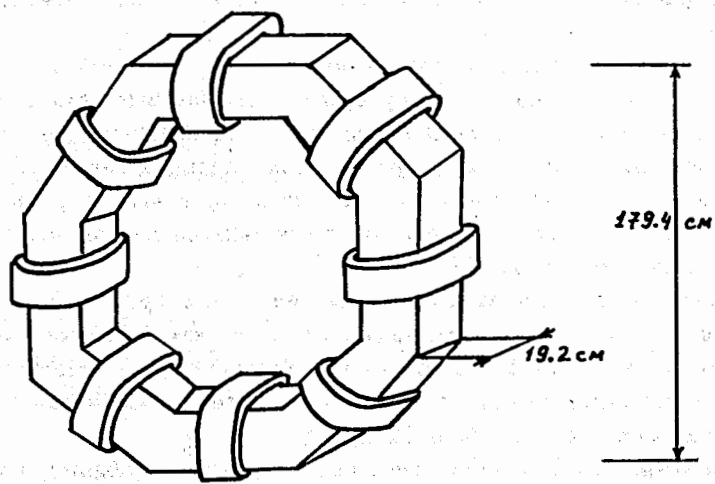


Рис. 2. Магнитная система в виде тороида

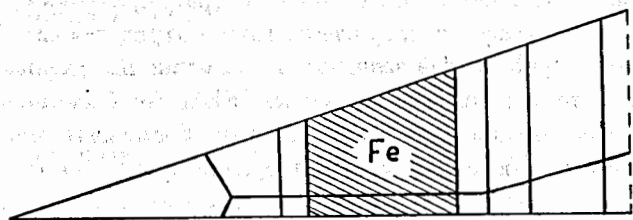


Рис. 3. Пример разбиения расчетной области на суперэлементы (сечение в плоскости XOY)

основной компоненты поля внутри ферромагнетика - 1,8 Тл. Расчет проводился на ЭВМ ЕС-1037 для сетки, содержащей 16700 узлов.

В настоящее время программа MSFE3D адаптирована также на векторной ЭВМ CONVEX C120. Для этого разработаны специальные алгоритмы [3]. Типичная нелинейная задача в 43000 неизвестных требует  $\approx 20$  нелинейных итераций. Подобная задача решалась, например, для спектрометрического магнита СП-40, общий вид которого представлен на рис.6. Для получения требуемого поля в центре магнита  $B_0 = 0,75$  Тл было сделано пять расчетов с целью определения необходимой силы тока. В результате величина силы тока составила  $I = 144308$  А. Распределение вычисленной основной относительной компоненты магнитного поля  $B_y/B_0(z)$  и сравнение с данными измерений показано на рис.7. При вычислениях использовалась сетка, состоящая из 51840 узлов. Сравнение

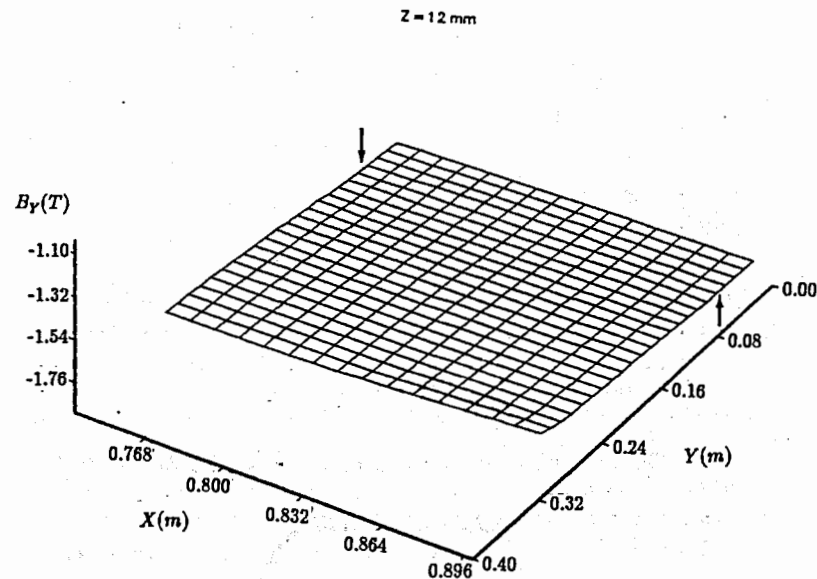


Рис. 4. Распределение основной компоненты поля  $B_y$  внутри ферромагнетика

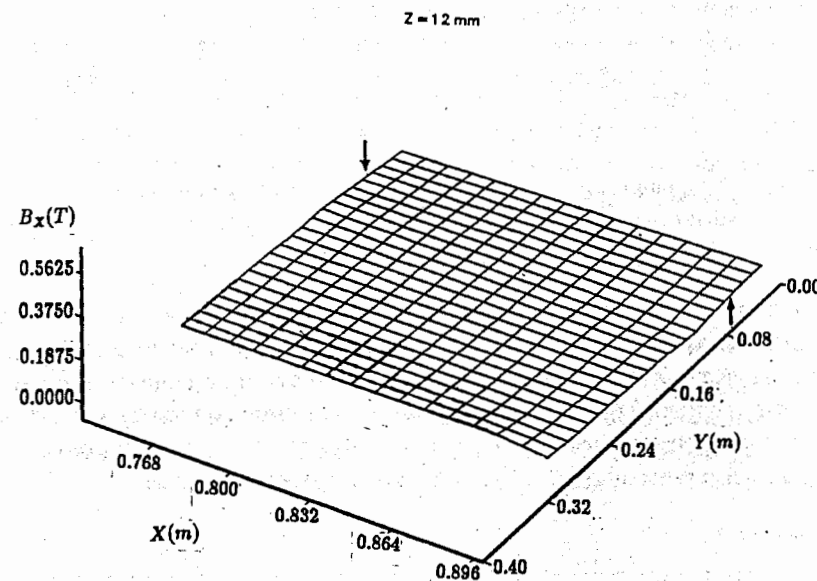


Рис. 5. Распределение компоненты поля  $B_x$  внутри ферромагнетика



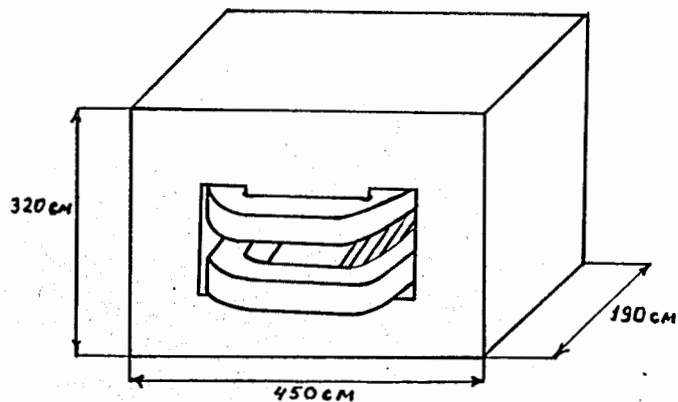


Рис. 6. Общий вид спектрометрического магнита СП-40

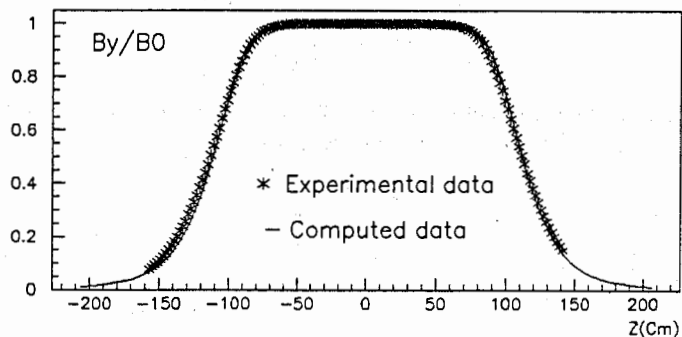


Рис. 7. Сравнение рассчитаной и экспериментальной основной компоненты поля  $B_y$  по отношению к  $B_0$  вдоль оси  $OZ$  при  $x=0$  см,  $y=1$  см.

расчетной и экспериментальных кривых показало, что в пределах длины магнита они совпадают с точностью  $\approx 10^{-3}$ . Более подробные результаты расчетов опубликованы в работе [4]. В таблице 1 продемонстрирован эффект использования векторных алгоритмов (метод 2) в сравнении с использованием последовательных алгоритмов, транспонированных с векторной оптимизацией (метод 1),  $N$ -число узлов сетки.

Таблица 1

N	Метод	Общее время решения нелинейной системы
42120	1	5 часов 5 минут
	2	2 часа 10 минут

## Заключение

Разработан комплекс программ MSFE3D, предназначенный для расчетов пространственных магнитоэстатических полей. Версия 1.2 этого комплекса имеет следующие возможности.

- Использование дифференциальной постановки задачи магнитоэстатике относительно общего (в ферромагнетике) и редуцированного (в воздухе) скалярных потенциалов позволяет проводить с достаточной точностью устойчивые к ошибкам округления вычисления магнитной индукции и напряженности поля не только в воздухе, но и в ферромагнетике.
- Использование для дискретизации задачи метода конечных элементов и выбор в качестве элементов разбиения ограниченной области произвольных выпуклых шестигранников позволяет проводить моделирование электромагнитных полей электрофизических установок с практически любой "разумной" геометрией.
- Введение в итерационную схему параметра  $\tau_n \in (0, 1]$  при решении нелинейной системы алгебраических уравнений и использование разработанных векторных алгоритмов позволяет проводить с достаточной точностью моделирование электромагнитных полей самого разного уровня не только на последовательных, но и, особенно эффективно, на векторных и параллельно-векторных ЭВМ.
- Использование бесконечных элементов для неограниченной области с необходимой точностью позволяет учитывать условие на бесконечности и вычислять значения магнитной индукции в удаленных от магнита точках пространства.

В настоящее время проводится работа по включению в программу базисных функций более высокого порядка.

Авторы выражают глубокую благодарность за поддержку и полезные обсуждения профессору Е.П.Жицкову. Авторы также благодарны А.В.Федорову за полезные обсуждения на начальной стадии работы по созданию версии 1.1, Р.С.Егикяну за помощь в освоении ИТЭХ'а, Российский фонд фундаментальных исследований за поддержку (грант N94-01-01354-а).

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Э.А.Айрян, Е.П.Жидков и др. Численные алгоритмы расчета магнитных систем ускорителей заряженных частиц. ЭЧАЯ, 1990, т.21, вып.1, с. 251-307.
2. П.Г.Акишин. Численное моделирование магнитостатических полей на ЭВМ. Авт. дис. ... доктора физ.-мат. наук:05.13.16. ОИЯИ, 11-93-145, Дубна, 1993.
3. Е.П.Жидков, М.Б.Юлдашева, О.И.Юлдашев. Векторные алгоритмы для решения трехмерных нелинейных задач магнитостатики. Препринт ОИЯИ, P11-94-161, Дубна, 1994.
4. Е.П.Жидков, М.Б.Юлдашева, И.П.Юдин, О.И.Юлдашев. Математическое моделирование пространственного магнитного поля спектротрического магнита СП-40. ОИЯИ, P11-94-160, Дубна, 1994.
5. О.Зенкевич, К.Морган. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986.
6. Г.И.Марчук, В.И.Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
7. А.Р.Митчелл, Р.Уэйт. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
8. И.П.Мысовских. Интерполяционные кубатурные формулы. М.: Наука, 1981.
9. А.А.Самарский, Е.С.Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. D.Kershaw. The incomplete Choleski-Conjugate Gradient Method for the iterative solution of systems of linear equations. J. Comp. Phys., v.26, p. 43-65, 1978.
11. Дж.Ортега. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем. М.: Мир, 1991.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 мая 1994 года.

P11-94-202

Юлдашева М.Б., Юлдашев О.И.  
Комплекс программ MSFE3D для расчетов  
пространственных магнитостатических полей. Версия 1.2

Разработан комплекс программ, предназначенный для расчетов пространственных магнитостатических полей. Характерными особенностями комплекса являются:

- дифференциальная формулировка задачи относительно общего и редуцированного скалярных потенциалов;
- метод конечных элементов для дискретизации задачи;
- ускоренный итерационный процесс для решения нелинейной системы уравнений;
- возможность использования специальных алгоритмов для быстрого решения линейаризованной системы уравнений с разреженной матрицей на векторных и параллельно-векторных ЭВМ;
- бесконечные элементы для более точного учета условия на бесконечности.

Приводятся оценки скорости сходимости итерационных процессов, краткое описание комплекса и примеры расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1994

Перевод авторов

P11-94-202

Yuldasheva M.B., Yuldashev O.I.  
The Program Complex MSFE3D for Computations  
of Three-Dimensional Magnetostatic Fields. Version 1.2

The program complex for computations of three-dimensional magnetostatic fields has been developed. The characteristic peculiarities of the complex are:

- differential formulation of the problem for total and reduced scalar potentials;
- finite element method for discretization of the problem;
- accelerated iterative process for solving system of the nonlinear equations;
- possibility of using special algorithms for fast solving linearized system of the equations with sparse matrix by vector and parallel-vector computers;
- infinite elements for more accurate consideration of the condition at infinity.

The rate of convergence of iterative process, brief description of the complex and examples of computations are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1994