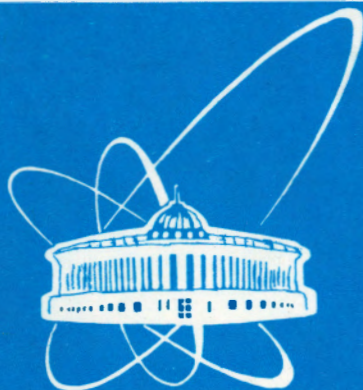


94-160



СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

P11-94-160

Е.П.Жидков, М.Б.Юлдашева, И.П.Юдин, О.И.Юлдашев

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
ПРОСТРАНСТВЕННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ  
СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКОГО МАГНИТА СП-40

1994

## Введение

Спектрометрический магнит СП-40 активно используется в экспериментальных установках для исследования распадных процессов заряженных частиц высоких энергий, в частности в установке ЭКСЧАРМ [1], важнейшим элементом которой он является.

В работе [2] проводились двумерные расчеты магнитного поля СП-40 с помощью программы POISCR [3], а также оптимизация конфигурации полюса в плоскости XOY. В этих расчетах для достижения требуемой величины магнитного поля в центре магнита  $B_0 = 0.75$  Тл задаваемая сила тока могла ожидать несколько заниженной.

Целью настоящей работы является математическое моделирование пространственного магнитного поля СП-40, сравнение рассчитанных данных с имеющимися экспериментальными данными, сравнение уровня и поведения поля, рассчитанного в двумерном и трехмерном приближении, исследование магнитного поля на торцах магнита.

В первом параграфе работы приводится математическая постановка задачи, формулируются свойства используемой математической модели.

Во втором параграфе приводятся численные алгоритмы решения задачи: получение системы нелинейных алгебраических уравнений и метод ее решения.

В третьем параграфе обсуждаются результаты численных расчетов. Показано, что в пределах длины магнита основная относительная компонента поля вдоль оси OZ по результатам измерений и по расчетам согласуется с точностью  $\approx 10^{-3}$ . Расчеты также показывают, что модули относительных компонент поля  $B_x/B_0$  и  $B_z/B_0$  на торцах магнита не превосходят 2,7 % и 4 % соответственно.

## 1. Математическая постановка задачи

Для нахождения распределения магнитного поля СП-40 использовалась дифференциальная формулировка задачи магнитоэластики относительно общего  $\psi$  и редуцированного  $\phi$  скалярных потенциалов в виде:

$$\operatorname{div}(\mu \nabla \psi) = 0, \quad x \in \Omega_F; \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \nabla \phi = 0, \quad x \in \Omega_A;$$

с условиями на границах:

$$\mu(\partial \psi / \partial n) = \partial \phi / \partial n + \vec{n} \cdot \vec{H}^s, \quad x \in \Gamma;$$

$$\psi = \phi + \phi^s, \quad x \in \Gamma; \quad (2)$$

$$\phi \approx 0, \quad x \in \Gamma_0,$$

где  $\Omega_F$  — область, занимаемая ферромагнетиком. Выберем некоторую область  $\Omega$ , внутри которой находится  $\Omega_F$ . Границу обозначим через  $\Gamma_0$ , а  $\Omega_A = \Omega / \Omega_F$ .  $\Gamma$  — граница между  $\Omega_F$  и  $\Omega_A$ .

Функция  $\mu = \mu(|\nabla\psi|)$  известна, причем  $1 \leq \mu_* \leq \mu \leq \mu^*$ , где  $\mu_*$  и  $\mu^*$  — определенные константы, а вектор  $\vec{H}^S$  и потенциал  $\phi^S$  вычисляются по некоторым формулам.

Вектора  $\vec{B}_1 = \mu \nabla\psi$ ,  $\vec{H}_1 = \nabla\psi$ ,  $\vec{B}_2 = \vec{H}_2 = \nabla\phi + \vec{H}^s$ ,  $\vec{B}_i, \vec{H}_i \in (L^2(\Omega))^3$ ,  $i = 1, 2$ , удовлетворяют неравенствам [4]:

$$|\Delta \vec{B}_i| \leq 2\mu^* |\Delta \vec{H}_i|, \quad (3)$$

$$\Delta \vec{B}_i \cdot \Delta \vec{H}_i \geq |\Delta \vec{H}_i|^2,$$

где  $\Delta \vec{B}_i = \vec{B}_i^{(1)} - \vec{B}_i^{(2)}$ ,  $\Delta \vec{H}_i = \vec{H}_i^{(1)} - \vec{H}_i^{(2)}$ ,  $i = 1, 2$ , верхние индексы 1 и 2 означают, что берутся два различных значения векторов.

Рассмотрим обобщенную формулировку задачи (1) - (2), предполагая, что границы  $\Gamma$  и  $\Gamma_0$  являются липшицевыми.

Пусть

$$\dot{W}_2^1(\Omega) = \{u : \int_{\Omega} u^2 d\Omega < \infty, \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\Omega < \infty, u|_{\Gamma} = 0\}$$

- пространство Соболева со скалярным произведением:

$$(u, v)_1 = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u, v \in \dot{W}_2^1(\Omega).$$

Обобщенным решением задачи (1)-(2) будем называть функцию  $U \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ , удовлетворяющую равенству:

$$\int_{\Omega} \mu(x, |\nabla U|) \nabla U \cdot \nabla v d\Omega = - \int_{\Gamma} v \vec{n} \cdot \vec{H}^S dS, \quad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega), \quad (4)$$

где

$$U = \begin{cases} \psi, & x \in \Omega_F, \\ \phi, & x \in \Omega_A, \end{cases} \quad \mu(x, |\nabla U|) = \begin{cases} 1, & x \in \Omega_A, \\ \mu(|\nabla U|), & x \in \Omega_F. \end{cases}$$

Определим оператор  $T$  следующим образом:

$$(TU, v)_1 = \int_{\Omega} \mu \nabla U \cdot \nabla v d\Omega, \quad v \in \dot{W}_2^1(\Omega),$$

тогда уравнение (4), в силу теоремы Рисса о представлении функционала в гильбертовом пространстве. [5], эквивалентно уравнению

$$TU = g.$$

### Замечание 1

Из неравенств (3) следует сильная монотонность с константой  $m = \mu_*$  и липшиц - непрерывность с константой  $M = 2\mu^*$  оператора  $T$ , действующего из пространства  $\dot{W}_2^1$  в  $\dot{W}_2^1$ . Эти свойства оператора  $T$  обеспечивают существование и единственность обобщенного решения задачи (4), а также сходимость метода последовательных приближений [5].

### Замечание 2

При использовании метода конечных элементов для дискретизации задачи (1) - (2) неравенства (3) обеспечивают существование конечно-элементных приближений и их сходимость к точному решению на основе теории сильно-монотонных операторов [5].

Приведем формулы для вычисления вектора  $\vec{H}^S$  и способ вычисления потенциала  $\phi^S$ . Вектор  $\vec{H}^S$  вычисляется по закону Био - Савара:

$$\vec{H}^S(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_S} \vec{J} \times \nabla \frac{1}{|x-y|} dy,$$

где  $\Omega_S$  - область, занимаемая обмоткой,  $\vec{J}$  - заданный вектор плотности тока,  $|x-y|$  - расстояние между точками  $x$  и  $y$ . Для нахождения потенциала  $\phi^S$  решается уравнение Лапласа внутри области  $\Omega_F$ :

$$\Delta \phi^S(x) = 0, \quad x \in \Omega_F \quad (5)$$

с краевыми условиями:

$$\frac{\partial \phi^S}{\partial n} = -\vec{n} \cdot \vec{H}^S, \quad x \in \Gamma. \quad (6)$$

Справедлива следующая лемма.

**Лемма**

Решение задачи (5) - (6) существует и

$$\nabla \phi^S = -\vec{H}^S(x) \quad \forall x \in \Omega_F.$$

Доказательство леммы основано на проверке условия

$$\int_{\Gamma} \vec{n} \cdot \vec{H}^S ds = 0,$$

которое обеспечивает разрешимость задачи Неймана с точностью до константы, а также - в проверке того факта, что  $\vec{H}^S \in U(\Omega_F)$ , где  $U(\Omega_F)$  - подпространство  $L_2(\Omega_F)^3$ :

$$U(\Omega_F) = \{\vec{u} \in L_2(\Omega_F)^3 : \nabla \cdot \vec{u} = 0, \nabla \times \vec{u} = 0\}.$$

Последнее условие гарантирует однозначное представление  $\vec{H}^S = -\nabla \phi^S$ .

## 2. Численное решение задачи

### 2.1. Дискретизация задачи

Дискретизация непрерывного дифференциального уравнения основывается на методе Галеркина [6]. В основе этого метода лежит использование слабой формулировки задачи, а также аппроксимация решения дифференциального уравнения конечной линейной комбинацией заданных базисных функций. Исходное уравнение для дискретизации задачи (1) - (2) методом Галеркина имеет вид:

$$\int_{\Omega_F} v \operatorname{div} \mu \nabla \psi d\Omega + \int_{\Omega_A} v \operatorname{div} \nabla \phi d\Omega = 0, \quad \forall v \in \dot{W}_2^1(\Omega). \quad (7)$$

В качестве конечных элементов  $\bar{\Omega}_j$  выберем выпуклые шестигранники. Разобьем область  $\Omega$  на конечные элементы так, чтобы  $\bar{\Omega} = \cup \bar{\Omega}_j$ ,  $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$ , когда  $i \neq j$ , предполагая также, что каждая грань элемента  $\bar{\Omega}_j$  является либо подмножеством  $\Gamma_0$ , либо является гранью другого элемента, а граница  $\Gamma$  составлена из граней выбранных элементов.

В центре каждого такого элемента  $\mu$  считается постоянной. Под центром элемента понимается точка, каждая координата которой является средним арифметическим координат вершин шестигранника. В качестве базисных функций  $N_i$  на каждом элементе выберем функции, получающиеся при линейном отображении куба  $[-1, 1]^3$  на этот элемент [7]. Неизвестные функции будем искать в виде:

$$\psi(x) = \sum_j \psi_j N_i(x), \quad x \in \bar{\Omega}_F;$$

$$\phi(x) = \sum_j \phi_j N_j(x), \quad x \in \bar{\Omega}_A;$$

$$\phi^S(x) = \sum_j \phi_j^S N_j(x), \quad x \in \bar{\Omega}_F;$$

где через  $\psi_j, \phi_j, \phi_j^S$  - обозначены неизвестные значения потенциалов в узлах сетки  $x_j$ , полученной в результате разбиения области  $\Omega$  на конечные элементы.

В результате преобразований и учета граничных условий (2) из уравнения (7) получим:

$$\sum_{z_j \in \bar{\Omega}_F} \psi_j \int_{\Omega_F} \mu \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega + \sum_{z_j \in \Gamma} \psi_j \int_{\Omega_A} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega + \sum_{z_j \in \Omega_A} \phi_j \int_{\Omega_A} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega = (8)$$

$$- \int_{\Gamma} N_i \vec{n} \cdot \vec{H}^S dS + \sum_{z_j \in \Gamma} \phi_j^S \int_{\Omega_A} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega.$$

Потенциал  $\phi^S$  находится из уравнения:

$$\sum_{x_j \in \bar{\Omega}_F} \phi_j^S \int_{\Omega_F} \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega = - \int_{\Gamma} N_i \vec{n} \cdot \vec{H}^S dS . \quad (9)$$

Интегралы по областям  $\Omega_F, \Omega_A$ , входящие в (8) - (9), вычисляются суммированием вкладов отдельных элементов  $\bar{\Omega}_j$ .

### Замечание 3

Отметим, что уравнение (9) не обязательно решать во всей области  $\Omega_F$ . Согласно лемме,  $\nabla \phi^S \in U(\Omega_F)$  и значит  $\nabla \phi^S \perp \nabla N_i$ , если  $\nabla N_i \in G_0(\Omega_F)$ .  
Здесь

$$G_0(\Omega_F) = \{ \nabla \phi \in L_2(\Omega_F)^3 : \phi|_{\Gamma} = 0 \} .$$

Следовательно, уравнение (9) достаточно решать в некотором приграничном объеме, где базисные функции  $N_i$  не имеют нулевых значений на границе этого объема. При этом следует доопределить граничные условия на внутренней части приграничного объема.

## 2.2. Метод решения нелинейной системы

Запишем дискретизованную систему уравнений в виде:

$$A(\mu)y = b, \quad \mu = \mu(y) . \quad (10)$$

Алгоритм решения системы (10) выглядит следующим образом:

1. Задаются начальные значения магнитной проницаемости  $\mu_0$ , потенциала  $y_0$  и параметра  $\tau_0$ ;

Для  $n = 0, 1, \dots$  выполняются следующие этапы:

2. Решить линеаризованную систему

$$A(\mu_n)\tilde{y} = b .$$

3. Положить

$$y_{n+1} = \tau_n \tilde{y} + (1 - \tau_n) y_n .$$

4. Вычислить невязку  $b - A(\mu_n)y_{n+1}$ , проверить сходимость итерационного процесса; если сходимость не достигнута, то продолжить вычисления.
5. Вычислить  $\mu_{n+1} = \mu(y_{n+1})$  .
6. В зависимости от поведения нормы  $\mu_{n+1} - \mu_n$  задать параметр  $\tau_{n+1}$  и перейти на этап 2.

Сходимость итерационного процесса по  $\mu$  контролируется числом  $\epsilon_1$ :

$$\frac{1}{N_e} \sum_{j=1}^{N_e} \left| \frac{\mu_j^{n+1} - \mu_j^n}{\mu_j^{n+1}} \right| \leq \epsilon_1,$$

где  $N_e$  - число элементов в  $\Omega_F$ .

В пункте 2 решается система линейных уравнений при постоянном  $\mu$  методом неполного разложения Холецкого с сопряженными градиентами [8]. Итерационный процесс заканчивается, как только выполняется неравенство:

$$\|A(\mu_n)\tilde{y} - b\|_2^2 / \|\tilde{y}\|_2^2 \leq \epsilon_2,$$

где для некоторого вектора  $x$ :  $\|x\|_2^2 = \sum_{i=1}^N x_i^2$ .

#### Замечание 4

Использование параметра  $\tau_n \neq 1$  в наших расчетах существенно сокращало число нелинейных итераций. Общая теория решения нелинейных систем уравнений с симметричными положительно-определенными матрицами изложена в [9].

### 3. Результаты численного расчета

Вышеописанная методика реализована в конечно-элементной программе MSFE3D. С помощью этой программы были проведены расчеты пространственного поля СП-40 на векторной ЭВМ CONVEX C120. На рис. 1,2 показаны общий вид и расчетная конфигурация магнита СП-40. На рис. 3 представлена зависимость магнитной проницаемости от модуля вектора  $\vec{B}$  для электротехнической стали.

Для того чтобы оценить точность рассчитанного поля сначала нами было проведено моделирование в двумерном приближении. Задавая обмотку и ферромагнитный сердечник достаточно большой длины, с помощью программы MSFE3D можно подобрать сетку в плоскости XOY, обеспечивающую с высокой точностью согласование результатов расчета с двумерными расчетами. Далее предположим, что на плоскости XOY и всех используемых в расчетах плоскостях, параллельных плоскости XOY, выбраны сетки, которые обеспечивают достаточно высокую точность. В этих предположениях были выполнены исследования сходимости приближенного решения по оси OZ. Расчеты проводились на нескольких пространственных сетках. Представим вектора  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$ , полученные в результате решения задачи, соответственно на первой и второй сетке в виде:

$$\vec{B}_1 = P_1 \vec{B}^* + P_1 \delta(h_1^{(1)}, h_2^{(1)}, \dots, h_m^{(1)}),$$

$$\vec{B}_2 = P_2 \vec{B}^* + P_2 \vec{\delta}(h_1^{(2)}, h_2^{(2)}, \dots, h_m^{(2)}),$$

где  $P_1$  и  $P_2$  - операторы, проектирующие непрерывные вектор-функции на первую и вторую сетки;  $\vec{\delta}$  - вектор-функция ошибки,  $h_1, \dots, h_m$  - характерные размеры квазиравномерного разбиения этих двух сеток в направлении оси  $OZ$ . Это означает, что область в этом направлении разбивается на  $m - 1$  элементов, в каждом из которых проводится разбиение с шагом  $h_i, i = 1, 2, \dots, m$ .

Предположим, что выполняется приближенное соотношение:

$$\vec{\delta}(h_1, \dots, h_m) \approx \vec{C}_1 h + O(h^2),$$

$$h = \left( \sum_{k=1}^m h_k \right) / m.$$

Тогда для главного члена погрешности имеем приближенные оценки на первой и второй сетках:

$$(\vec{B}_1 - P_1 \vec{B}_2) \frac{h^{(1)}}{h^{(1)} - h^{(2)}} \approx P_1 \vec{C}_1 h^{(1)}$$

$$(P_2 \vec{B}_1 - \vec{B}_2) \frac{h^{(2)}}{h^{(1)} - h^{(2)}} \approx P_2 \vec{C}_1 h^{(2)}$$

Расчеты показывают, что уже для двух сеток в 32000 и 42800 узлов оценка для главного члена погрешности не превосходит  $6 \cdot 10^{-3}$ .

Сравнение расчетных (42800 узлов) и экспериментальных кривых для основной компоненты магнитного поля  $B_y(z)/B_0$ , где  $B_0 = 0.75$  Тл - требуемая величина поля в центре магнита, показало (рис. 4.), что в пределах длины магнита они совпадают с точностью  $\approx 10^{-3}$ . При этом сила тока составила  $I = 144308$  А. На рис. 5,6 представлены расчетные и экспериментальные данные для основной относительной компоненты поля при  $x = 0$  см,  $y = 15$  см, и  $x = 0$  см,  $y = 19$  см соответственно.

На рис. 7-9 изображены компоненты поля на торцах магнита. Расчеты показывают, что модули относительных компонент поля  $B_x/B_0$  и  $B_z/B_0$  на торцах магнита не превосходят 2,7 % и 4 % соответственно.

В заключение авторы выражают благодарность В.Э.Файну и Т.А.Стриж за помощь в освоении системы программ PAW [10]. Авторы Е.П.Жидков и О.И.Юлдашев благодарят Российский Фонд Фундаментальных Исследований (грант N94-01-01354-а) за поддержку.



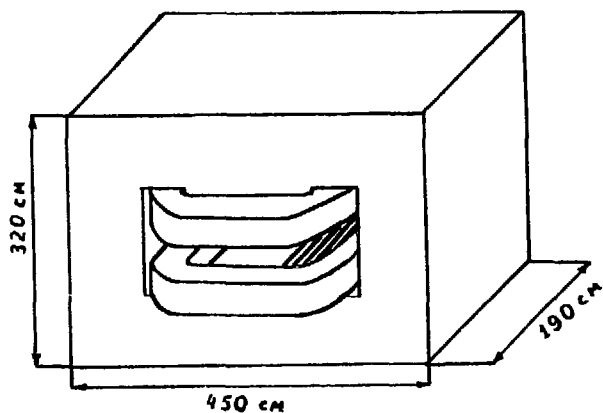


Рис. 1. Общий вид спектрометрического магнита СП-40

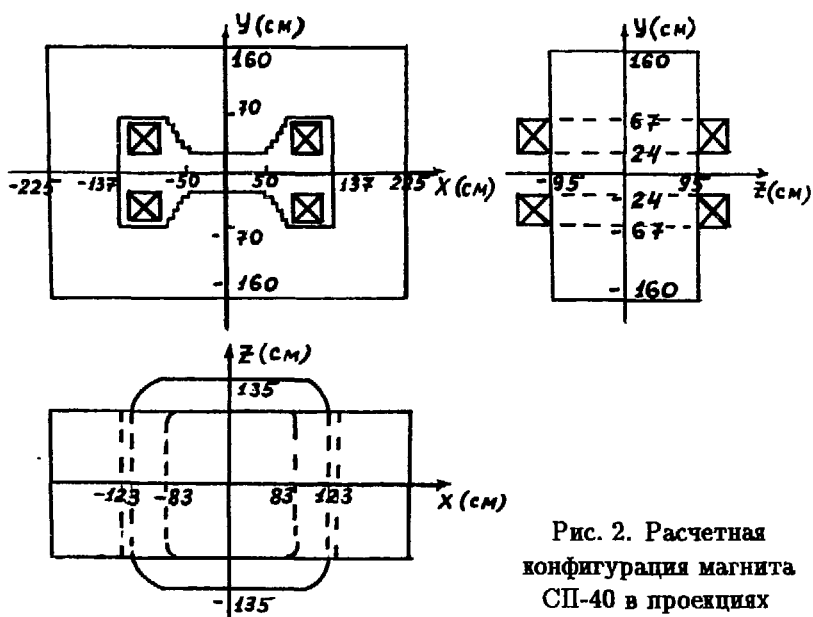


Рис. 2. Расчетная конфигурация магнита СП-40 в проекциях

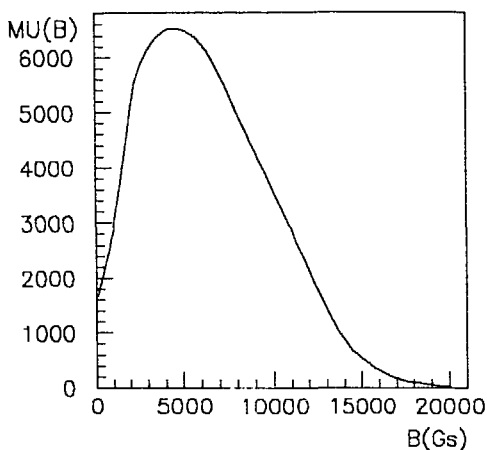


Рис. 3. Зависимость  $\mu(|\vec{B}|)$  для электротехнической стали

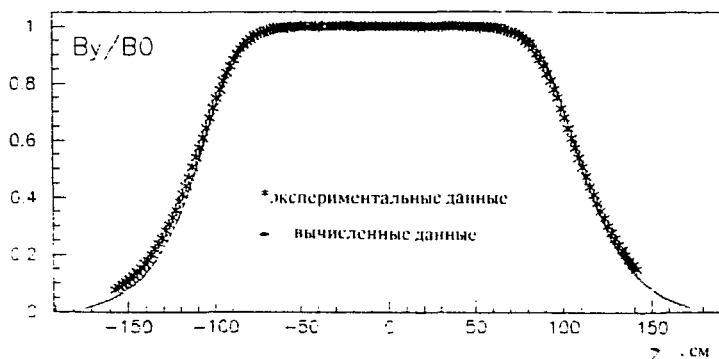


Рис. 4. Сравнение рассчитанной и экспериментальной компоненты поля  $B_y$  по отношению к  $B_0$  вдоль оси OZ при  $x=0$  см,  $y=1$  см

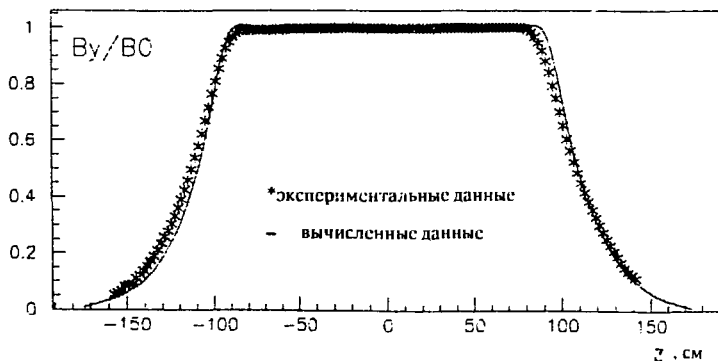


Рис. 5. Сравнение рассчитанной и экспериментальной компоненты поля  $B_y$  по отношению к  $B_0$  вдоль оси OZ при  $x=0$  см,  $y=15$  см

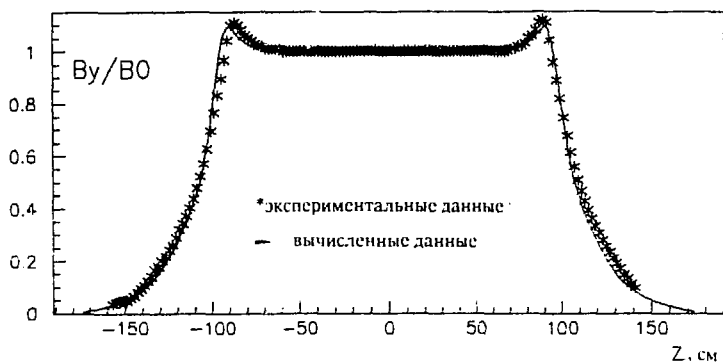


Рис. 6. Сравнение рассчитанной и экспериментальной компоненты поля  $B_y$  по отношению к  $B_0$  вдоль оси  $OZ$  при  $x=0$  см,  $y=19$  см

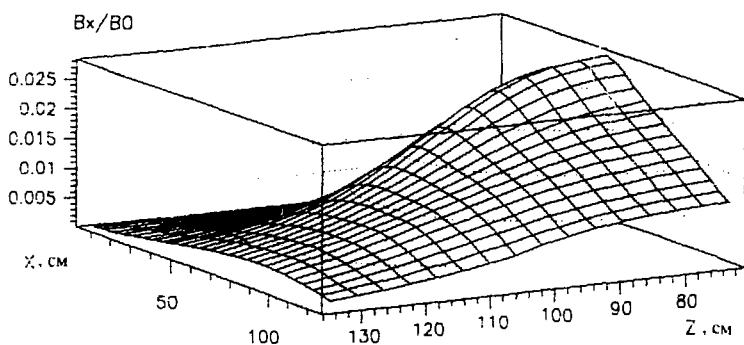


Рис. 7. Относительная компонента поля  $B_x/B_0$  на торце магнита

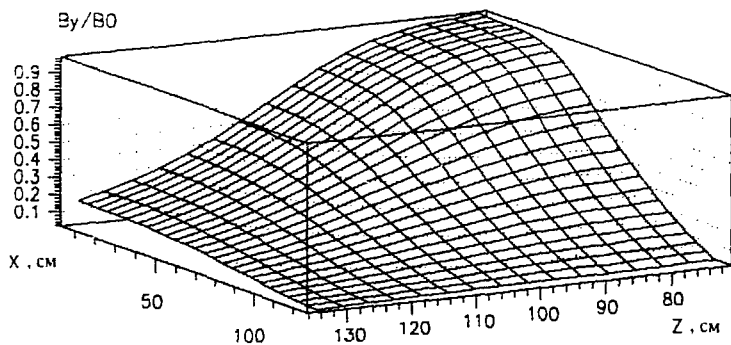


Рис. 8. Относительная компонента поля  $B_y/B_0$  на торце магнита

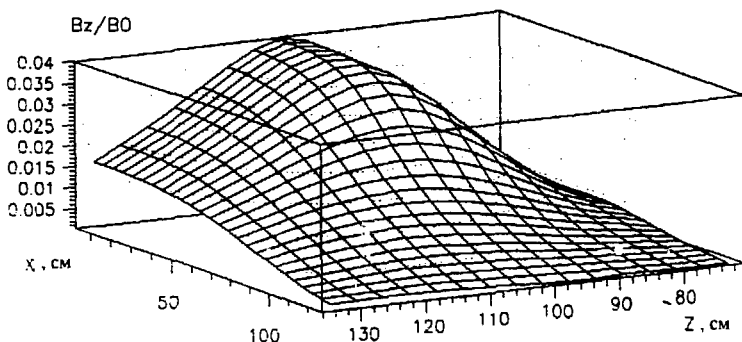


Рис. 9. Относительная компонента поля  $B_z/B_0$  на торце магнита

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Г.Айхнер и другие. Бесфильмовый спектрометр Бис-2 и его физические характеристики. ОИЯИ, Р1-80-644, Дубна, 1980.
2. Е.П.Жидков, С.Лима, Р.В.Полякова, И.П.Юдин. Математическое моделирование некоторых модификаций спектрометрического магнита СП-40. ОИЯИ Р11-92-490, Дубна, 1992.
3. R.F.Holsinger, Chr.Iselin, The CERN-POISSON program package (POISCR) user guide. CERN program library, CERN, 1987.
4. S.J.Polak, A.Wachters, A.de Beer. Proc. 1-st Computmag Conf., Oxford, 1976, p.19-27.
5. Х.Гаевский, К.Грегер, К.Захарнас. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978.
6. Г.И.Марчук, В.И.Агошков. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.
7. А.Р.Митчелл, Р.Уэйт. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981.
8. D.Kershaw. The incomplete Choleski-Conjugate Gradient Method for the iterative solution of systems of linear equations. J. Comp. Phys., v.26, p.43-65, 1978.

9. А.А. Самарский, Е.С. Николаев. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
10. О.Г. Смирнова, Т.А. Стриж, В.Э. Файн. Использование системы PAW в MSDOS. ОИЯИ Р11-92-416, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел  
5 мая 1994 года.