сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-93-91

П.Г.Акишин

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РАСЧЕТА ТОРОИДАЛЬНЫХ МАГНИТОВ

1993

§ I. Постановка задачи

Пусть $\bar{B},\bar{H},\bar{M}$ есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля. Имеет место следующее уравнение

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{J}(\bar{a}) + \nabla_{\bar{a}}\, \varphi(a) , \tag{I.I}$$

$$\varphi(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_G (\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\, dV_{\bar{x}} ,$$

где $J(\bar{a})$ – поле от токовых обмоток, G–область заполненная ферромагнетиком.

Поле $\bar{J}(\bar{a})$ определяется по закону Био–Саварра

$$\bar{J}(\bar{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega_1} \left[\bar{j}(\bar{x}) \times \nabla_a \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|} \right] dV_{\bar{x}} ,$$

где Ω_I – область токовых обмоток, $\bar{j}(x)$ –плотность тока в т. $\bar{x}$.

Величины $\bar{B},\bar{H},\bar{M}$ удовлетворяют следующим нелинейным соотношениям:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu_o \mu\ (|\bar{B}(\bar{a})|)} , \tag{I.2}$$

$$\bar{M}(\bar{a}) = \frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu_o} - \bar{H}(\bar{a}) ,$$

где μ_o – магнитная проницаемость вакуума, μ – магнитная проницаемость.

В дальнейшем будем предполагать, что область G получается вращением некоторой двумерной области $\hat{G}$, лежащей в плоскости (r,z), вокруг оси O_z .

Рассмотрим уравнение (I.I) в цилиндрической системе координат (r,z,φ). Пусть $\bar{x}$ есть $\bar{x}=\bar{x}(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}},\varphi_{\bar{x}})$, $\bar{a}=\bar{a}(r_{\bar{a}},z_{\bar{a}},\varphi_{\bar{a}})$.

Выберем специальный вид векторных функций $\bar{M}(x)$:

$$\bar{M}(\bar{x}) = \bar{M}_o(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}}) ,$$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \bar{M}_k^C(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}}) \cos k\varphi , \quad k=1,2,3,\ldots , \tag{I.3}$$

$$M(\bar{x}) = \bar{M}_k^S(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}}) \sin k\varphi , \quad k=1,2,3,\ldots$$

Рассмотрим интегральный оператор $\nabla\varphi$ из (I.I) на функциях из (I.3) для $\varphi_{\bar{a}}=0$. Введем следующие операторы $[A_o]$, $[A_k^C]$, $[A_k^S]$:

$$[A_o]\bar{M} = \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left\{ \iint_{\hat{G}} (\bar{M}(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|})\, r_{\bar{x}}\, dr_{\bar{x}}\, dz\, d\varphi_{\bar{x}} \right\} /_{\varphi_{\bar{a}}=0} ,$$

$$[A_k^C]\bar{M} = \frac{\nabla_{\bar{a}}}{4\pi} \left\{ \iint_{\hat{G}} (\bar{M}(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) \cos(k\varphi_{\bar{x}})\, r_{\bar{x}}\, dr_{\bar{x}}\, dz_{\bar{x}}\, d\varphi_{\bar{x}} \right\} /_{\varphi_{\bar{a}}=0} , \tag{I.4}$$

$$[A_k^S]\bar{M} = \frac{\nabla_a}{4\pi} \left\{ \iint_{\hat{G}} (\bar{M}(r_{\bar{x}},z_{\bar{x}}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}) \sin(k\varphi_{\bar{x}})\, r_{\bar{x}}\, dr_{\bar{x}}\, dz_{\bar{x}}\, d\varphi_{\bar{x}} \right\} /_{\varphi_{\bar{a}}=0} .$$

Обозначим $[D_o]$, $[D_k^C]$, $[D_k^S]$ операторы, идентичные $[A_o]$, $[A_k^C]$, $[A_k^S]$ и отличающиеся от них только тем, что $\varphi_{\bar{a}}$ –произвольное. Пусть $[U(\varphi_{\bar{a}})]$ – оператор поворота на угол $\varphi_{\bar{a}}$ вокруг оси Oz Имеют место следующие соотношения:

$$[D_o]\bar{M} = [U(\varphi_{\bar{a}})][A_o][U(\varphi_{\bar{a}})]^T \bar{M} ,$$

$$[D_k^C]\bar{M} = [U(\varphi_{\bar{a}})] \left([A_k^C]\cos(k\varphi_{\bar{a}}) - [A_k^S]\sin(k\varphi_{\bar{a}}) \right) [U(\varphi_{\bar{a}})]^T \bar{M} , \tag{I.5}$$

$$[D_k^S]\bar{M} = [U(\varphi_{\bar{a}})] \left([A_k^C]\sin(k\varphi_{\bar{a}}) + [A_k^S]\cos(k\varphi_{\bar{a}}) \right) [U(\varphi_{\bar{a}})]^T \bar{M} .$$

Представим величины $[U(\varphi_{\bar{a}})]^T\bar{B}(\bar{a})$, $[U(\varphi_{\bar{a}})]^T\bar{H}(\bar{a})$, $[U(\varphi_{\bar{a}})]^T\bar{M}(\bar{a})$, $[U(\varphi_{\bar{a}})]^T\bar{J}(\bar{a})$ рядом Фурье по угловой переменной $\varphi_{\bar{a}}$:

$$[U(\varphi_{\bar{a}})]^T\bar{B}(\bar{a}) = 0.5\bar{B}_o(r_{\bar{a}},z_{\bar{a}}) + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{B}_k^C(r_{\bar{a}},z_{\bar{a}})\cos(k\varphi_{\bar{a}}) + \bar{B}_k^S(r_{\bar{a}},z_{\bar{a}})\sin(k\varphi_{\bar{a}})) ,$$

$$\left[U(\varphi_{\bar a})\right]^T\bar H(\bar a)=0.5\bar H_o(r_{\bar a},z_{\bar a})+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar H_k^c(r_{\bar a},z_{\bar a})\operatorname{Cos}(k\varphi_{\bar a})+\bar H_k^s(r_{\bar a},z_{\bar a})\operatorname{Sin}(k\varphi_{\bar a})),$$

$$\left[U(\varphi_{\bar a})\right]^T\bar M(\bar a)=0.5\bar M_o(r_{\bar a},z_{\bar a})+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar M_k^c(r_{\bar a},z_{\bar a})\operatorname{Cos}(k\varphi_{\bar a})+\bar M_k^s(r_{\bar a},z_{\bar a})\operatorname{Sin}(k\varphi_{\bar a})), \tag{I.6}$$

$$\left[U(\varphi_{\bar a})\right]^T\bar J(\bar a)=0.5\bar J_o(r_{\bar a},z_{\bar a})+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar J_k^c(r_{\bar a},z_{\bar a})\operatorname{Cos}(k\varphi_{\bar a})+\bar J_k^s(r_{\bar a},z_{\bar a})\operatorname{Sin}(k\varphi_{\bar a})).$$

Учитывая ортогональность функций $\{\operatorname{Sin}k\varphi, \operatorname{Cos}k\varphi\}$ на отрезке $[0,2\pi]$ из (I.I), (I.4)-(I.6), получаем следующую систему уравнений

$$\bar H_o=\bar J_o+[A_o]M_o,$$

$$\bar H_k^c=\bar J_k^c+[A_k^c]\bar M_k^c+[A_k^s]\bar M_k^s, \tag{I.7}$$

$$\bar H_k^s=\bar J_k^s+[A_k^c]\bar M_k^s-[A_k^s]\bar M_k^c, \qquad k=1,2,3,\ldots$$

Из (I.2) следует

$$\bar B_o=\mu_o(\bar J_o+\bar M_o+[A_o]\bar M_o),$$

$$\bar B_k^c=\mu_o(\bar J_k^c+\bar M_k^c+[A_k^c]\bar M_k^c+[A_k^s]\bar M_k^s), \tag{I.8}$$

$$\bar B_k^s=\mu_o(\bar J_k^s+\bar M_k^s+[A_k^c]\bar M_k^s-[A_k^s]\bar M_k^c), \quad k=1,2,3,\ldots$$

Таким образом, исходная трехмерная задача сводится к бесконечной системе двумерных задач относительно гармоник магнитного поля.

§ 2. Существование и единственность решения вспомогательных краевых задач

Целью дальнейшего изложения является доказательство теорем существования и единственности решения задачи магнитостатики. В качестве основного инструмента будут использоваться свойства пространств С.Л.Соболева и идеи, развитые им для доказательства существования и единственности решения задачи Дирихле /2/. Сформулирует вспомогательные краевые задачи. Пусть G есть односвязная область в R^3 с гладкой границей. Рассмотрим дифференцируемую вектор-функцию $\bar M(\bar x)$, заданную на G. Дополнительно будем предполагать, что $\int_G|\bar M(\bar x)|^2dv_x<\infty$.

Сформулируем задачу А.

Задача А.

Рассмотрим $\varphi(\bar x)$, удовлетворяющую следующим уравнениям:

$$\Delta_{\bar x}\varphi(\bar x)+\operatorname{div}_{\bar x}(\bar M(\bar x))=0, \quad x\in \operatorname{Int}G, \tag{2.I}$$

$$\Delta_{\bar x}\varphi(\bar x)=0, \quad \bar x\in R^3\setminus G. \tag{2.2}$$

Нормальная производная на границе области DG терпит разрыв

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}-\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}=(\bar M,\bar n), \tag{2.3}$$

где $\frac{\partial\varphi}{\partial n^-}$ – предел нормальной производной φ снаружи области G, а $\frac{\partial\varphi}{\partial n^+}$ – предел нормальной производной изнутри области G. На поведение $\varphi(\bar x)$ на бесконечности накладывается следующее условие:

$$|\varphi(\bar x)|\le\frac{C_1}{|\bar x|^2}, \qquad |\nabla\varphi(\bar x)|\le\frac{C_2}{|\bar x|^3}, \tag{2.4}$$

когда $|\bar x|$ больше некоторого значения R_{max}. Потенциал $\varphi(\bar x)$ из (I.I) есть решение задачи А.

Рассмотрим бесконечную последовательность расширяющихся шаров $\{S_\ell\}$ с центром в некоторой точке О. Радиус S_ℓ -шара стремится к бесконечности при ℓ, стремящемся к бесконечности. Будем предполагать, что область G содержится во всех $\{S_\ell\}$, и расстояние от G до границы S_ℓ больше нуля. Для каждого S_ℓ сформулируем задачу В.

Задача В.

Рассмотрим $\varphi(\bar x)$, удовлетворяющую уравнениям (2.I) и (2.3) в области S_ℓ. Уравнение (2.2) заменим уравнением:

$$\Delta\varphi(\bar x)\equiv 0, \quad \bar x\in S_\ell\setminus G. \tag{2.5}$$

Вместо условия (2.4) потребуем равенство $\varphi(\bar x)$ нулю на границе S_ℓ:

$$\varphi(\bar x)\equiv 0, \quad \bar x\in DS_\ell. \tag{2.6}$$

Рассмотрим на S_ℓ пространство Соболева $W_2^1(S_\ell)$ суммируемых, дифференцируемых почти всюду функций $\{f\}$, имеющих ограниченный интеграл

$$\int_{S_\ell}(f^2(\bar x)+|\nabla f(\bar x)|^2)dv_{\bar x}<\infty.$$

Обозначим $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)$ подпространство функций из $W_2^1(S_\ell)$, обращающихся в ноль на границе области S_ℓ. Умножая (2.I) и (2.5) на $f(x)$; интегрируя по S_ℓ с учетом (2.3), получаем

$$\int_{S_\ell} (\nabla\varphi(\bar{x}), \nabla f(\bar{x}))dV_{\bar{x}} + \int_G (\nabla f(\bar{x}), \bar{M}(\bar{x}))dV_{\bar{x}} = 0 . \tag{2.7}$$

Назовем $\varphi(\bar{x})$ из $W_2^1(S_\ell)$ удовлетворяющей (2.7) для любой функции $f(\bar{x})$ из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)$ обобщенным решением задачи B. Отметим, что при определении обобщенного решения нам не требуется ни дифференцируемости вектор-функции $\bar{M}(\bar{x})$, ни существования внешней нормали в каждой точке границы области G.

Определим функционал $\Phi^\ell(\varphi)$ следующим образом:

$$\Phi^\ell(\varphi) = 0.5 \cdot \int_{S_\ell} |\nabla\varphi|^2 dV_x + \int_G (\nabla\varphi, \bar{M})dV_{\bar{x}} . \tag{2.8}$$

Отметим, что функционал $\Phi^\ell(\varphi)$ из (2.8) полуограничен снизу:

$$\Phi^\ell(\varphi) \geqslant -0.5 \int_G |\bar{M}|^2 dV_{\bar{x}} . \tag{2.9}$$

Первая вариация $\Phi^\ell(\varphi)$ есть (2.7). Из (2.9) следует, что существует точная нижняя грань значений

$$d = \inf_{\varphi \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)} \Phi^\ell(\varphi) ,$$

Из множества $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)$ можно выделить минимизирующую последовательность $\{\varphi_k\}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \Phi^\ell(\varphi_k) = d .$$

Имеет место теорема.

Теорема 2.I.

Минимизирующая последовательность $\{\varphi_k\}$ сходится в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)$, предельная функция φ^* принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)$ и дает функционалу $\Phi^\ell(\varphi)$ наименьшее значение. Для любой f, такой, что $\int_{S_\ell} |\nabla f|^2 + f^2 < \infty$ и $f(\bar{x}) \equiv 0$, $\bar{x} \in DS_\ell$, выполняется тождество

$$\int_{S_\ell} (\nabla f, \nabla\varphi^*) + \int_G (\nabla f, \bar{M}) \equiv 0 . \tag{2.I0}$$

Доказательство.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Найдется такое $N > 0$, что $\Phi^\ell(\varphi_k) < d + \varepsilon$, если $k > N$. Пусть k и m больше N. Очевидно, $0.5(\varphi_k + \varphi_m)$ принадлежит $\overset{\circ}{W}{}_2^1(S_\ell)$. Поэтому

$\Phi^\ell(0.5(\varphi_k + \varphi_m)) \geqslant d$. Из равенства

$$\Phi^\ell\left(\frac{\varphi_k + \varphi_m}{2}\right) + \int_{S_\ell} \left|\frac{\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_m}{2}\right|^2 dV_x = \frac{1}{2}\left(\Phi^\ell(\varphi_k) + \Phi^\ell(\varphi_m)\right)$$

следует неравенство

$$d + \int_{S_\ell} \left|\frac{\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_m}{2}\right|^2 dV_x \leqslant d + \varepsilon .$$

Отсюда получаем, что

$$\int_{S_\ell} |\nabla\varphi_k - \nabla\varphi_m|^2 dV_{\bar{x}} < 4\varepsilon . \tag{2.II}$$

Для доказательства сходимости $\{\varphi_k\}$ в $W_2^1(S)$ нам потребуется неравенство Лере /3/.

Неравенство Лере

Для всякой гладкой финитной функции справедливо следующее неравенство

$$\int_{R^3} \frac{\varphi^2(\bar{x})}{|\bar{x}-\bar{y}|^2} dV_{\bar{x}} \leqslant 4 \int_{R^3} |\nabla\varphi|^2 dV_{\bar{x}} . \tag{2.I2}$$

Пусть $U^R(\bar{y})$ есть шар с центром в $\bar{y}$ и радиуса R. Из (2.I2) следует

$$\int_{U^R(\bar{y})} \frac{\varphi^2(\bar{x})}{R^2} dV_x \leqslant \int_{U^R(\bar{y})} \frac{\varphi^2(\bar{x})}{|\bar{x}-\bar{y}|^2} dV_{\bar{x}} \leqslant \int_{R^3} \frac{\varphi^2(\bar{x})}{|\bar{x}-\bar{y}|^2} dV_{\bar{x}} \leqslant 4 \int_{R^3} |\nabla\varphi|^2 dV_{\bar{x}} .$$

Отсюда получаем неравенство

$$\int_{U^R(\bar{y})} \varphi^2(\bar{x}) dV_{\bar{x}} \leqslant 4R^2 \int_{R^3} |\nabla\varphi|^2 dV_{\bar{x}} . \tag{2.I3}$$

Из (2.II) и (2.I3) следует, что

$$\int_{S_\ell} \left(|\varphi_m(\bar{x}) - \varphi_k(\bar{x})|^2 + |\nabla\varphi_m - \nabla\varphi_k|^2\right) dV_{\bar{x}} \leqslant (4R_\ell^2 + 1)4\varepsilon ,$$

где R_ℓ – радиус S_ℓ. Из полноты $W_2^1(S_\ell)$ вытекает, что существует предел $\{\varphi_k\}$ – функция φ^* из $W_2^1(S_\ell)$. Значения φ^* на S_ℓ равно нулю. Из неравенства

$$\oint\limits_{DS_e} |\varphi_k-\varphi^*|^2 dv_{\bar x} \le c\int\limits_{S_e} (|\varphi_k-\varphi^*|^2+|\nabla\varphi_k-\nabla\varphi^*|^2)\,dv_x$$

получаем, что для $\varepsilon > 0$ при достаточно большом k имеет место неравенство

$$\int\limits_{DS_e} |\varphi^*(\bar x)|^2 ds_{\bar x} = \int\limits_{DS_e} |\varphi_k(\bar x)-\varphi^*(\bar x)|^2 ds_{\bar x} < \varepsilon .$$

В пределе получаем

$$\int\limits_{DS_e} |\varphi^*(\bar x)|^2 ds_{\bar x} = 0 .$$

Отсюда следует, что $\varphi^*(x)$ равна нулю почти всюду на DS_e.

Покажем, что $\Phi^e(\varphi^*) = d$. Имеем

$$|\Phi^e(\varphi^*) - \Phi^e(\varphi_k)| \le 2\left\{\int\limits_{S_e} |\nabla\varphi_k-\nabla\varphi^*|^2 dv_x\right\}^{1/2} \times$$

$$\times\left[\int\limits_G |\bar M(x)|^2 dv_x\right]^{1/2} + \left[\int\limits_{S_e} |\nabla\varphi^*|^2 dv_x\right]^{1/2} + \left[\int\limits_{S_e} |\nabla\varphi_k|^2 dv_x\right]^{1/2} .$$

Ввиду ограниченности $\|\bar M\|_{L^2(G)}$, $\|\varphi_k\|_{W_2^1(S_e)}$, $\|\varphi^*\|_{W_2^1(S_e)}$ и сходимости минимизирующей последовательности φ_k к φ^* разность $|\Phi^e(\varphi^*)-d|$ меньше любого $\varepsilon > 0$.

Рассмотрим поведение функционала $\Phi^e(\varphi)$ для φ, равной $\varphi = \varphi^*+\alpha f$. Имеем

$$\Phi^e(\varphi^*+\alpha f) = \Phi^e(\varphi^*)+0.5\,\alpha^2\cdot\int\limits_{S_e}|\nabla f|^2+\alpha\Big(\int\limits_{S_e}(\nabla f,\nabla\varphi^*)+\int\limits_G(\nabla f,\bar M)\Big).$$

Ввиду того, что на φ^* достигается минимум функционала Φ^e, следует выполнение тождества

$$\int\limits_{S_e}(\nabla f,\nabla\varphi^*) + \int\limits_G(\nabla f,\bar M) \equiv 0 , \tag{2.14}$$

При f, равной φ^*, из (2.14) вытекает

$$\int\limits_{S_e} |\nabla\varphi^*(\bar x)|^2 dv_{\bar x} = -\int\limits_G (\nabla\varphi^*(x),\bar M(\bar x))\,dv_{\bar x} . \tag{2.15}$$

Отсюда, воспользовавшись неравенством Гельдера, получаем

$$\int\limits_{S_e} |\nabla\varphi^*(\bar x)|^2 dv_{\bar x} \le \int\limits_G |\bar M(\bar x)|^2 dv_{\bar x} . \tag{2.16}$$

Покажем, что существует единственная функция $\varphi^*(x)$, на которой достигается минимум функционала $\Phi^e(\varphi)$. Предположим, что существуют две функции $\varphi_1^*(\bar x)$ и $\varphi_2^*(\bar x)$. Из (2.14) следует

$$\int\limits_{S_e}(\nabla\varphi_1^*,\nabla\varphi_1^*-\nabla\varphi_2^*)\,dv_{\bar x} + \int\limits_G(\nabla\varphi_1^*-\nabla\varphi_2^*,\bar M)\,dv_{\bar x} = 0 .$$

$$\int\limits_{S_e}(\nabla\varphi_2^*,\nabla\varphi_1^*-\nabla\varphi_2^*)\,dv_{\bar x} + \int\limits_G(\nabla\varphi_1^*-\nabla\varphi_2^*,\bar M)\,dv_{\bar x} = 0 .$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{S_e} |\nabla\varphi_1^*-\nabla\varphi_2^*|^2 dv_{\bar x} = 0 .$$

Из (2.13) вытекает

$$\int\limits_{S_e} |\varphi_1^*-\varphi_2^*|^2 dv_{\bar x} = 0 .$$

Теорема доказана.

Обозначим ψ_e функцию φ^*, минимизирующую $\Phi^e(\varphi)$ из (2.8). Функция ψ_e есть обобщенное решение задачи В для S_e. Рассмотрим последовательность функций $\{\psi_e\}$. Имеет место теорема.

Теорема 2.2.

Для любого шара Ω конечного радиуса ($G\subset\Omega$) последовательность $\{\psi_e\}$ сходится к некоторой функции ψ^* из $W_2^1(\Omega)$ в метрике $W_2^1(\Omega)$. Для любой f из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ имеет место тождество

$$\int\limits_\Omega(\nabla\psi^*,\nabla f)\,dv_{\bar x} + \int\limits_G(\nabla f,\bar M)\,dv_x \equiv 0 . \tag{2.17}$$

Доказательство.

Для любых $k > e$ имеет место неравенство

$$-0.5\int\limits_G|\bar M|^2 dv_x \le \Phi^k(\psi_k) \le \Phi^e(\psi_e) .$$

Таким образом, последовательность $\Phi^k(\psi_k)$ монотонно убывает и ограничена снизу. Существует предел Φ^*. Подставляя в (2.10) f, равную ψ_e, получаем, что для любого e имеет место тождество

$$\int\limits_{S_e}|\nabla\psi_e|^2 dv_{\bar x} + \int\limits_G(\bar M,\nabla\psi_e)\,dv_{\bar x} = 0 .$$

Отсюда следует

$$\Phi^{\ell}(\psi_\ell) = -0.5\int_{R^3}|\nabla\psi_\ell|^2 dV_{\bar x} = 0.5\int_G (\bar M,\nabla\psi_\ell)\,dV_{\bar x}\ . \qquad (2.18)$$

При $k>\ell$ из (2.10) получаем

$$\int_{R^3}(\nabla\psi_k,\nabla\psi_\ell)\,dV_{\bar x} + \int_G(\bar M,\nabla\psi_\ell)\,dV_{\bar x}=0\ . \qquad (2.19)$$

Из (2.18),(2.19) вытекает

$$\int_{R^3}|\nabla\psi_k-\nabla\psi_\ell|^2\,dV_{\bar x} = 2(\Phi^\ell(\psi_\ell)-\Phi^k(\psi_k))\ .$$

Ввиду сходимости последовательности $\{\Phi^\ell(\psi_\ell)\}$ следует сходимость $\{\nabla\psi_k\}$ в $L^2(R^3)$. Из неравенства (2.13) получаем

$$\int_\Omega|\psi_k(\bar x)-\psi_\ell(\bar x)|^2\,dV_{\bar x}\le 4R_0^2\int_{R^3}|\nabla\psi_k(\bar x)-\nabla\psi_\ell(\bar x)|^2\,dV_{\bar x}\ ,$$

где R_0 – радиус шара Ω.

Таким образом, мы доказали фундаментальность последовательности $\{\psi_k\}$ в пространстве $W_2^1(\Omega)$. Ввиду полноты $W_2^1(\Omega)$ существует предел ψ^k ($\psi^*\in W^1_{2(\Omega)}$). Учитывая этот факт, из (2.10) получаем (2.17).

Теорема доказана.

Пусть носитель f лежит в области $\Omega\setminus G$. Тогда из (2.17) следует

$$\int_{\Omega\setminus G}(\nabla\psi^*,\nabla f)\equiv 0\ . \qquad (2.20)$$

Рассмотрим функцию $u(\eta)$ из /2/. Пусть $u(\eta)$ такова, что $u(\eta)=1$ для $0\le\eta\le\frac12$; $u(\eta)=0$ для $\eta\geqslant 1$, $u(\eta)$ монотонна в $[0.5,\ 1]$ и имеет для всех $\eta\in[0,\infty)$ непрерывные производные любого порядка. В качестве $u(\eta)$ в /2/ взята функция

$$u(\eta)=\frac12\left[1+\operatorname{th}\frac{\eta-\frac34}{(\eta-\frac12)(\eta-1)}\right],\quad \frac12<\eta<1\ .$$

Пусть $\bar x_0\in \mathrm{Int}(\Omega\setminus G)$. Выберем два числа h_1 и h_2 ($0<h_1<h_2<\delta$), где δ – расстояние от $\bar x_0$ до границы $\Omega\setminus G$. Взяв f в (2.20) следующим образом:

$$f(\bar x)=\left(u\left(\frac{|\bar x-\bar x_0|}{h_1}\right)-u\left(\frac{|\bar x-\bar x_0|}{h_2}\right)\right)/|\bar x-\bar x_0|\ ,$$

и повторив выкладки из /2/, получим, что $\psi^*(\bar x)$ – гармоническая бесконечно дифференцируемая функция в окрестности $\bar x_0$. Ввиду произвольности выбора радиуса шара Ω и $\bar x_0$ получаем, что $\psi^*(x)$ – бесконечно дифференцируемая гармоническая функция в $R^3\setminus G$. Рассмотрим поведение $\psi^*(\bar x)$ при $|\bar x|$ стремящемся к бесконечности. Пусть $\bar x_0\in R^3\setminus G$ (рис.1). Определим функцию $f^a_{R_0}(\bar x)$ следующим образом:

$$f^a_{R_0}(\bar x)=\begin{cases}1.5/a-|\bar x-x_0|^2/(2\cdot a^3)\ , & |x-x_0|\le a\ ,\\ 1./|\bar x-\bar x_0|\ , & a<|\bar x-\bar x_0|\le R_0\ ,\\ (|\bar x-\bar x_0|-3R_0)^2/(4\cdot R_0^3)\ , & R_0<|\bar x-\bar x_0|\le 3R_0\ ,\\ 0 & 3R_0<|\bar x-\bar x_0|\ .\end{cases}$$

Обозначим $U^R(\bar x_0)$ –шар с центром в $\bar x_0$ и радиуса R. Будем предполагать, что $U^a(\bar x_0)\cap G=\emptyset$. Из определения функция $f^a_{R_0}(\bar x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные первого порядка в $U^{3R_0}(\bar x_0)$. Нормальная производная $f^a_{R_0}(\bar x)$ на границе $U^{3R_0}(\bar x_0)$ равна нулю. Функция $f^a_{R_0}(\bar x)$ тождественно равна нулю на границе $U^{3R_0}(\bar x_0)$ и вне его.

Из (2.17) получаем

$$\int_{U^{3R_0}(\bar x_0)}(\nabla\psi^*(\bar x),\nabla f^a_{R_0}(\bar x))\,dV_{\bar x} = -\int_G\left(\bar M(\bar x),\nabla_x\frac{1}{|\bar x-\bar x_0|}\right)dV_{\bar x}\ .$$

Из определения $f^a_{R_0}(\bar x)$ имеем

$$\Delta f^a_{R_0}(\bar x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{a^3}\ , & |\bar x-\bar x_0|\le a\ ,\\ 0\ , & a<x\le R_0\ ,\\ \dfrac{3}{2R_0^3}\left(1-\dfrac{2\cdot R_0}{|\bar x-\bar x_0|}\right)\ , & R_0<|x-x_0|\le 3R_0\ .\end{cases}$$

Из теоремы Гаусса-Остроградского получаем

$$-\frac{3}{a^3}\int_{U^a(x_0)}\psi^*(\bar x)\,dV_{\bar x}+\frac{3}{2R_0^3}\int_{U^{3R_0}(\bar x_0)\setminus U^{R_0}(\bar x_0)}\psi^*(\bar x)\left(1-\frac{2R_0}{|\bar x-\bar x_0|}\right)dV_{\bar x} =$$

$$=\int_G\left(\bar M(\bar x),\nabla_{\bar x}\frac{1}{|\bar x-\bar x_0|}\right)dV_{\bar x}\ .$$

Воспользовавшись теоремой о среднем значении гармонической функции для шара [4], имеем

$$-4\pi\psi^*(\bar{x}_0)+\frac{3}{2R_0^3}I=\int_G(\bar{M}(\bar{x}),\nabla_{\bar{x}}\frac{1}{|x-x_0|})dv_{\bar{x}}\quad,\tag{2.21}$$

где $$I=\int_{U^{3R_0}(\bar{x}_0)\setminus U^{R_0}(\bar{x}_0)}\psi^*(\bar{x})(1-\frac{2R_0}{|x-x_0|})\,dv_{\bar{x}}\ .$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$I^2\leq\Big[\int_{U^{3R_0}(\bar{x}_0)}(\psi^*(\bar{x}))dv_x\Big]\cdot\Big[\int_{U^{3R_0}(\bar{x}_0)\setminus V^{R_0}(\bar{x}_0)}(1-\frac{2R_0}{|x-x_0|})^2\Big]dv_{\bar{x}}\leq C_0R_0^3\int_{U^{3R_0}(\bar{x}_0)}(\psi^*(\bar{x}))^2dv_{\bar{x}}\ ,$$

где C_0 не зависит от R_0 и $\bar{x}_0$. Заметим, что для любого R, $\bar{x}_0$ и ℓ имеет место неравенство

$$\int_{U^R(\bar{x}_0)}(\psi^*(\bar{x}))^2dv_{\bar{x}}\leq 2\Big[\int_{U^R(\bar{x}_0)}(\psi^*(\bar{x})-\psi_\ell(\bar{x}))^2\,dv_x+\int_{U^R(x_0)}(\psi_\ell(\bar{x}))^2dv_x\Big]\ .$$

Учитывая (2.13),(2.16) и сходимость последовательности функций $\{\psi_\ell\}$ к ψ^*, получаем

$$\int_{U^R(\bar{x}_0)}(\psi^*(\bar{x}))^2dv_{\bar{x}}\leq 8R^2\int_G|\bar{M}(\bar{x})|^2\,dv_{\bar{x}}\ .$$

Откуда следует оценка для интеграла I

$$\frac{3}{2R_0^3}|I|\leq C_1R_0^{-1/2}\ .$$

Устремляя R_0 к бесконечности, из (2.20) получаем

$$\psi^*(\bar{x}_0)=-\frac{1}{4\pi}\int_G(\bar{M}(\bar{x}),\nabla_{\bar{x}}\frac{1}{|\bar{x}-\bar{x}_0|})\,dv_{\bar{x}}\ .$$

Ввиду произвольности выбора шара Ω мы доказали существование обобщенного решения ψ^* задачи A во всем пространстве R^3. Функция $\psi^*(\bar{x})$ стремится к нулю как $\frac{C_1}{|\bar{x}|^2}$ при $|\bar{x}|\to\infty$. Модуль градиента $\psi^*(x)$ стремится к нулю как $\frac{C_2}{|\bar{x}|^3}$ при $|\bar{x}|\to\infty$.

Отсюда следует, что

$$\int_{R^3}(|\psi^*(\bar{x})|^2+|\nabla\psi^*(\bar{x})|^2)dv_{\bar{x}}<\infty\ .$$

Взяв в качестве f функцию ψ_ℓ в (2.17) и перейдя к пределу, получаем

$$\int_{R^3}|\nabla\psi^*(\bar{x})|^2dv_{\bar{x}}+\int_G(\nabla\psi^*(\bar{x}),\bar{M}(x))dv_{\bar{x}}=0\ .\tag{2.22}$$

Воспользовавшись неравенством Гельдера, имеем

$$\int_{R^3}|\nabla\psi^*(\bar{x})|^2dv_{\bar{x}}\leq\int_G|\bar{M}(\bar{x})|^2dv_x\ .\tag{2.23}$$

Единственность обобщенного решения задачи А доказывается аналогично доказательству единственности обобщенного решения задачи В. Заметим, что если существуют классические решения задачи А и задачи В, то они удовлетворяют условиям (2.17) и (2.10) соответственно, что означает совпадение этих решений с обобщенными решениями рассматриваемых задач почти всюду. Построение обобщенного решения задачи А проводилось для последовательности вложенных расширяющихся шаров $\{S_\ell\}$. Схема доказательства не меняется, если мы рассмотрим последовательность вложенных выпуклых расширяющихся областей $\{G_k\}$. Построенное решение не зависит от выбора областей. Для доказательства этого факта достаточно рассмотреть последовательность областей $S_{i_1}, G_{j_1}, S_{i_2}, G_{j_2},\ldots$ ($S_{i_k}\subset G_{j_k}$, $G_{j_k}\subset S_{i_{k+1}}$).

§ 3. Теорема существования и единственности решения задачи магнитостатики

Для дальнейшего изложения нам понадобятся свойства величин индукции $\bar{B}$, напряженности $\bar{H}$ и намагниченности $\bar{M}$ магнитного поля. Будем предполагать, что для модуля напряженности $H=H(B)$, рассматриваемой как функция модуля индукции B, имеет место неравенство

$$0<\alpha\leq\mu_0\frac{\partial H}{\partial B}\leq 1\quad,\tag{3.1}$$

где α – постоянная для данного типа железа и не зависит от H и B. Намагниченность $\bar{M}$, добавочное поле, создаваемое железом по модулю ограничено:

$$|\bar{M}|\leq M_{max}\quad,\tag{3.2}$$

где M_{max} соответствует полностью насыщенной среде. Для ферромагнетиков соотношения (3.1) и (3.2) имеют место. Приведем лемму из [5].

Лемма.

При выполнении условия (3.I) для любых $\bar{B}_1$ и B_2 имеет место неравенство

$$\mu_0 |\bar{M}(\bar{B}_1) - \bar{M}(\bar{B}_2)| \le q|\bar{B}_1 - \bar{B}_2| , \qquad (3.3)$$

где $0 \le q < 1$ и не зависит от $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$.

Имеет место теорема

Теорема 3.I

Система (I.I)-(I.2) имеет единственное решение.

Доказательство.

Перепишем (I.I) следующим образом:

$$\frac{\bar{B}(\bar{a})}{\mu_0} = \bar{J}(\bar{a}) + \bar{M}(\bar{a}) + \nabla_{\bar{a}}\varphi(\bar{a}) . \qquad (3.4)$$

Рассмотрим последовательность $\bar{B}^k$, определяемую рекуррентным образом:

$$\frac{\bar{B}^{k+1}(a)}{\mu_0} = \bar{J}(\bar{a}) + \bar{S}(\bar{B}^k) ,$$

$$\bar{B}^0(a) \equiv \bar{0} , \qquad (3.5)$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Определим оператор $\bar{S}(B^k)$ в (3.5). Заметим, что $\bar{J}(\bar{a}) \in L^2(R^3)$. Предполагая, что $\bar{B}^k \in L^2(R^3)$, определим $\bar{M}(\bar{B}^k)$ в G. Воспользуемся тем фактом, что множество бесконечно дифференцируемых функций плотно в $L^2(G)$. Пусть $\bar{B}^i_k$ есть последовательность бесконечно дифференцируемых вектор функций, сходящаяся к $\bar{B}^k$ в $L^2(G)$ метрике. Для каждой $\bar{B}^i_k$ построим $\bar{M}(\bar{B}^i_k)$ по формулам из (I.2). Из (3.3) следует

$$|\bar{M}(\bar{B}^i_k(\bar{a})) - \bar{M}(\bar{B}^\ell_k(\bar{a}))| < \frac{q}{\mu_0}|\bar{B}^i_k(\bar{a}) - \bar{B}^\ell_k(\bar{a})| .$$

Отсюда получаем

$$\int_G |\bar{M}(\bar{B}^i_k(\bar{x})) - \bar{M}(\bar{B}^\ell_k(\bar{x}))|^2 dV_{\bar{x}} \le \frac{q^2}{\mu_0^2}\int_G |\bar{B}^i_k(\bar{x}) - B^\ell_k(\bar{x})|^2 dV_{\bar{x}} .$$

Таким образом, последовательность $\bar{M}(\bar{B}^i_k)$ фундаментальная в $L^2(G)$. Ввиду полноты $L^2(G)$ существует предельная функция $\bar{M}(\bar{B}^k)$, принадлежащая $L^2(G)$. Заметим, что из построения $\bar{M}(\bar{B})$ следует, что для B^k, B^ℓ имеет место неравенство

$$\int_G |\bar{M}(\bar{B}^k(\bar{x})) - \bar{M}(\bar{B}^\ell(\bar{x}))|^2 dV_{\bar{x}} \le \frac{q^2}{\mu_0^2}\int_G |\bar{B}^k(\bar{x}) - \bar{B}^\ell(\bar{x})|^2 dV_{\bar{x}} . \qquad (3.6)$$

Из неравенства (3.2) следует, что для $\forall\ \bar{B} \in L^2(G)$ выполняется неравенство

$$\int_G |\bar{M}(\bar{B}(x))|^2 dV_x \le M^2_{max}\ \mathrm{mes}G . \qquad (3.7)$$

Далее для $\bar{M}(\bar{B}_k)$ рассмотрим обобщенное решение φ^* задачи А. Положим $\bar{S}(\bar{B}^k) = \bar{M}(\bar{B}^k) + \nabla\varphi^*$. Воспользовавшись (2.22),(2.23) и (3.6), получаем

$$\int_{R^3} |\bar{S}(\bar{B}^k(x)) - \bar{S}(\bar{B}^{k-1}(\bar{x}))|^2 dV_{\bar{x}} \le \frac{q^2}{\mu_0}\int_G |\bar{B}^k(\bar{x}) - \bar{B}^{k-1}(\bar{x})|^2 dV_{\bar{x}} . \qquad (3.8)$$

Отсюда и из (3.5) следует

$$\| \bar{B}^{k+1} - \bar{B}^k \|_{L^2(R^3)} \le q \| \bar{B}^k - B^{k-1} \|_{L^2(R^3)} \le q^k \| \bar{J} \|_{L^2(R^3)} ,$$

Ввиду того, что $0 \le q < 1$, далее получаем для $k > \ell$

$$\| \bar{B}^k - \bar{B}^\ell \|_{L^2(R^3)} \le \frac{q^\ell}{1-q} \| \bar{J} \|_{L^2(R^3)} .$$

Отсюда следует фундаментальность последовательности $\{B^k\}$ в $L^2(R^3)$. Ввиду полноты $L^2(R^3)$ существует предельная функция $\bar{B}^*(\bar{x})$, принадлежащая $L^2(R^3)$ и являющаяся решением (3.5).

Единственность решения следует из неравенства (3.8).

§ 4. Моделирование поля тороидального магнита

Рассмотрим бесконечную систему уравнений (I.8). Из теоремы 3.I следует, что она имеет единственное решение. Для дискретизации системы (I.8) мы вынуждены ограничиться конечным числом уравнений. Рассмотрим подпространство вектор-функции E^n вида

$$E^n = \{\bar{B}(r,z,\varphi) : \bar{B}(r,z,\varphi) = \bar{B}_0(r,z) + \sum_{k=1}^{n}(\bar{B}^c_k(r,z)\mathrm{Cos}k\varphi + \bar{B}^s_k(r,z)\mathrm{Sin}k\varphi\},$$

Функции $\bar{B}_0(r,z)$, $\{\bar{B}^c_k(r,z)\}$, $\{\bar{B}^s_k(r,z)\}$ принадлежат $\tilde{L}^2(R^2)$ с нормой

$$\| B \|^2_{\tilde{L}^2(R^2)} = \int_{R^2} |\bar{B}(r,z)|^2 r dr dz .$$

Определим проектор P^n пространства $L^2(R^3)$ на E^n следующим образом:

$$P^n(\bar{B}(r,z,\varphi)) = \bar{B}_0(r,z) + \sum_{k=1}^{n}(\bar{B}^c_k(r,z)\mathrm{Cos}k\varphi + \bar{B}^s_k\mathrm{Sin}k\varphi) .$$

где

$$\bar B_0(r,z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \bar B(r,z,\varphi)\,d\varphi ,$$

$$\bar B_k^c(r,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar B(r,z,\varphi)\cos k\varphi\, d\varphi ,$$

$$\bar B_k^s(r,z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \bar B(r,z,\varphi)\sin k\varphi\, d\varphi .$$

Тогда указанная система уравнений имеет вид

$$\frac{\bar B(r,z,\varphi)}{\mu_0} = P^n(\bar J(r,z,\varphi)) + \nabla\varphi(P^n(\bar M(\bar B(r,z,\varphi)))) + P^n(\bar M(\bar B(r,z,\varphi))). \quad (4.I)$$

Имеет место теорема

Теорема 4.I

Система уравнений (4.I) имеет единственное решение в из $L^2(R^3)$
Пусть $\bar B^*$ есть решение системы (I.I). Тогда выполняется неравенство

$$\|\bar B - \bar B^*\|_{L^2(R^3)} \le \frac{\mu_0}{1-q}\|\bar J - P^n(J)\|_{L^2(R^3)} + \frac{1}{1-q}\|\bar M(\bar B^*) - P^n(\bar M(B^*))\|_{L^2(G)}, \quad (4.2)$$

где $0 < q < 1$.

Доказательство.

Доказательство существования и единственности решения системы (4.I) проводится аналогично доказательству теоремы 3.I. Докажем (4.2).
Имеем

$$\frac{\bar B^* - \bar B}{\mu_0} = \bar J - P^n\bar J + \nabla\varphi(\bar M(\bar B^*)) - \nabla\varphi(P^n(\bar M(\bar B)) + \bar M(\bar B^*) - P^n\bar M(\bar B) .$$

Отсюда и из (3.8) получаем

$$\|B^* - \bar B\|_{L^2(R^3)} \le \mu_0\|\bar J - P^n(J)\|_{L^2(R^3)} + \|\bar M(\bar B^*) - P^n(\bar M(\bar B))\|_{L^2(G)}. \quad (4.3)$$

Далее имеем

$$\|M(\bar B^*) - P^n(\bar M(\bar B))\|_{L^2(G)} \le \|\bar M(\bar B^*) - P^n(\bar M(\bar B^*))\|_{L^2(G)} + \|P^n(\bar M(\bar B^*)) - P^n(\bar M(\bar B))\|_{L^2(G)}. \quad (4.4)$$

Но для проектора P^n выполняется неравенство

$$\|P^n(\bar M(\bar B^*)) - P^n(\bar M(\bar B))\|_{L^2(G)} \le q\|\bar B^* - \bar B\|_{L^2(G)}$$

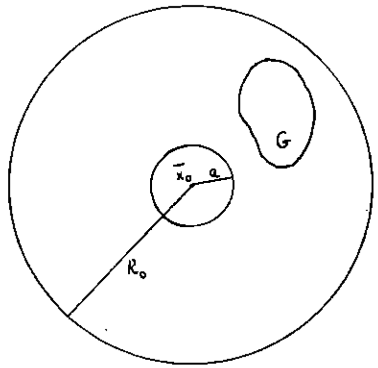

Рис.I

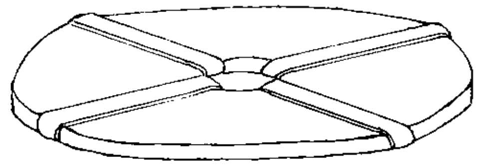

Рис.2

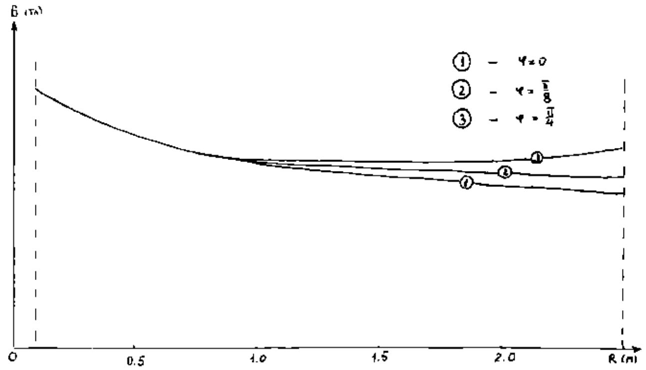

Рис.3

Отсюда и из (4.3),(4.4) следует (4.2).

Теорема доказана.

Для дискретизации (I.7),(I.8) использовался метод коллокации с кусочно-постоянной аппроксимацией поля. Для решения возникающих нелинейных дискретизованных уравнений использовался итерационный процесс (3.5).

На основе изложенной методики был создан комплекс фортранных программ расчета трехмерных магнитостатических полей ТОРОИД. Данный комплекс использовался для моделирования поля в тороидальном магните (рис.2), используемом в эксперименте "Меченые нейтрино"(ОИЯИ,Дубна – ИФВЭ, Протвино). Область $\hat{G}$ разбивалась на 350 элементов. Число n бралось равным 20, что соответствовало (с учетом синусов и косинусов) 4I гармонике. Суммарное время центрального процессора ЕС-I066, затраченное на вычисление коэффициентов матриц дискретизованных уравнений и 70 шагов итерационного процесса,составило 637' . На рис.3 приведено распределение основной компоненты индукции магнитного поля по радиусу магнита в медианной плоскости магнита при различных азимутах φ .

В заключение автор выражает благодарность В.Г.Кривохижину, В.В.Кухтину за интерес к задаче, О.И.Юлдашеву за стимулирующие дискуссии.

Литература

I. В.Е.Ерегин. Численное моделирование пространственного магнитостатического поля сверхпроводящего дипольного магнита. М., 1988. (Препринт / ЦНИИ атоминформ: П-Е-0783).
2. С.Л.Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988.
3. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников. Решение некоторых нестационарных задач магнитной гидродинамики для вязкой несжимаемой жидкости. Тр. МИАН СССР, 1960, т.59, с.II5-I73.
4. В.С.Владимиров. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1967.
5. П.Г.Акишин, Е.П.Жидков. О единственности решения дискретизованных задач магнитостатики. ОИЯИ, II-83-427, Дубна, 1983.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 марта 1993 года.