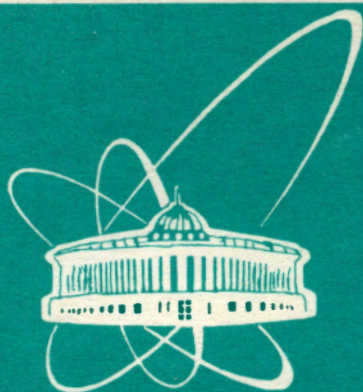


93-446



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-93-446

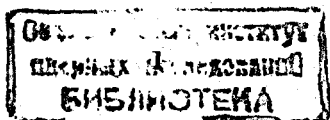
А.А.Боголюбская, С.И.Сердюкова

ВОЗМОЖНОСТЬ ПОЛНОГО ИССЛЕДОВАНИЯ
УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНЫХ
КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА РС
С ПРИМЕНЕНИЕМ CAS REDUCE

1993

1. Введение

Исследование устойчивости является одной из основных проблем теории численных методов решения дифференциальных уравнений. В настоящее время получены необходимые и достаточные условия устойчивости полубесконечных линейных разностных краевых задач [1], [2], [3], [4], [5]. Для устойчивости левой (правой) краевой задачи необходимо, чтобы была устойчива соответствующая задача Коши и чтобы спектр оператора перехода от слоя к слою G лежал в единичном круге $|z| \leq 1$. В процессе доказательства строится аналитическая матрица B , зависящая от исходных граничных условий и спектрального параметра z . Точка комплексной плоскости z_0 является точкой спектра оператора G , если и только если $\text{Det}B(z_0) = 0$ [1]. Если задача Коши устойчива и $\text{Det}B(z_0) \neq 0$ при $|z| > 1$, необходимые и достаточные условия устойчивости сводятся к ряду ограничений на порядки особенностей элементов $B^{-1}(z)$ в точках единичной окружности [3], [4], [5]. В случае неустойчивости были получены точные по порядку оценки скорости роста $\|G^n\|$ при $n \rightarrow \infty$, характеризующие степень неустойчивости. Доказательство содержит алгоритм проверки устойчивости. Этот алгоритм связан с громадными аналитическими выкладками. С развитием систем аналитических вычислений возникла реальная возможность создания стандартных программ проверки устойчивости разностных краевых задач [8], [9], [11]. При участии авторов предлагаемой работы была создана программа *SPECTR* [12] для вычисления спектров разностных краевых задач. В основу этой программы был положен "алгоритм сведения" сложной алгебраической задачи вычисления спектра к решению одного полиномиального уравнения [6], [7], [10], [11]. В предлагаемой работе нам удалось усовершенствовать "алгоритм сведения" и тем самым расширить его возможности. Используется система аналитических вычислений REDUCE, версия 3.4. Исследована устойчивость ряда известных модельных краевых задач. Кроме того, приводятся примеры исследования точек спектра на единичной окружности. Это позволяет провести полное исследование устойчивости. В одном случае обнаружена неустойчивость степенного типа.



2. Алгоритм исследования устойчивости

Исследуются краевые задачи вида:

$$u_\nu^{n+1} = \sum_{l=-p}^q a_l u_{\nu+l}^n, \quad n \geq 0, \quad \nu \geq 0; \quad (2.1a)$$

$$u_\nu^0 = f_\nu, \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} |f_\nu|^2 < \infty; \quad (2.1b)$$

$$u_{-j}^n = \sum_{l=0}^s c_{jl} u_l^n, \quad j = 1, \dots, p. \quad (2.1c)$$

Рассматривается практически важный класс схем: $3 \geq p \geq q \geq 1$. Предполагается, что $a_{-p} \neq 0$, $a_q \neq 0$ и что соответствующая задача Коши устойчива:

$$\left| \sum_{l=-p}^q a_l e^{il\varphi} \right| \leq 1, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (2.2)$$

Известно [1], что при выполнении условия Неймана (2.2) резольвентное уравнение

$$Q(\kappa, z) = \sum_{l=0}^{p+q} a_{l-p} \kappa^l - z \kappa^p = 0, \quad |z| > 1, \quad (2.3)$$

имеет в точности p решений $\kappa_1, \dots, \kappa_p$, меньших по модулю единицы и в точности q решений $\kappa_{p+1}, \dots, \kappa_{p+q}$, больших по модулю единицы. При подходе z к единичной окружности κ могут принимать предельные значения, равные по модулю единице. Это могут быть изолированные точки единичной окружности. Мы их называем определяющими. Не исключается также случай, когда есть решения κ , тождественно равные по модулю единице на единичной окружности $|z|=1$. Тогда все точки единичной окружности являются определяющими.

Обозначим через G оператор перехода от слоя к слою рассматриваемой разностной краевой задачи (2.1). Точка комплексной плоскости z_0 является точкой спектра оператора G , если спектральная задача (2.4):

$$\sum_{l=-p}^q a_l v_{\nu+l} - z v_\nu = 0, \quad \nu \geq 0; \quad (2.4a)$$

$$v_{-j} = \sum_{l=0}^s c_{jl} v_l, \quad j = 1, \dots, p, \quad (2.4b)$$

имеет ненулевое решение при $z = z_0$.

Для $z = z_0$ общего положения из области $|z_0| \geq 1$ решение спектральной задачи имеет вид:

$$v_\nu = \sum_{l=1}^p b_l \kappa_l^\nu. \quad (2.5)$$

Здесь κ_l различны. В отдельных точках области $|z_0| \geq 1$ κ_l могут совпадать. Тогда в соответствующих слагаемых κ_l^ν заменяются на $\nu \kappa_l^{\nu-1}, \dots, \nu^{k_l-1} \kappa_l^{\nu-k_l+1}$, k_l -кратность κ_l . Далее через P_j обозначаются многочлены $P_j(\kappa) = 1 - \sum_{i=0}^s c_{ji} \kappa^{j+i}$. Подставляя v_ν , определяемые (2.5) в (2.4), получаем уравнение для определения точек спектра (общего положения) в области $|z| \geq 1$:

$$D(\kappa_1, \dots, \kappa_p) = \det \begin{vmatrix} P_1(\kappa_1) & \dots & P_1(\kappa_p) \\ \vdots & & \vdots \\ P_p(\kappa_1) & \dots & P_p(\kappa_p) \end{vmatrix} = 0.$$

Напомним, что $\kappa_l, l = 1, \dots, p$ являются решениями полиномиального уравнения (2.3), меньшими по модулю единицы при $|z| > 1$.

В результате мы имеем систему $(p+1)$ -го полиномиального уравнения с $(p+1)$ -ой переменной:

$$D(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_p) = 0,$$

$$Q(\kappa_1, z) = 0,$$

.....

$$Q(\kappa_p, z) = 0.$$

Эту систему удается свести к системе двух полиномиальных уравнений с двумя переменными. Удобно ввести такие обозначения:

$$x_1 = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_p, \quad y_1 = \kappa_{p+1} + \dots + \kappa_{p+q},$$

$$x_2 = \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \dots + \kappa_{p-1} \kappa_p, \quad y_2 = \kappa_{p+1} \kappa_{p+2} + \dots + \kappa_{p+q-1} \kappa_{p+q},$$

$$x_3 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq p} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \kappa_{i_3}, \quad y_3 = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq q} \kappa_{p+i_1} \kappa_{p+i_2} \kappa_{p+i_3},$$

$$x_p = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p. \quad y_q = \kappa_{p+1} \kappa_{p+2} \dots \kappa_{p+q}.$$

Продемонстрируем "алгоритм сведения" на примере схем с $p = 3, q = 2$. В этом случае

$$Q(\kappa, z) = a_2 \kappa^5 + a_1 \kappa^4 + (a_0 - z) \kappa^3 + a_{-1} \kappa^2 + a_{-2} \kappa + a_{-3}.$$

Соотношения Виета могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} x_1 + y_1 &= -\frac{a_1}{a_2} = b_1, \\ x_2 + x_1 y_1 + y_2 &= \frac{a_0 - z}{a_2} = b_2, \\ x_3 + x_2 y_1 + x_1 y_2 &= -\frac{a_{-1}}{a_2} = b_3, \\ x_3 y_1 + x_2 y_2 &= \frac{a_{-2}}{a_2} = b_4, \\ x_3 y_2 &= -\frac{a_{-3}}{a_2} = b_5. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Заметим, что только b_2 зависит (линейно!) от z . Для начала избавляемся от y_1, y_2 , используя первое и последнее соотношения Виета (2.6):

$$y_1 = b_1 - x_1, \quad y_2 = \frac{b_5}{x_3}.$$

После подстановки этих формул в оставшиеся (второе, третье, четвертое) соотношения (2.6) получаем систему:

$$\begin{aligned} x_2 + x_1(b_1 - x_1) + \frac{b_5}{x_3} &= b_2 = \frac{a_0 - z}{a_2}, \\ x_3 + x_2(b_1 - x_1) + x_1 \frac{b_5}{x_3} &= b_3 = -\frac{a_{-1}}{a_2}, \\ x_3(b_1 - x_1) + x_2 \frac{b_5}{x_3} &= b_4 = \frac{a_{-2}}{a_2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Из второго соотношения находим $x_1 = x_1(x_2, x_3)$. После подстановки найденного $x_1(x_2, x_3)$ в первое соотношение системы (2.7) легко находим

$$z(x_2, x_3) = a_0 - a_2(x_2 + (b_1 - x_1(x_2, x_3))x_1(x_2, x_3) + b_5/x_3). \quad (2.8)$$

Необходимые вычисления производит РС, и мы не приводим соответствующих формул. Важно, что найдены представления y_1, y_2, x_1, z через отношения полиномов от x_2, x_3 . Переменные x_p, x_{p-1} имеют максимальный "порядок". Поэтому естественно оставить именно эти переменные, чтобы на выходе иметь многочлены более низкого порядка. Из соотношений (2.8) осталось неиспользованным последнее соотношение

$$x_3(b_1 - x_1(x_2, x_3)) + b_5 \frac{x_2}{x_3} = \frac{a_{-2}}{a_2}, \quad (2.9)$$

зависящее (после соответствующей подстановки) от двух переменных x_2, x_3 . Займемся детерминантным уравнением. В рассматриваемом случае имеем

$$D(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \det \begin{vmatrix} P_1(\kappa_1) & P_1(\kappa_2) & P_1(\kappa_3) \\ P_2(\kappa_1) & P_2(\kappa_2) & P_2(\kappa_3) \\ P_3(\kappa_1) & P_3(\kappa_2) & P_3(\kappa_3) \end{vmatrix} = 0.$$

Удобно отдельно определить столбцы:

$$D(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \det \|E_1, E_2, E_3\|,$$

где $E_i = E(\kappa_i), i = 1, 2, 3$. Порядки многочленов $P_j(x)$ обычно не превосходят $(p+q)$, порядка многочлена $Q(\kappa, z)$. Рассмотрим

$$P_j(\kappa) = d_4^j \kappa^4 + d_3^j \kappa^3 + d_2^j \kappa^2 + d_1^j \kappa + d_0^j.$$

Пусть d_i - векторы с компонентами d_i^j , тогда

$$E = d_4 \kappa^4 + d_3 \kappa^3 + d_2 \kappa^2 + d_1 \kappa + d_0.$$

Через $S_k(\kappa_1, \dots, \kappa_j)$ далее обозначаются симметричные однородные многочлены порядка k : $S_1(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$, $S_2(\kappa_1, \kappa_2) = \kappa_1^2 + \kappa_1 \kappa_2 + \kappa_2^2$, $S_3(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3$ и т.д. Производим серию элементарных преобразований над столбцами D .

I. Из первого столбца вычитаем второй и из второго третий. За знак \det выносим множители $(\kappa_1 - \kappa_2)$ и $(\kappa_2 - \kappa_3)$ соответственно:

$$D = (\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_3) \det \|E'_1, E'_2, E'_3\|.$$

где

$$E_1' = d_4 S_3(\kappa_1, \kappa_2) + d_3 S_2(\kappa_1, \kappa_2) + d_2 S_1(\kappa_1, \kappa_2) + d_1,$$

$$E_2' = d_4 S_3(\kappa_2, \kappa_3) + d_3 S_2(\kappa_2, \kappa_3) + d_2 S_1(\kappa_2, \kappa_3) + d_1,$$

$$E_3' = E_3.$$

II. Из первого столбца вычитаем второй, за знак \det выносим $(\kappa_1 - \kappa_3)$. Из третьего столбца вычитаем второй, домноженный на κ_3 . В результате имеем

$$D = (\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_2 - \kappa_3)(\kappa_1 - \kappa_3) \det \|E_1'', E_2'', E_3''\|,$$

где

$$E_1'' = d_4 S_2(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + d_3 S_1(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + d_1,$$

$$E_2'' = E_2',$$

$$E_3'' = -\kappa_2 \kappa_3 [d_4 S_2(\kappa_2, \kappa_3) + d_3(\kappa_2 + \kappa_3) + d_2] + d_0.$$

III. Из второго столбца вычитаем первый, домноженный на $(\kappa_2 + \kappa_3)$, к третьему прибавляем первый, домноженный на $\kappa_2 \kappa_3$. Получаем, что

$$D = (\kappa_1 - \kappa_2)(\kappa_1 - \kappa_3)(\kappa_2 - \kappa_3) \det \|E_1''', E_2''', E_3'''\|.$$

Здесь

$$E_1''' = E_1'' = d_4 S_2(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + d_3 S_1(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) + d_1,$$

$$E_2''' = -d_4 [\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_1 \kappa_3 (\kappa_1 + \kappa_3) + \kappa_2 \kappa_3 (\kappa_2 + \kappa_3) + 2\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3] -$$

$$d_3 [\kappa_1 \kappa_2 + \kappa_1 \kappa_3 + \kappa_2 \kappa_3] + d_1;$$

$$E_3''' = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 [d_4 (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3) + d_3] + d_0.$$

Справедливы соотношения:

$$S_1(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = x_1,$$

$$S_2(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = x_1^2 - x_2,$$

$$\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 = x_3,$$

$$\kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_1 \kappa_3 (\kappa_1 + \kappa_3) + \kappa_2 \kappa_3 (\kappa_2 + \kappa_3) = x_1 x_2 - 3x_3.$$

В результате детерминантное соотношение принимает вид

$$D'''(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Подставляем сюда $x_1 = x_1(x_2, x_3)$, полученное из соотношения Виета. Уравнение

$$D'''(x_1(x_2, x_3), x_2, x_3) = 0 \quad (2.10)$$

вместе с уравнением (2.9) составляют искомую систему двух полиномиальных уравнений от двух переменных x_p, x_{p-1} . При компьютерной реализации система вычисляется автоматически. Входными данными являются $p, q, Q(\kappa, z), P_j(\kappa, z), j = 1, \dots, p$.

Замечание 1. Если граничные условия неявные, коэффициенты P_j зависят от z , что не влияет на преобразование детерминантного уравнения. В конце дополнительно делается подстановка $z = z(\kappa_2, \kappa_3)$, которая была получена из соотношения Виета.

Замечание 2. Построенная система (2.9), (2.10) вместе с соотношением (2.8), определяющим $z(x_2, x_3)$, автоматически описывает точки спектра $z, |z| \geq 1$, которым отвечают кратные κ_j , меньшие по модулю единицы. Это следует из структуры решения спектральной задачи в случае кратных κ_j .

Результант многочленов, стоящих в левых частях уравнений (2.9), (2.10) вычисляется с применением системы REDUCE. Полученный многочлен от одного переменного $R(x_p)$ решается численно. Далее вычисляются соответствующие x_{p-1}, z .

"Ложные" точки спектра возникают по следующим причинам. Во-первых, лишние решения появляются при переходе к результату. Во-вторых, предложенный здесь "алгоритм сведения" таков, что x_j зависят от произвольно выбранных p решений резольвентного уравнения. Математически никак "не оговаривается", что x_j зависят от κ_j , меньших по модулю единицы. На первой стадии отделения "ложных" точек спектра простой проверкой находим подмножество решений, удовлетворяющих условиям:

$$|z| \geq 1 - \epsilon, \quad |x_1| < p + \epsilon, \quad |x_p| < 1 + \epsilon.$$

Для каждой из оставшихся "точек спектра" z численно решаем ре-

ольвентное уравнение (2.3), находим $x_j, |x_j| \leq 1$ и проверяем условие

$$|x_1 - \sum_{j=1}^p x_j| < \delta |x_1|.$$

Замечание 3. Версия REDUCE 3.4 позволяет решать полиномиальные уравнения с высокой точностью (мы задавали PRECISION 15). Сравнение с известными задачами показывает, что проверка с $\epsilon = 10^{-10}$, $\delta = 10^{-3}$ дает хорошие результаты.

Если обнаружены точки спектра в области $|z| \geq 1 + \epsilon$, имеет место неустойчивость экспоненциального типа. Если не обнаружено точек спектра в области $|z| \geq 1 - \epsilon$, наблюдается устойчивость. Точки, попадающие в ϵ - окрестность единичной окружности, нуждаются в дополнительном исследовании. Во-первых, надо проверить, есть ли точки спектра, расположенные в точности на единичной окружности. Если да, надо исследовать характер особенностей резольвенты в найденной точке спектра. Далее обсуждаются три конкретных краевых задачи, имеющие точки спектра на единичной окружности. В одной из них обнаружена степенная неустойчивость, две другие устойчивы.

3. Примеры полного исследования устойчивости

На таком пути (без предварительной обработки, как это делалось ранее) была исследована схема Русанова для волнового уравнения с двумя типами дополнительных граничных условий R_1, R_2 (соответственно случаи I и II в работе [7]). Исследованы также схемы Sloan для волнового уравнения с дополнительным граничным условием, содержащим стабилизирующую добавку с параметром $S(\omega)$ [6], и схема Strang 5-го порядка точности с дополнительными граничными условиями 5-го порядка точности [14]. Установлены устойчивость схемы Strang 5-го порядка точности с дополнительными граничными условиями 4-го порядка точности и схемы Eli Turkel [15] 4-го порядка точности с дополнительными граничными условиями G:Scollermo 2-го порядка точности. Ранее процесс сведения практически проводился вручную. Выбиралось такое основное переменное, чтобы все остальные выражались через него явно. Получались выражения с радикалами. Здесь предлагается автоматический процесс сведения к

двум полиномиальным уравнениям с двумя основными переменными x_{p-1}, x_p . С помощью REDUCE вычисляется RESULTANT и далее численно решается полиномиальное уравнение относительно x_p . Задача облегчилась с переходом на PC AT (вместо EC-1060), а также с появлением версии REDUCE 3.4 [13].

Кроме того, нам удалось исследовать точки спектра на единичной окружности. Речь идет о трех конкретных задачах. Задача $S(\omega)$ (D.M.Sloan [6]) устойчива в L_2 при $\Delta t/\Delta x = 1/2$, $\omega > \omega_0 = 0.55\dots$ (спектр оператора перехода от слоя к слою G лежит строго внутри единичного круга) [1].

При $\omega < \omega_0$ есть точки спектра вне единичного круга, что приводит к сильной неустойчивости экспоненциального типа. В предельном случае $\omega = \omega_0$ оператор G имеет две точки спектра на единичной окружности z_0, \bar{z}_0 . Им отвечают $|\kappa_1| < 1$, $|\kappa_2| < 1$, $D''(z) \neq 0$, следовательно, задача $S(\omega_0)$ устойчива в L_2 . Вторая задача - схема Русанова с комбинированными граничными условиями $\sigma R_1 + (1 - \sigma)R_2$. Соответствующая задача Коши устойчива в C при $\Delta t/\Delta x < \sqrt{2 - \sqrt{2}} = 0,765\dots$ Исследование краевых задач проводилось при $\Delta t/\Delta x = 1/2$. В случае граничных условий R_2 ($\sigma = 0$) рассматриваемая краевая задача устойчива в C . При $\sigma = 1$ оператор G имеет точку спектра вне единичного круга $z_0 = -1.063\dots$, что снова приводит к сильной неустойчивости экспоненциального типа. При некотором предельном σ_0 , $0 < \sigma_0 < 1$, оператор G имеет точку спектра на единичной окружности $z_0 = -1$. Исследование, проведенное на PC, показало, что и на границе устойчивости ($\sigma = \sigma_0$) сохраняется устойчивость в C : $D''(z) \neq 0$, -1 не является определяющей точкой: $|\kappa_\nu(-1)| \neq 1$.

Третья задача - аппроксимация четвертого порядка точности (Eli Turkel [15]) для простейшего гиперболического уравнения $u_t + u_x = 0$ с дополнительным граничным условием третьего порядка точности, написанным по такому симметричному набору точек:

$$\begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \quad \bullet \\ \bullet \quad (n+1, \nu) \\ \bullet \quad \bullet \\ (n, \nu - 1) \quad (n, \nu + 1) \end{array}$$

Соответствующая задача Коши устойчива в L_2 при $\Delta t/\Delta x \leq 2/3$, в расчетах $\Delta t/\Delta x = 1/2$. Исследование, проведенное с применением

REDUCE, показывает, что $z = 1$ является точкой спектра G , ей отвечает $\kappa_1 = 1$, и в этой точке $D(z)$ имеет нуль третьего порядка. Соответственно $\|G^n\| \asymp n^3$. Так что в этом случае обнаружена неустойчивость степенного типа.

Литература

1. Н.-О.Крейсс. Stability theory for difference approximations of mixed initial boundary value problems. Math.Comp, 1968, V.22, N104, p.703-714.
2. В.Gustafsson, Н.-О.Крейсс, А.Sandstrom. Stability theory of difference approximations for mixed initial boundary value problems. II. Math.Comp., 1972, V.26, N119, p.649-686.
3. С.И.Сердюкова. Асимптотические методы исследования устойчивости разностных краевых задач. Диссертация на соискание ученой степени доктора физ.-мат. наук. Дубна, 1975.
4. С.И.Сердюкова. Об устойчивости в S разностных краевых задач. В сб.: Вычислительные процессы и системы. М.: Наука, 1991, вып. 8, стр. 292-327.
5. С.И.Сердюкова. Необходимые и достаточные условия устойчивости в S линейных разностных краевых задач общего вида. ДАН СССР, 1991, т.319, N6, стр.1328-1332.
6. Н.Е.Мазепа, С.И.Сердюкова. Некоторые примеры исследования устойчивости с применением системы аналитических вычислений REDUCE. Труды международного совещания "Аналитические вычисления на ЭВМ и их применение в теоретической физике". Дубна, 17-20 сентября 1985г., стр.307-310.
7. Н.Е.Мазепа, С.И.Сердюкова. Исследование устойчивости одной разностной краевой задачи с применением системы аналитических вычислений. Изв.Вуз. Математика, 1985, N10(281), стр.55-61.
8. S.I.Serdyukova. Application of Computer Algebra to Investigation of Stability of Difference Schemes. Computer Algebra in Physical

Records. Dubna, USSR, 22-26 May, 1990. World Scientific, Singapore, New Jersey-London-Hong-Kong, p.362-371.

9. M.Thune. IBSTAB - a software system for automatic stability analysis of difference methods for hyperbolic initial-boundary value problem. Ph.D Thesis-Uppsala: Uppsala Univ., Sweden, 1984, 108p.
10. А.А.Боголюбская, С.И.Сердюкова. К исследованию спектра одной разностной краевой задачи. Сообщение ОИЯИ, Дубна, 1984, P11-84-77.
11. Н.Е.Мазепа. Вычисление спектров разностных краевых задач с применением САВ. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1989, P11-89-382.
12. Н.Е.Мазепа. Описание программы SPECTR. Препринт ОИЯИ, Дубна, 1989, P11-89-383.
13. А.С.Hearn. REDUCE User's Manual, Version 3.4. Rand Publication, 1991, CP78 (Rev. 7/91).
14. N.E.Mazepa, S.I.Serdyukova. Additional boundary conditions for difference schemes of maximum odd accuracy. SNAMM, 1988, V3, N2, p.151-161.
15. Eli Turkel. On the Practical Use of High-Order Methods for Hyperbolic Systems. J. of Comp.Phys., 1980, V.35, p.319-340.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1993 года.

Боголюбская А.А., Сердюкова С.И.

P11-93-446

Возможность полного исследования устойчивости
разностных краевых задач на PC
с применением CAS REDUCE

В этой работе обсуждается возможность полного исследования устойчивости линейных разностных краевых задач с использованием системы аналитических вычислений REDUCE (версия 3.4). Ранее была создана программа SPECTR (препринт ОИЯИ P11-89-383, Дубна, 1989), которая вычисляла спектры линейных разностных краевых задач. Сложная алгебраическая задача вычисления спектров сводилась к решению одного полиномиального уравнения. Нам удалось усовершенствовать «алгоритм сведения», что позволило расширить круг задач. Кроме того, приводятся примеры исследования точек спектра на единичной окружности. Это позволяет исследовать устойчивость до конца. В одном случае обнаружена неустойчивость степенного типа $\|G^n\| \asymp n^q$.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1993

Перевод авторов

Bogolubskaya A.A., Serdyukova S.I.

P11-93-446

The Possibility of the Complete Investigation
of Difference Boundary Problems Stability
on PC by Using CAS REDUCE

In this work the possibility of the complete investigation of linear difference boundary problems stability by using the REDUCE 3.4 is discussing. Before the program SPECTR had been developed (preprint of JINR P11-89-383, Dubna, 1989). SPECTR calculates spectra of linear difference boundary problems only. Complicated algebraic problem of spectrum calculation was reduced to the solution of only one polinomial equation. We produced more perfect «reduction algorithm». This gave possibility to enlarge a number of problems. Besides we present examples of searching spectrum points on the unit circle. Those gives possibility to investigate the stability completely. In one case the power instability $\|G^n\| \asymp n^q$ was found.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1993