

93-393



Объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-93-393

А.А.Боголюбская, С.И.Сердюкова

ПОСТРОЕНИЕ ЯВНЫХ С-УСТОЙЧИВЫХ
СХЕМ МАКСИМАЛЬНОГО НЕЧЕТНОГО
ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ С ПРИМЕНЕНИЕМ
СИСТЕМЫ REDUCE

Направлено в «Журнал вычислительной математики
и математической физики»

1993

1. Введение

В работе [1] изучались конечно-разностные методы решения задачи Коши для уравнения $U_t + U_x = 0$, $t = n\tau$, $x = \nu h$. Рассматривались явные разностные схемы максимального (при заданном наборе точек) порядка точности [2]. Накладывалось естественное ограничение на отношение шагов сетки $(\tau/h) \leq 1$. Было показано, что [1] на схемах порядка точности $\ln h^{-1}$ достигаются оптимальные в L_2 оценки сходимости.

В работах [3,5] рассматривается подкласс S -устойчивых схем максимального нечетного порядка точности $(2k-1)$. При начальных данных из C_α^N для схем порядка точности $\ln h^{-1}$ установлена оценка погрешности решения в S порядка точности $O(h^{N+\alpha} \ln \ln h^{-1})$. Кроме того, доказано, что число точек, на которые "размывается" изолированный разрыв, пропорционально порядку схемы. Зона "размывания" разрыва имеет ширину порядка $\ln h^{-1}$.

Тем самым доказано, что схемы максимального нечетного порядка точности $(2k-1)$, $k = O(\ln h^{-1})$, обладают свойствами, близкими к оптимальным в S . Интересно перенести эти результаты на случай нескольких пространственных переменных. Данная работа посвящена численному исследованию случая двух пространственных переменных.

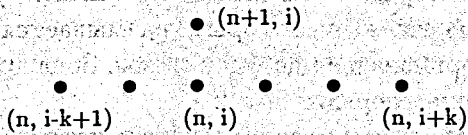
2. Постановка задачи. Основные результаты

В предлагаемой работе с применением системы REDUCE [6] построены явные схемы максимального нечетного $(2k-1)$, $(k = 2, 3, 4, 5)$ порядка точности для уравнения $U_t = U_x + U_y$, $t = n\tau$, $x = ih$, $y = jh$. На численном эксперименте показана ограниченность функций Грина G_{ij}^n в метрике L_1 при естественном ограничении на отношение шагов сетки $(\tau/h) \leq 1/2$. С применением системы REDUCE вычислены разложения характеристических функций $\mathcal{F}(\varphi, \psi)$ в окрестности $\varphi = \psi = 0$. Из этих разложений следует, что при $(\tau/h) > 1/2$ нарушается условие устойчивости в L_2 : $|\mathcal{F}(\varphi, \psi)| \leq 1$, $0 \leq \varphi, \psi \leq 2\pi$. Построенные схемы были опробованы на известной модельной задаче со "столбиками" [7]. Численно решалась задача Коши: найти периодическую по x, y (с периодом 1) функцию u , удовлетворяющую уравнению $U_t = U_x + U_y$. В качестве начальных данных заданы "столбики":

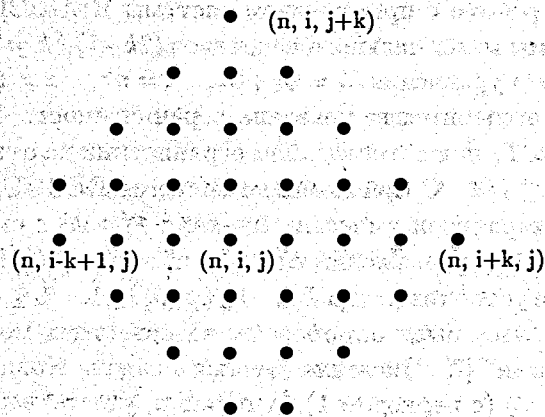
$$U(x, y, 0) = \begin{cases} 1 & \text{в круге } (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leq 1/8, \\ 0 & \text{для остальных точек квадрата } 0 \leq x, y < 1. \end{cases}$$

Результаты численных экспериментов показывают, что построенные явные схемы максимального нечетного порядка точности могут быть использованы при счете разрывных решений. На примере схемы 4-го порядка точности показано, что аналогично случаю одной пространственной переменной схемы максимального четного порядка точности не обладают такими хорошими свойствами.

Известно, что для уравнения $U_t = U_x$ явные схемы максимального нечетного порядка точности $(2k - 1)$ строятся по такому несимметричному набору точек ("шаблону"):



В случае уравнения $U_t = U_x + U_y$ для построения явной схемы порядка точности $(2k - 1)$ требуется как минимум $k(2k + 1)$ точек на нижнем слое. Представляется естественным (по законам красоты и симметрии) использовать такой минимальный выпуклый набор $k(2k + 1) + 1$ точек.



На рисунке представлено основание "пирамиды" двумерного "шаблона" для $k = 4$.

Строятся разностные схемы вида

$$U_{ij}^{n+1} = \sum_{-k \leq l-m \leq k, -k+1 \leq l+m \leq k} C_{lm} U_{i+l, j+m}^n = \sum_{l=-k+1}^0 \sum_{m=-k+1-l}^{l+k} C_{lm} U_{i+l, j+m}^n + \sum_{l=1}^k \sum_{m=l-k}^{k-l} C_{lm} U_{i+l, j+m}^n.$$

Напомним, что характеристическая функция определяется соотношением

$$F(\varphi, \psi) = \sum_{-k \leq l-m \leq k, -k+1 \leq l+m \leq k} C_{lm} e^{il\varphi + im\psi}.$$

Разностная функция Грина G_{ij}^n является решением разностной задачи Коши с такими начальными данными:

$$G_{ij}^0 = \begin{cases} 1, & i = j = 0, \\ 0 & \text{для остальных } i, j. \end{cases}$$

Далее через $\sigma(n)$ обозначается норма разностной функции Грина в L_1 :

$$\sigma(n) = \sum_{i,j} |G_{ij}^n|.$$

Если $\sigma(n)$ ограничена равномерно по n , задача Коши устойчива в S . Через S_{ij}^n далее обозначается численное решение задачи Коши со "столбиками". Ниже приводятся результаты расчетов в формулах, рисунках и таблицах для различных k и $\alpha = (\tau/h)$, с небольшими комментариями.

3. Случай $k = 2$

Аппроксимация третьего порядка точности для уравнения $U_t = U_x + U_y$:

$$U_{ij}^{n+1} = (-\alpha - 3\alpha^2 + 3\alpha^3 + 1)U_{ij}^n + (-1/2\alpha^2 + 1/2\alpha^3)(U_{i-1, j+1}^n + U_{i+1, j-1}^n) + (-1/3\alpha + \alpha^2 - 2/3\alpha^3)(U_{i-1, j}^n + U_{i, j-1}^n) + (-1/6\alpha + 1/6\alpha^3)(U_{i+2, j}^n + U_{i, j+2}^n) + \alpha^3 U_{i+1, j+1}^n + (\alpha + \alpha^2 - 2\alpha^3)(U_{i+1, j}^n + U_{i, j+1}^n).$$

Разложение характеристической функции в окрестности $\varphi = \psi = 0$:

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi) = \exp\{i\alpha(\varphi + \psi) - \frac{\alpha}{12}(\varphi^4 + \psi^4) + \frac{\alpha^2}{24}(\varphi^4 + \psi^4 + 4\varphi\psi^3 + 4\psi^3\varphi) + \frac{\alpha^3}{12}(\varphi^4 + \psi^4 + 6\varphi^2\psi^2) - \frac{\alpha^2}{4}\varphi^2\psi^2 - \frac{\alpha^4}{24}(\varphi + \psi)^4 + O(\varphi^5 + \psi^5)\}.$$

После замены переменных $x = \varphi + \psi$, $y = \varphi - \psi$ получаем разложение, содержащее только четные степени в главном нелинейном члене:

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi) = \exp\left\{i\alpha x - \frac{\alpha(1-4\alpha^2)(1-\alpha)}{96}x^4 - \frac{\alpha(1-\alpha)}{16}x^2y^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(1+4\alpha)}{96}y^4 + O(x^5 + y^5)\right\}.$$

Ясно, что при малых x , $y = 0$, $\alpha > 1/2$ $|\mathcal{F}(\varphi, \psi)| > 1$. Отсюда имеем "естественное ограничение на отношение шагов сетки" $(\tau/h) \leq 1/2$. В таблице 1 приведены значения $\sigma(n)$ при $n = 10, 20, \dots, 100$ для $\alpha = 0.25$, $\alpha = 0.4$, $\alpha = 0.5$ и $\alpha = 0.6$.

Таблица 1

n	$\alpha = 0.25$	$\alpha = 0.4$	$\alpha = 0.5$	$\alpha = 0.6$
10	1.58181264	1.53821451	1.85344831	7.27255181
20	1.54450373	1.53741965	2.02153200	32.8726188
30	1.52083634	1.51859429	2.11266439	154.345635
40	1.49270302	1.52390176	2.15182491	754.741315
50	1.51577787	1.53404010	2.18757776	3727.76003
60	1.52177737	1.52824860	2.21466840	18484.1190
70	1.49818705	1.53114619	2.26443991	92427.0775
80	1.51241913	1.52666451	2.30296718	463208.048
90	1.51596243	1.52485343	2.33029716	2317930.01
100	1.50502457	1.52610713	2.35138101	11664568.5

Значения L_1 - норм функции Грина

Видно, что при $\alpha \leq 1/2$ разностная функция Грина ограничена в L_1 , в то время как при $\alpha > 1/2$ $\sigma(n)$ экспоненциально растет с ростом n .

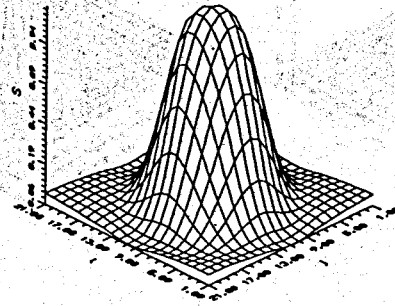


Рис.1

Схема 3-го порядка точности, $\alpha = 0.4, t = 4$

На рис.1 представлено решение задачи со "столбиками" при $t = 4$. Во всех расчетах задачи со "столбиками" $h = 0.05$. "Столбик" деформировался, но остался симметричным и локализованным.

4. Случай $k = 3$

Аппроксимация пятого порядка точности для уравнения $U_t = U_x + U_y$:

$$U_{ij}^{n+1} = (1 - \frac{2}{3}\alpha - \frac{7}{2}\alpha^2 + \frac{7}{3}\alpha^3 + \frac{5}{2}\alpha^4 - \frac{5}{3}\alpha^5)U_{ij}^n + (\alpha + \frac{5}{4}\alpha^2 - \frac{9}{4}\alpha^3 - \frac{5}{4}\alpha^4 + \frac{5}{4}\alpha^5)(U_{i+1,j}^n + U_{i,j+1}^n) + (-\frac{\alpha}{2} + \frac{5}{4}\alpha^2 - \frac{\alpha^3}{8} - \frac{5}{4}\alpha^4 + \frac{5}{8}\alpha^5)(U_{i-1,j}^n + U_{i,j-1}^n) + (-\frac{\alpha}{4} - \frac{\alpha^2}{8} + \frac{\alpha^3}{8} + \frac{\alpha^4}{8} - \frac{\alpha^5}{4})(U_{i+2,j}^n + U_{i,j+2}^n) +$$

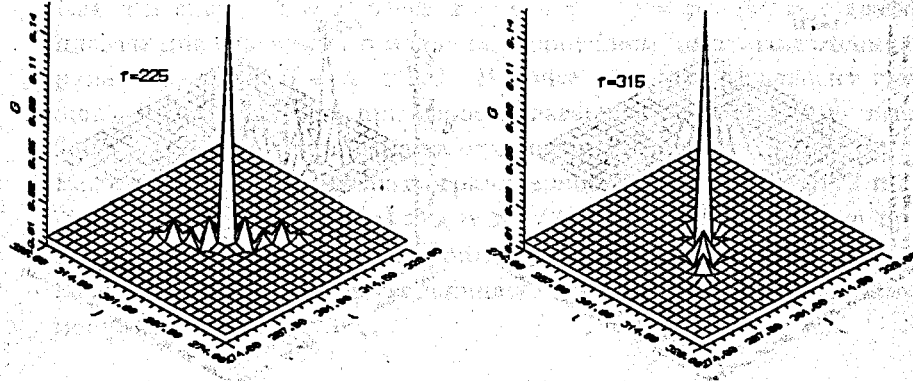
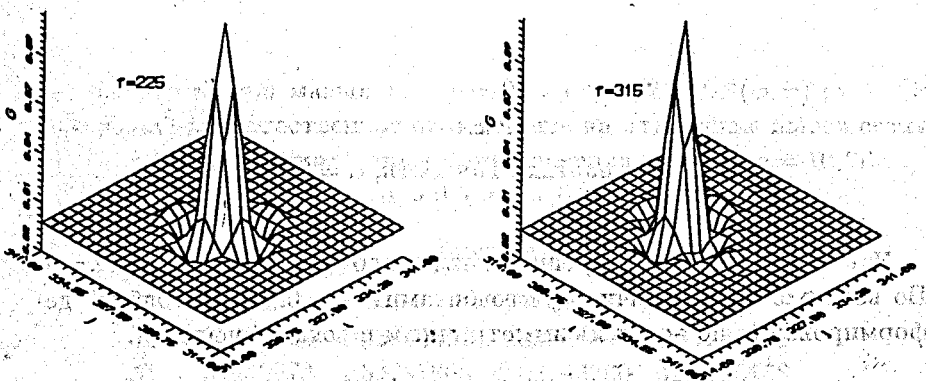
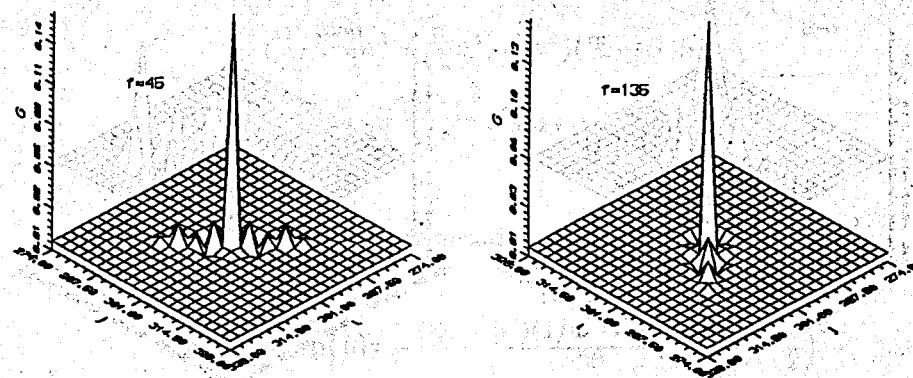
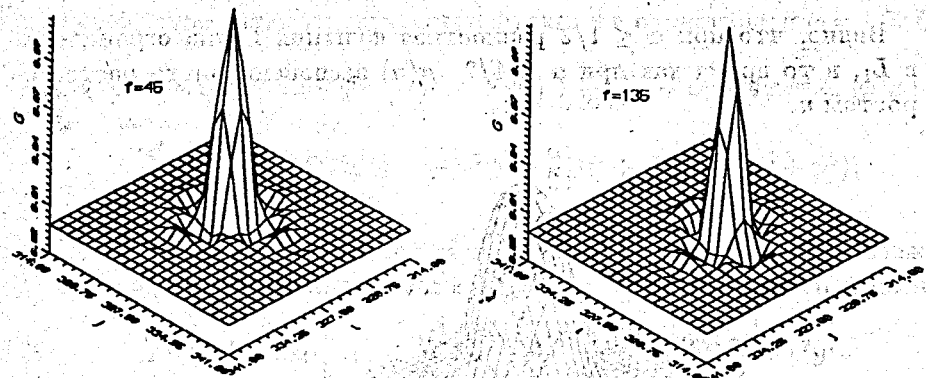


Рис.2
 Функция Грина для схемы 5-го порядка точности, $\alpha = 0.25$, область S -устойчивости, $n = 100$, f -угол поворота

Рис.3
 Функция Грина для схемы 5-го порядка точности, $\alpha = 0.5$, граница устойчивости, $n = 100$, f -угол поворота

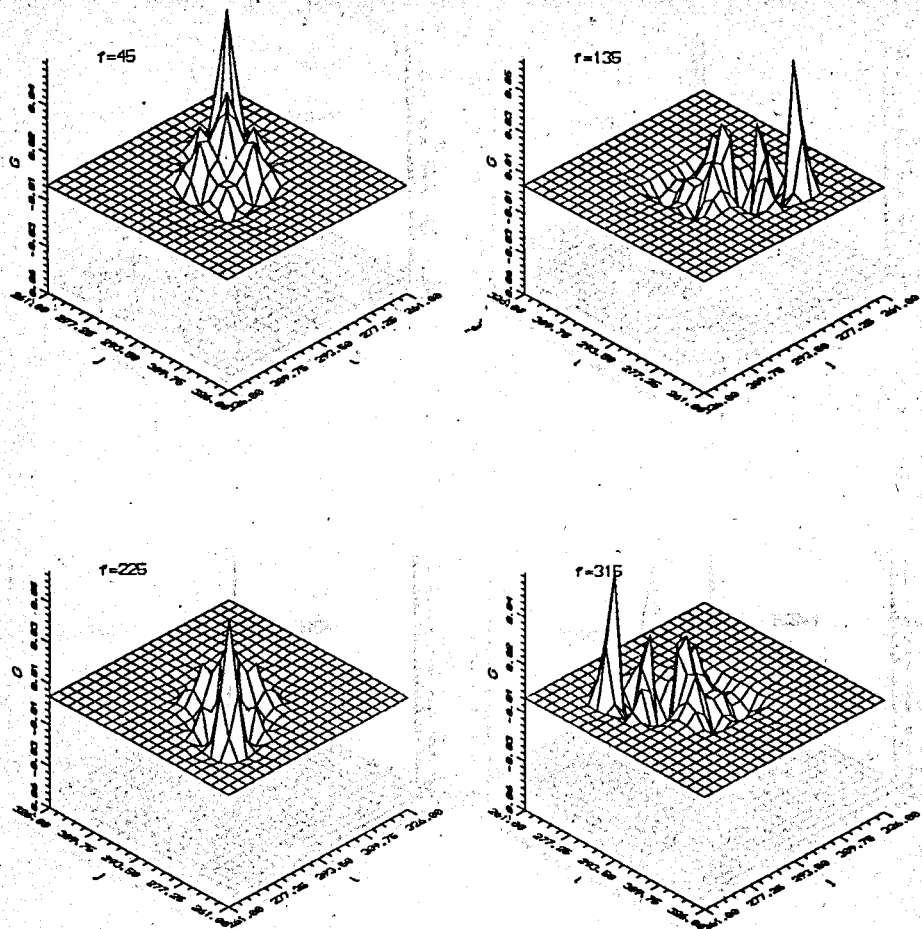


Рис.4

Функция Грина для схемы 5-го порядка точности, $\alpha = 0.75$, область неустойчивости, $n = 100$, f — угол поворота.

$$\left(\frac{\alpha^2}{12} + \frac{4}{3}\alpha^3 + \frac{5}{12}\alpha^4 - \frac{5}{6}\alpha^5\right)U_{i+1,j+1}^n + \dots + \frac{\alpha^2 - \alpha^4 - \alpha^3 + \alpha^5}{12}(U_{i+2,j-1}^n + U_{i-1,j+2}^n).$$

Разложение характеристической функции в окрестности $\varphi = \psi = 0$:

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi) = \exp\left\{i\alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha^2)(1/4-\alpha^2)(12-8\alpha)}{90}\left(\frac{x}{2}\right)^6 - \frac{\alpha(1-\alpha^2)(1+5\alpha-4\alpha^2)}{30}\left(\frac{y}{2}\right)^6 - \frac{\alpha(1-\alpha^2)}{128}(x^2y^4 + x^4y^2) + O(x^7 + y^7)\right\}.$$

Как и в случае $k = 2$, здесь $x = \varphi + \psi$, $y = \varphi - \psi$. Все коэффициенты при слагаемых в младшем нелинейном члене разложения отрицательны при $0 < \alpha < 1/2$. В точке $\alpha = 1/2$ происходит смена знака в коэффициенте при первом слагаемом. Так что снова имеем "естественное ограничение на отношение шагов сетки" $(\tau/h) \leq 1/2$. Расчеты снова показывают ограниченность $\sigma(n)$ при $\alpha \leq 1/2$ и экспоненциальный рост $\sigma(n)$ для $\alpha > 1/2$. На рис.2—4 наглядно представлено поведение функции Грина для $k = 3$ соответственно внутри, на границе и вне области устойчивости. Аналогичная картина имеет место для других k .

5. Случай $k = 4$

Схема 7-го порядка точности (далее $a/b * \alpha^l = \frac{a}{b} * \alpha^l$):

$$U_{ij}^{n+1} = (-3/10 * \alpha - 13/60 * \alpha^2 + 43/60 * \alpha^3 + 1/3 * \alpha^4 - 8/15 * \alpha^5 - 7/60 * \alpha^6 + 7/60 * \alpha^7)(U_{i,j+2}^n + U_{i+2,j}^n) + (\alpha + 4/3 * \alpha^2 - 83/36 * \alpha^3 - 23/12 * \alpha^4 + 61/36 * \alpha^5 + 7/12 * \alpha^6 - 7/18 * \alpha^7) * (U_{i,j+1}^n + U_{i+1,j}^n) + (-1/2 * \alpha - 131/36 * \alpha^2 + 131/72 * \alpha^3 + 65/18 * \alpha^4 - 65/36 * \alpha^5 - 35/36 * \alpha^6 + 35/72 * \alpha^7 + 1)U_{ij}^n +$$

$$\begin{aligned}
& (-1/90 * \alpha^2 - 41/180 * \alpha^3 - 1/36 * \alpha^4 + 11/36 * \alpha^5 + 7/180 * \alpha^6 - 7/90 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i+1,j+2}^n + U_{i+2,j+1}^n) + \\
& (1/6 * \alpha^2 + 3/2 * \alpha^3 + 5/8 * \alpha^4 - 31/24 * \alpha^5 - 7/24 * \alpha^6 + 7/24 * \alpha^7) U_{i+1,j+1}^n + \\
& (-1/105 * \alpha + 1/45 * \alpha^2 + 1/180 * \alpha^3 - 1/36 * \alpha^4 + 1/180 * \alpha^5 + 1/180 * \alpha^6 - \\
& \quad 1/630 * \alpha^7) * (U_{i,j-3}^n + U_{i-3,j}^n) + \\
& (1/10 * \alpha - 13/60 * \alpha^2 - 17/180 * \alpha^3 + 1/3 * \alpha^4 - 2/45 * \alpha^5 - 7/60 * \alpha^6 + 7/180 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i,j-2}^n + U_{i-2,j}^n) + \\
& (-3/5 * \alpha + 4/3 * \alpha^2 + 19/60 * \alpha^3 - 23/12 * \alpha^4 + 31/60 * \alpha^5 + 7/12 * \alpha^6 - 7/30 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i,j-1}^n + U_{i-1,j}^n) + \\
& (-1/140 * \alpha + 7/720 * \alpha^3 - 1/360 * \alpha^5 + 1/5040 * \alpha^7) (U_{i,j+4}^n + U_{i+4,j}^n) + \\
& (1/15 * \alpha + 1/45 * \alpha^2 - 23/180 * \alpha^3 - 1/36 * \alpha^4 + 13/180 * \alpha^5 + 1/180 * \alpha^6 - 1/90 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i,j+3}^n + U_{i+3,j}^n) + \\
& (-1/72 * \alpha^2 + 1/144 * \alpha^3 + 1/36 * \alpha^4 - 1/72 * \alpha^5 - 1/72 * \alpha^6 + 1/144 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i+2,j-2}^n + U_{i-2,j+2}^n) + \\
& (1/6 * \alpha^2 - 5/36 * \alpha^3 - 1/4 * \alpha^4 + 7/36 * \alpha^5 + 1/12 * \alpha^6 - 1/18 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i+2,j-1}^n + U_{i-1,j+2}^n) + \\
& (1/72 * \alpha^3 - 1/36 * \alpha^5 + 1/72 * \alpha^7) U_{i+2,j+2}^n + \\
& (-1/60 * \alpha^2 + 1/180 * \alpha^3 + 1/48 * \alpha^4 - 1/144 * \alpha^5 - 1/240 * \alpha^6 + 1/720 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i+1,j-3}^n + U_{i-3,j+1}^n) + \\
& (1/6 * \alpha^2 - 1/20 * \alpha^3 - 1/4 * \alpha^4 + 1/12 * \alpha^5 + 1/12 * \alpha^6 - 1/30 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i+1,j-2}^n + U_{i-2,j+1}^n) + \\
& (-8/9 * \alpha^2 + 4/9 * \alpha^3 + 23/18 * \alpha^4 - 23/36 * \alpha^5 - 7/18 * \alpha^6 + 7/36 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i+1,j-1}^n + U_{i-1,j+1}^n) + \\
& (1/45 * \alpha^3 - 1/36 * \alpha^5 + 1/180 * \alpha^7) (U_{i+1,j+3}^n + U_{i+3,j+1}^n) + \\
& (-1/60 * \alpha^2 + 1/60 * \alpha^3 + 1/48 * \alpha^4 - 1/48 * \alpha^5 - 1/240 * \alpha^6 + 1/240 * \alpha^7) * \\
& \quad (U_{i-1,j+3}^n + U_{i+3,j-1}^n) +
\end{aligned}$$

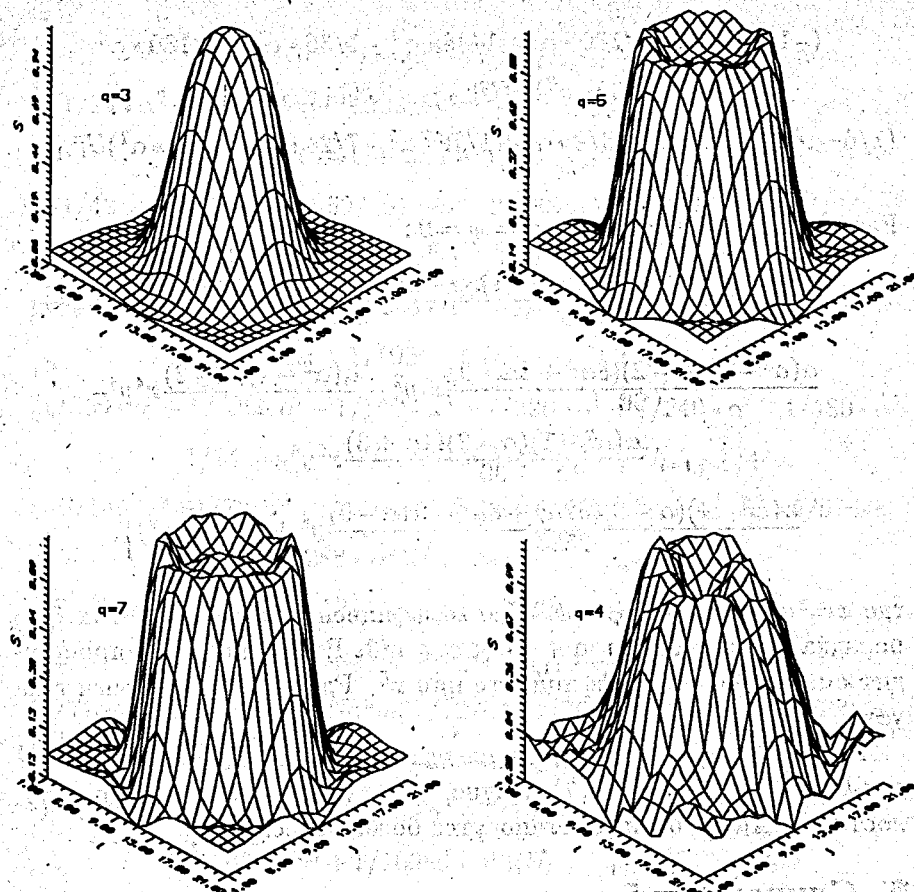


Рис.5
Решение периодической задачи со "столбиками" при $t = 2$,
 q — порядок схемы

$$(-1/90 * \alpha^2 + 7/180 * \alpha^3 - 1/36 * \alpha^4 - 1/36 * \alpha^5 + 7/180 * \alpha^6 - 1/90 * \alpha^7) * (U_{i-2,j-1}^n + U_{i-1,j-2}^n) + (1/6 * \alpha^2 - 11/18 * \alpha^3 + 5/8 * \alpha^4 + 1/72 * \alpha^5 - 7/24 * \alpha^6 + 7/72 * \alpha^7) U_{i-1,j-1}^n.$$

Разложение в окрестности $\varphi = \psi = 0$:

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi) = \exp \left\{ 2i\alpha x - \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha - 2)(2\alpha + 3)(4\alpha^2 - 1)(2\alpha - 3)}{2520} x^8 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha - 2)(8\alpha^2 + 4\alpha - 9)}{90} x^6 y^2 - \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha - 2)}{4} x^4 y^4 - \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha - 2)(4\alpha + 3)}{30} x^2 y^6 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha - 2)(32\alpha^3 + 8\alpha^2 - 64\alpha - 9)}{2520} y^8 + O(x^9 + y^9) \right\},$$

где $x = \varphi + \psi$, $y = \varphi - \psi$. Все коэффициенты при слагаемых 6-го порядка отрицательны при $0 < \alpha < 1/2$. В точке $\alpha = 1/2$ происходит смена знака в коэффициенте при x^6 . Разложение указывает на устойчивость в С.

На рис.5 представлено решение задачи со "столбиками" при $t = 2$ для $k = 2, 3, 4$ ($q = 3, 5, 7$). Видно, что с увеличением порядка точности стенки "столбика" становятся более отвесными.

6. Случай $k = 5$

Схема 9-го порядка точности:

$$U_{ij}^{n+1} = (1/280 * \alpha^2 - 1/1120 * \alpha^3 - 7/1440 * \alpha^4 + 7/5760 * \alpha^5 + 1/720 * \alpha^6 - 1/2880 * \alpha^7 - 1/10080 * \alpha^8 + 1/40320 * \alpha^9) * (U_{i-4,j+1} + U_{i+1,j-4}) + (1/504 * \alpha - 1/224 * \alpha^2 - 31/18144 * \alpha^3 + 7/1152 * \alpha^4 - 1/1728 * \alpha^5 - 1/576 * \alpha^6 + 1/3024 * \alpha^7 + 1/8064 * \alpha^8 - 1/36288 * \alpha^9) * (U_{i-4,j} + U_{i,j-4}) + (1/504 * \alpha^2 - 5/756 * \alpha^3 + 1/288 * \alpha^4 + 1/144 * \alpha^5 - 1/144 * \alpha^6 + 1/672 * \alpha^8 - 1/3024 * \alpha^9) * (U_{i-3,j-1} + U_{i-1,j-3}) + (1/360 * \alpha^2 - 1/1080 * \alpha^3 - 1/160 * \alpha^4 + 1/480 * \alpha^5 + 1/240 * \alpha^6 - 1/720 * \alpha^7 -$$

$$1/1440 * \alpha^8 + 1/4320 * \alpha^9)(U_{i-3,j+2} + U_{i+2,j-3}) + (-1/24 * \alpha^2 + 1/126 * \alpha^3 + 19/288 * \alpha^4 - 1/72 * \alpha^5 - 1/36 * \alpha^6 + 1/144 * \alpha^7 + 1/288 * \alpha^8 - 1/1008 * \alpha^9)(U_{i-3,j+1} + U_{i+1,j-3}) + (-1/42 * \alpha + 25/504 * \alpha^2 + 59/2016 * \alpha^3 - 23/288 * \alpha^4 - 1/1152 * \alpha^5 + 5/144 * \alpha^6 - 23/4032 * \alpha^7 - 1/224 * \alpha^8 + 1/896 * \alpha^9)(U_{i-3,j} + U_{i,j-3}) + (-1/36 * \alpha^2 + 13/144 * \alpha^3 - 7/144 * \alpha^4 - 53/576 * \alpha^5 + 7/72 * \alpha^6 - 1/288 * \alpha^7 - 1/48 * \alpha^8 + 1/192 * \alpha^9)(U_{i-2,j-1} + U_{i-1,j-2}) + (1/360 * \alpha^2 - 1/720 * \alpha^3 - 1/160 * \alpha^4 + 1/320 * \alpha^5 + 1/240 * \alpha^6 - 1/480 * \alpha^7 - 1/1440 * \alpha^8 + 1/2880 * \alpha^9)(U_{i-2,j+3} + U_{i+3,j-2}) + (-5/144 * \alpha^2 + 1/72 * \alpha^3 + 5/64 * \alpha^4 - 1/32 * \alpha^5 - 5/96 * \alpha^6 + 1/48 * \alpha^7 + 5/576 * \alpha^8 - 1/288 * \alpha^9)(U_{i-2,j+2} + U_{i+2,j-2}) + (17/72 * \alpha^2 - 1/24 * \alpha^3 - 121/288 * \alpha^4 + 3/32 * \alpha^5 + 31/144 * \alpha^6 - 1/16 * \alpha^7 - 1/32 * \alpha^8 + 1/96 * \alpha^9)(U_{i-2,j+1} + U_{i+1,j-2}) + (1/7 * \alpha - 5/18 * \alpha^2 - 53/252 * \alpha^3 + 37/72 * \alpha^4 + 1/36 * \alpha^5 - 5/18 * \alpha^6 + 13/252 * \alpha^7 + 1/24 * \alpha^8 - 1/84 * \alpha^9)(U_{i-2,j} + U_{i,j-2}) + (1/280 * \alpha^2 - 1/280 * \alpha^3 - 7/1440 * \alpha^4 + 7/1440 * \alpha^5 + 1/720 * \alpha^6 - 1/720 * \alpha^7 - 1/10080 * \alpha^8 + 1/10080 * \alpha^9)(U_{i-1,j+4} + U_{i+4,j-1}) + (-1/24 * \alpha^2 + 1/27 * \alpha^3 + 19/288 * \alpha^4 - 1/18 * \alpha^5 - 1/36 * \alpha^6 + 1/48 * \alpha^7 + 1/288 * \alpha^8 - 1/432 * \alpha^9)(U_{i-1,j+3} + U_{i+3,j-1}) + (17/72 * \alpha^2 - 25/144 * \alpha^3 - 121/288 * \alpha^4 + 161/576 * \alpha^5 + 31/144 * \alpha^6 - 35/288 * \alpha^7 - 1/32 * \alpha^8 + 1/64 * \alpha^9)(U_{i-1,j+2} + U_{i+2,j-1}) + (-35/36 * \alpha^2 + 7/18 * \alpha^3 + 235/144 * \alpha^4 - 47/72 * \alpha^5 - 55/72 * \alpha^6 + 11/36 * \alpha^7 + 5/48 * \alpha^8 - 1/24 * \alpha^9)(U_{i-1,j+1} + U_{i+1,j-1}) + (-2/3 * \alpha + 49/36 * \alpha^2 + 23/36 * \alpha^3 - 329/144 * \alpha^4 + 13/48 * \alpha^5 + 77/72 * \alpha^6 - 7/24 * \alpha^7 - 7/48 * \alpha^8 + 7/144 * \alpha^9)(U_{i-1,j} + U_{i,j-1}) + (1/630 * \alpha - 41/18144 * \alpha^3 + 13/17280 * \alpha^5 - 1/12096 * \alpha^7 + 1/362880 * \alpha^9) *$$

$$(U_{i+5,j} + U_{i,j+5}) +$$

$$\begin{aligned} & (-1/224 * \alpha^3 + 7/1152 * \alpha^5 - 1/576 * \alpha^7 + 1/8064 * \alpha^9)(U_{i+4,j+1} + U_{i+1,j+4}) + \\ & (-1/56 * \alpha - 1/224 * \alpha^2 + 67/2016 * \alpha^3 + 7/1152 * \alpha^4 - 11/576 * \alpha^5 - 1/576 * \alpha^6 + \\ & 1/252 * \alpha^7 + 1/8064 * \alpha^8 - 1/4032 * \alpha^9)(U_{i+4,j} + U_{i,j+4}) + \\ & (-1/432 * \alpha^3 + 1/192 * \alpha^5 - 1/288 * \alpha^7 + 1/1728 * \alpha^9)(U_{i+3,j+2} + U_{i+2,j+3}) + \\ & (1/504 * \alpha^2 + 13/252 * \alpha^3 + 1/288 * \alpha^4 - 11/144 * \alpha^5 - 1/144 * \alpha^6 + 1/36 * \alpha^7 + \\ & 1/672 * \alpha^8 - 1/336 * \alpha^9)(U_{i+3,j+1} + U_{i+1,j+3}) + \\ & (1/2880 * \alpha^9 - 1/1440 * \alpha^8 - 1/480 * \alpha^7 + 1/240 * \alpha^6 + 1/320 * \alpha^5 - 1/160 * \alpha^4 - \\ & 1/720 * \alpha^3 + 1/360 * \alpha^2) * (U_{i-2,j+3} + U_{i+3,j-2}) + \\ & (2/21 * \alpha + 25/504 * \alpha^2 - 109/504 * \alpha^3 - 23/288 * \alpha^4 + 47/288 * \alpha^5 + 5/144 * \alpha^6 - \\ & 47/1008 * \alpha^7 - 1/224 * \alpha^8 + 1/224 * \alpha^9)(U_{i+3,j} + U_{i,j+3}) + \\ & (-1/36 * \alpha^2 - 11/36 * \alpha^3 - 7/144 * \alpha^4 + 67/144 * \alpha^5 + 7/72 * \alpha^6 - 13/72 * \alpha^7 - \\ & 1/48 * \alpha^8 + 1/48 * \alpha^9)(U_{i+2,j+1} + U_{i+1,j+2}) + \\ & (-1/3 * \alpha - 5/18 * \alpha^2 + 31/36 * \alpha^3 + 37/72 * \alpha^4 - 3/4 * \alpha^5 - 5/18 * \alpha^6 + 1/4 * \alpha^7 + \\ & 1/24 * \alpha^8 - 1/36 * \alpha^9)(U_{i+2,j} + U_{i,j+2}) + \\ & (\alpha + 49/36 * \alpha^2 - 167/72 * \alpha^3 - 329/144 * \alpha^4 + 541/288 * \alpha^5 + 77/72 * \alpha^6 - \\ & 91/144 * \alpha^7 - 7/48 * \alpha^8 + 7/96 * \alpha^9)(U_{i+1,j} + U_{i,j+1}) + \\ & (1/720 * \alpha^2 - 1/240 * \alpha^3 + 1/2880 * \alpha^4 + 11/1440 * \alpha^5 - 7/1440 * \alpha^6 - 1/360 * \alpha^7 + \\ & 1/320 * \alpha^8 - 1/1440 * \alpha^9)U_{i-2,j-2} + \\ & (43/180 * \alpha^2 - 37/45 * \alpha^3 + 517/720 * \alpha^4 + 47/180 * \alpha^5 - 49/90 * \alpha^6 + 31/360 * \alpha^7 + \\ & 7/80 * \alpha^8 - 1/40 * \alpha^9)U_{i-1,j-1} + \\ & (1/720 * \alpha^2 + 23/720 * \alpha^3 + 1/2880 * \alpha^4 - 101/1440 * \alpha^5 - 7/1440 * \alpha^6 + 2/45 * \alpha^7 + \\ & 1/320 * \alpha^8 - 1/160 * \alpha^9)U_{i+2,j+2} + \\ & (43/180 * \alpha^2 + 8/5 * \alpha^3 + 517/720 * \alpha^4 - 47/30 * \alpha^5 - 49/90 * \alpha^6 + 21/40 * \alpha^7 + \\ & 7/80 * \alpha^8 - 7/120 * \alpha^9)U_{i+1,j+1} + \\ & (-2/5 * \alpha - 265/72 * \alpha^2 + 53/36 * \alpha^3 + 1199/288 * \alpha^4 - 1199/720 * \alpha^5 - 245/144 * \alpha^6 + \end{aligned}$$

$$49/72 * \alpha^7 + 7/32 * \alpha^8 - 7/80 * \alpha^9 + 1)U_{i,j}$$

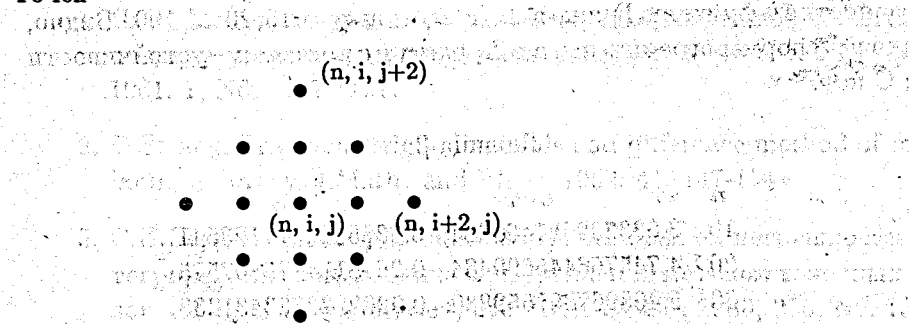
Разложение в окрестности $\varphi = \psi = 0$:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\varphi, \psi) = \exp \left\{ 2i\alpha x + \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)(4\alpha^2 - 9)(4\alpha^2 - 1)(2\alpha - 5)}{113400} x^{10} - \right. \\ \left. \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)(4\alpha^3 - 8\alpha^2 - 8\alpha + 9)}{504} x^8 y^2 + \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)}{12} x^4 y^6 + \right. \\ \left. \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)(2\alpha + 1)(4\alpha - 9)}{504} x^2 y^8 - \right. \\ \left. \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(\alpha^2 - 4)(16\alpha^4 - 36\alpha^3 - 40\alpha^2 + 72\alpha + 9)}{22680} y^{10} + O(x^{11} + y^{11}) \right\}, \end{aligned}$$

где $x = \varphi + \psi$, $y = \varphi - \psi$.

7. Случай схемы максимального четного порядка точности

Аппроксимация 4-го порядка точности по симметричному набору точек



имеет вид

$$\begin{aligned} U_{ij}^{n+1} = & (1/12 * \alpha - 1/24 * \alpha^2 - 1/12 * \alpha^3 + 1/24 * \alpha^4)(U_{i-2,j}^n + U_{i,j-2}^n) + \\ & (1/4 * \alpha^2 - 1/2 * \alpha^3 + 1/4 * \alpha^4)U_{i-1,j-1}^n + (-1/12 * \alpha^2 + 1/12 * \alpha^4) * \\ & (U_{i-1,j+1}^n + U_{i+1,j-1}^n) + \\ & (-2/3 * \alpha + 1/2 * \alpha^2 + 2/3 * \alpha^3 - 1/2 * \alpha^4)(U_{i-1,j}^n + U_{i,j-1}^n) + \end{aligned}$$

$$(-1/6 \cdot \alpha^2 + 1/6 \cdot \alpha^4)(U_{i+2,j+1}^n + U_{i+1,j+2}^n) + (-1/12 \cdot \alpha + 1/8 \cdot \alpha^2 + 1/12 \cdot \alpha^3 - 1/8 \cdot \alpha^4)(U_{i+2,j}^n + U_{i,j+2}^n) + (5/4 \cdot \alpha^2 + 1/2 \cdot \alpha^3 - 3/4 \cdot \alpha^4)U_{i+1,j+1}^n + (2/3 \cdot \alpha - 1/3 \cdot \alpha^2 - 2/3 \cdot \alpha^3 + 1/3 \cdot \alpha^4)(U_{i+1,j}^n + U_{i,j+1}^n) + (-3/2 \cdot \alpha^2 + 1/2 \cdot \alpha^4 + 1)U_{ij}^n.$$

Разложение в окрестности $\varphi = \psi = 0$:

$$\mathcal{F}(\varphi, \psi) = \exp \left\{ 2i\alpha x - i \frac{\alpha(\alpha^2 - 1)(4\alpha^2 - 5\alpha - 1)}{15} x^5 + i\alpha(2/3\alpha^2 - 2/3)x^3 y^2 - i \frac{\alpha(\alpha - 1)^2(\alpha + 1)}{3} x y^4 - \frac{\alpha^2(\alpha^2 - 1)(8\alpha^2 - 12\alpha + 1)}{18} x^6 + a^2(a^2 - 1)x^4 y^2 - \frac{\alpha^2(\alpha - 1)(4\alpha - 5)(\alpha + 1)}{6} x^2 y^4 + O(x^7 + y^7) \right\},$$

где $x = \varphi + \psi$, $y = \varphi - \psi$. В таблице 2 представлены значения норм разностной функции Грина в L_1 и L_2 при $n = 10, 20, \dots, 100$. Видно, что в L_2 нормы ограничены, а в L_1 растут с ростом n - устойчивости в С нет.

Таблица 2.

n	L_1	L_2
10	3.633332681468984	0.3385902511123541
20	4.745766445600484	0.2643134176807575
30	5.463967867659880	0.2292822753431238
40	6.069763137185624	0.2074348490359645
50	6.608302382287504	0.1919930447649350
60	7.109252391249152	0.1802658272448830
70	7.576555465571015	0.1709304352301725
80	8.016219913137174	0.1632478325775869
90	8.434257940098195	0.1567669302630969
100	8.819621894973478	0.1511940021859334

Значения L_1 и L_2 норм функции Грина при $\alpha = 0.4$

При $(3 - \sqrt{7})/4 < \alpha < 1$ коэффициенты при членах 6-го порядка точности отрицательны. В точке $\alpha = (3 - \sqrt{7})/4$ происходит смена знака в коэффициенте при X_6 . Но младший нелинейный член здесь 5-го порядка - устойчивости в С нет.

На рис.5 ($q = 4$) представлено решение задачи со "столбиками" по схеме 4-го порядка точности: "столбик" становится асимметричным, расплывается. Для сравнения см. рис.5 ($q = 3$), на котором представлено то же решение, сосчитанное по схеме 3-го порядка точности.

8. Заключение

Для случая двух пространственных переменных построен аналог явных С-устойчивых схем максимального нечетного порядка точности. Такие схемы хорошо аппроксимируют разрывные решения. Показано, что аналогично случаю одной пространственной переменной схемы максимального четного порядка точности не обладают такими хорошими свойствами.

Литература

1. Цинь Мэн-чжао. О минимальном порядке погрешности интегрирования уравнения методом конечных разностей. ЖВМ и МФ, 1961, 1, N6, 1117-1121.
2. G.Strang. Trigonometric polynomials and difference method of maximum accuracy. J.Math. and Phys., 1962, 41, 147-154.
3. С.И.Сердюкова. О достижимости минимальной погрешности интегрирования гиперболических уравнений методом конечных разностей в равномерной метрике. ДАН СССР, 1980, 255, N6, 1325-1328.
4. С.И.Сердюкова. Асимптотические свойства разностных схем максимального нечетного порядка точности. Мат.заметки, 1982, 32, N4, 517-528.
5. С.И.Сердюкова. Асимптотические оценки функции Грина и "разностной ступеньки" в случае липшиц-непрерывных коэффициентов. ЖВМ и МФ, 1984, 24, N7, 1016-1029.

6. A.C.Hearn, REDUCE User's Manual, Version 3.4. Rand Publication, 1991, CP78 (Rev. 7/91).

7. Chi-Wang Shu, Stanly Osher. Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-Capturing Schemes. J. of Comp.Phys., vol.83, N1 (1989); 32-78.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 ноября 1993 года.