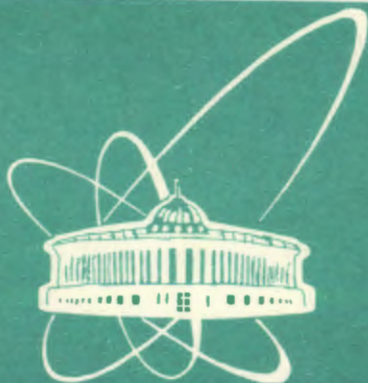


93-368



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-93-368

М.Г.Колева*

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
РАДИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

*Институт математики БАН, София, Болгария

1993

1. Постановка задачи

В последнее время много внимания уделяется изучению класса нелинейных параболических уравнений, решения которых возрастают неограниченно за конечное время [1],[2]. О таких решениях говорят, что они растут в режиме с обострением. Интерес к режимам с обострением вызван их необычными свойствами – локализацией и возникновением нестационарных диссипативных структур. Отметим, что автомодельные решения играют важную роль в изучении этих задач. Они описывают все типы структур и волн, которые могут возникнуть в данной нелинейной среде [3].

Эта работа посвящена численному исследованию свойств автомодельных решений параболической системы двух квазилинейных уравнений

$$\begin{aligned} u_{1t} &= x^{1-N} (x^{N-1} u_1^{\sigma_1} u_{1x})_x + u_1^{\beta_1} u_2^{\gamma_2}, \\ u_{2t} &= x^{1-N} (x^{N-1} u_2^{\sigma_2} u_{2x})_x + u_1^{\gamma_1} u_2^{\beta_2}, \end{aligned} \quad (1)$$

где $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $N = 1, 2, 3$, $\sigma_i > 0$, $\beta_i > 1$, $\gamma_i \geq 0$, $i = 1, 2$.

Система (1) описывает процессы диффузии тепла и горения в двухкомпонентных средах с нелинейной теплопроводностью и объемными источниками. Функции $u_1(t, x)$ и $u_2(t, x)$ можно трактовать как температуры взаимодействующих друг с другом компонентов некоторой горючей смеси [1].

Для системы (1) ставится следующая начально-краевая задача

$$u_i(0, x) = u_{i,0}(x) < \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{N-1} u_i^{\sigma_i} u_{ix} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_i} x^{N-1} u_i^{\sigma_i} u_{ix} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow x_i} x^{N-1} u_i = 0.$$

где $x_i \leq \infty$, $i = 1, 2$.

Исследуются автомодельные решения $u_A = (u_{1A}, u_{2A})$, инвариантные относительно группы преобразований растяжения по радиусу, т.е. вида

$$\begin{aligned} u_{1A} &= g_1(t) f_1(\xi), & g_1(t) &= (1 - t/T_0)^{m_1}, \\ u_{2A} &= g_2(t) f_2(\xi), & g_2(t) &= (1 - t/T_0)^{m_2}, \\ \xi &= x/\varphi(t), & \varphi(t) &= (1 - t/T_0)^n, \end{aligned} \quad (2)$$

© Объединенный институт ядерных исследований. Дубна. 1993

Здесь T_0 -время существования решения (время обострения), $\alpha_1 = \gamma_1 + 1 - \beta_1$, $\alpha_2 = \gamma_2 + 1 - \beta_2$, $p = (\beta_1 - 1)(\beta_2 - 1) - \gamma_1 \gamma_2$, $m_1 = \alpha_2/p$, $m_2 = \alpha_1/p$, $n = 0.5(m_1 \sigma_1 + 1)$.

Автомодельные решения (2) существуют, если параметры системы удовлетворяют условию

$$\sigma_1(\gamma_2 + 1 - \beta_2) = \sigma_2(\gamma_1 + 1 - \beta_1). \quad (3)$$

Режим с обострением реализуется по обоим компонентам u_{1A} и u_{2A} при

$$m_1 < 0, \quad m_2 < 0. \quad (4)$$

Как следует из (2), многие свойства автомодельных решений, проявляющиеся при $t \rightarrow T_0$, зависят от знака параметра n :

$n < 0$ – HS -режим. Решение u_A нелокализовано. При $t \rightarrow T_0$ его компоненты u_{1A} и u_{2A} стремятся к бесконечности во всем пространстве;

$n = 0$ – S -режим. Решение u_A локализовано, компоненты u_{1A} и $u_{2A} \rightarrow \infty$ на ограниченных длинах;

$n > 0$ – LS -режим. Решение u_A локализовано, компоненты u_{1A} и u_{2A} неограниченно возрастают только в одной точке пространства.

В этой работе исследуются автомодельные решения LS -режима.

Функцию $F = (f_1, f_2)$, которая определяет пространственную структуру автомодельного решения, принято называть собственной функцией (СФ) горения нелинейной среды. Она является решением системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} L_1(f_1, f_2) &\equiv -\xi^{1-N} (\xi^{N-1} f_1^{\sigma_1} f_1')' + n \xi f_1' - m_1 f_1 - f_1^{\beta_1} f_2^{\gamma_2} = 0, \\ L_2(f_1, f_2) &\equiv -\xi^{1-N} (\xi^{N-1} f_2^{\sigma_2} f_2')' + n \xi f_2' - m_2 f_2 - f_1^{\gamma_1} f_2^{\beta_2} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь без ограничения общности выбрано $T_0 = 1$.

В LS -режиме $F = (f_1, f_2)$ удовлетворяет граничным условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{N-1} f_i^{\sigma_i} f_i' = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{N-1} f_i^{\sigma_i} f_i' = 0, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \xi^{N-1} f_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (6)$$

Известно [4], что решение F имеет асимптотику

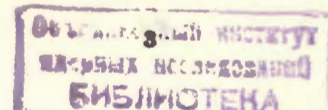
$$f_i(\xi) = C_i \xi^{m_i/n} (1 + y_i(\xi)), \quad y_i(\xi) \rightarrow 0 \quad \text{когда } \xi \rightarrow \infty, \quad i = 1, 2. \quad (7)$$

На основании этой асимптотики можно поставить краевое условие третьего рода при больших значениях ξ

$$f_i'(\xi) = (m_i/n) (f_i(\xi)/\xi), \quad \xi = l \gg 1, \quad i = 1, 2. \quad (8)$$

Используя эти условия и удовлетворяя требованию о конечности энергии решения, приходим к следующим соотношениям между параметрами N , n и m_i , $i = 1, 2$:

$$0 < Nn < -m_1, \quad 0 < Nn < -m_2. \quad (9)$$



Следуя [4], системы (1) и (5) будем называть системами слабой обратной связи, если $p > 0$, и системами сильной обратной связи, если $p < 0$. Если параметры удовлетворяют равенствам

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha, \quad \beta_1 = \beta_2 = \beta, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma,$$

то системы называются симметричными.

2. Предварительные сведения

Исследование системы одномерных квазилинейных параболических уравнений было начато в [5], [6]. В этих работах получены необходимые условия существования автомодельных решений и оценка снизу времени обострения. Численные эксперименты проведены только в случае $n = 0$ (S -режим).

Собственные функции LS -режима исследованы в цикле работ [4], [7], [8-11], где подробно проанализирована структура линейных приближений к решениям системы (5), дана оценка числа возможных начальных приближений и предложены методы их построения. В случае $N = 1$ численно получены некоторые СФ. При дискретизации нелинейной краевой задачи использовался метод конечных разностей, а для решения нелинейной системы разностных уравнений - различные итерационные методы: метод Ньютона и метод стрельбы.

В работе [12] предложен иной подход к вычислению СФ горения двухкомпонентной среды. Он основан на использовании непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН) и метода конечных элементов (МКЭ). Благодаря эффективности разработанного алгоритма и высокой скорости сходимости итерационного процесса был сделан более полный численный анализ структуры СФ при $N = 1$. Исследована и эволюция одномерных решений системы в зависимости от значений параметров среды.

Основная цель данной работы состоит в получении СФ двухкомпонентной среды в случаях цилиндрической и сферической симметрии, т.е. $N = 2, 3$, и численном анализе поведения этих СФ в зависимости от значений параметров среды.

Другая важная проблема, рассматриваемая в этой работе, - существование СФ двухкомпонентной среды с левым фронтом. Напомним, что такие СФ для однокомпонентной среды были уже численно и качественно исследованы [13], [10], [11]. Сначала СФ с левым фронтом были обнаружены в результате численных экспериментов в [13] для значений параметров σ и β , близких к S -режиму, т.е. $\beta \rightarrow (\sigma + 1) + 0$, $N = 2, 3$. Потом существование этих функций было строго доказано в [11].

3. Численный метод

Решение нелинейной автомодельной задачи реализовано с использованием НАМН с последующим решением эволюционного уравнения по МКЭ. Определим оператор $L = (L_1, L_2)$, действующий на функции

$$F = (f_1, f_2) \in D, \quad D = \left\{ f_i : \xi^{0.5(N-1)} f_i^{\sigma_i+1}, \xi^{0.5(N-1)} (f_i^{\sigma_i+1})' \in L_2(0, l), i = 1, 2 \right\}.$$

Будем искать нетривиальные решения уравнения $L(F) = 0$, где функция F удовлетворяет краевым условиям (6), (8).

Ньютоновская итерационная схема [14], [15] для решения этой задачи имеет вид

$$L'(F_k)V_k = -L(F_k), \quad F_{k+1} = F_k + \tau_k V_k, \quad 0 < \tau_k \leq 1. \quad (10)$$

Здесь через $L'(F_k)$ обозначена производная Фреше оператора L , вычисленная в точке F_k , а F_0 - заданная функция (начальное приближение). Если F_0 удовлетворяет краевым условиям (6), (8), то для итерационных поправок $V_k = (v_{1k}, v_{2k})$ выполняются условия $\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{N-1} f_i^{\sigma_i} v_{ik}' = 0$, $v_{ik}'(\xi) = (m_i/n) (v_{ik}(\xi)/\xi)$, $\xi = l$, $i = 1, 2$.

Оператор L' можно представить в матричной форме

$$L' = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix},$$

$$L_{11} \equiv -\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^{N-1} \left(f_1^{\sigma_1} \frac{d}{d\xi} + \sigma_1 f_1^{\sigma_1-1} f_1' \right) \right] + n \xi \frac{d}{d\xi} - m_1 - \beta_1 f_1^{\beta_1-1} f_2^{\beta_2},$$

$$L_{22} \equiv -\xi^{1-N} \frac{d}{d\xi} \left[\xi^{N-1} \left(f_2^{\sigma_2} \frac{d}{d\xi} + \sigma_2 f_2^{\sigma_2-1} f_2' \right) \right] + n \xi \frac{d}{d\xi} - m_2 - \beta_2 f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2-1},$$

$$L_{12} \equiv -\gamma_2 f_1^{\beta_1} f_2^{\beta_2-1}, \quad L_{21} \equiv -\gamma_1 f_1^{\sigma_1-1} f_2^{\beta_2}.$$

Численное решение задачи (10), (11) проводится на основе метода Галеркина. Для заданной функции $F \in D$ необходимо найти функцию $V \in H^1(0, l) \times H^1(0, l)$ такую, что интегральное тождество

$$(L'(F)V, W) = -(L(F), W), \quad \forall W \in H^1(0, l) \times H^1(0, l). \quad (12)$$

удовлетворяется для любой функции $W \in H^1(0, l) \times H^1(0, l)$. Здесь

$$H^1(0, l) = \{v : \xi^{0.5(N-1)}v, \xi^{0.5(N-1)}v' \in L_2(0, l)\},$$

а скалярное произведение векторов V и W определяется формулой

$$(V, W) = \int_0^l \xi^{N-1}(v_1w_1 + v_2w_2) ds.$$

Для дискретизации интегрального тождества (12) используем линейные и квадратичные конечные элементы. При аппроксимации нелинейных коэффициентов уравнения применяется интерполяция по базису.

На каждом шаге итерационного процесса приходим к решению системы линейных алгебраических уравнений с несимметричной ленточной матрицей. Решение осуществляется с использованием LU - разложения матрицы этой системы [13].

Итерационный шаг τ_k определяется по экстраполяционной формуле [16]

$$\tau_k = \begin{cases} \min(1, \tau_{k-1}\delta_{k-1}/\delta_k), & \text{если } \delta_k < \delta_{k-1}, \\ \max(\tau_0, \tau_{k-1}\delta_{k-1}/\delta_k), & \text{если } \delta_k \geq \delta_{k-1}. \end{cases}$$

Здесь δ_k является некоторой нормой невязки $L(F_k)$. По мере ее стремления к нулю, $\tau_k \rightarrow 1$ и схема переходит в классический метод Ньютона. При $\tau_k < 1$ ньютоновский итерационный процесс имеет линейную скорость сходимости, но зато существенно расширяется область задания начальных приближений.

4. Выбор начальных приближений

Основным моментом в реализации итерационного процесса (10), (11) является задание начальных приближений. Считается [1], что компоненты СФ в области немонотонности совершают колебания около гомотермического решения, а при больших ξ описываются известной асимптотикой (7). Это позволяет использовать технику "сшивания" для получения начальных приближений.

4.1. Метод "сшивания"

Система (5) имеет гомотермическое решение $F_h = (f_{1,0}, f_{2,0})$

$$f_{1,0} = (-m_1)^{-m_1} \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^{n/p}, \quad f_{2,0} = (-m_2)^{-m_2} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^{n/p}$$

Начальные приближения $F_0 = (f_1^0, f_2^0)$ ищем в виде

$$f_i^0 = \begin{cases} f_{i,0}(1 + \theta_i(\xi)), & \xi \leq \xi_i, \\ C_i \xi^{m_i/n}, & \xi > \xi_i, \end{cases} \quad i = 1, 2,$$

где ξ_1 и ξ_2 - точки "сшивания", а $\Theta = (\theta_1, \theta_2)$ - решение линеаризованной около гомотермического решения системы $L'(F_h)\Theta = 0$:

$$-\xi^{1-N}(\xi^{N-1}f_{1,0}'\theta_1)' + n\xi\theta_1' - m_1(1 - \beta_1)\theta_1 + \gamma_2 m_1 \theta_2 = 0,$$

$$-\xi^{1-N}(\xi^{N-1}f_{2,0}'\theta_2)' + n\xi\theta_2' - m_2(1 - \beta_2)\theta_2 + \gamma_1 m_2 \theta_1 = 0,$$

с начальными условиями

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi^{N-1}\theta_i' = 0, \quad \theta_i(0) = a_i < \infty, \quad i = 1, 2.$$

Компоненты θ_1 и θ_2 получаются в виде рядов, которые зависят от значений констант a_1 и a_2 . В зависимости от способов определения неизвестных параметров - точек "сшивания" ξ_1 и ξ_2 , констант C_1, C_2, a_1, a_2 - можно получить начальные приближения различной гладкости.

Дальше через (k, l) будем обозначать начальное приближение (решение), чьи компоненты $f_1^0(f_1)$ и $f_2^0(f_2)$ пересекают компоненты гомотермического решения $f_{1,0}$ и $f_{2,0}$ в k и l точках соответственно.

C¹-приближения. Этот метод предложен в [4]. Подробно здесь его не будем рассматривать. Отметим только, что условие гладкости первой производной приводит к системе шести нелинейных уравнений относительно $\xi_1, \xi_2, C_1, C_2, a_1, a_2$. Она преобразуется в системе двух нелинейных уравнений относительно ξ_1 и ξ_2 , которая решается методом Ньютона.

C⁰-приближения. В этом случае константы a_1, a_2 для начального приближения типа (k, l) выбираются следующим образом

$$\begin{aligned} \text{когда } k - \text{нечетное, } l - \text{нечетное,} & \text{ то } a_1 = \varepsilon, \quad a_2 = \varepsilon; \\ \text{когда } k - \text{нечетное, } l - \text{четное,} & \text{ то } a_1 = \varepsilon, \quad a_2 = -\varepsilon; \\ \text{когда } k - \text{четное, } l - \text{нечетное,} & \text{ то } a_1 = -\varepsilon, \quad a_2 = \varepsilon; \\ \text{когда } k - \text{четное, } l - \text{четное,} & \text{ то } a_1 = -\varepsilon, \quad a_2 = -\varepsilon, \end{aligned} \quad \text{где } \varepsilon > 0.$$

Точки "сшивания" ξ_1 и ξ_2 определяются как k -й и l -й корень уравнений

$$\theta_1(\xi) = 0, \quad \theta_2(\xi) = 0$$

соответственно, а из условий непрерывности начального приближения в точках "сшивания" вычисляются константы C_1, C_2 ,

$$C_i = f_{i,0} \xi_i^{-m_i/n}, \quad i = 1, 2.$$

Третий способ выбора начальных приближений. Пусть $\sigma_i, \beta_i, \gamma_i, i = 1, 2$ - заданные параметры. Определяем $\beta_1^* = \sigma_1 + 1 - 2n/m_1, \beta_2^* = \sigma_2 + 1 - 2n/m_2$ и рассматриваем две однокомпонентные задачи с параметрами σ_1, β_1^* и

σ_2, β_2^* . Собственные функции этих задач с k и l максимумов соответственно используются в качестве начального приближения для решения типа (k, l) .

С помощью этих трех методов в работе получены начальные приближения с качественно подобными и качественно различными компонентами как для системы сильной обратной связи, так и для системы слабой обратной связи.

4.2. Параметрические начальные приближения

Параметрические начальные приближения в случае $N = 1$ предложены в работе [7]. Предполагаем, что нужно получить СФ для параметров $\sigma_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*$. Параметры $\sigma_i, \beta_i, \gamma_i$ рассматриваются как функции непрерывного параметра $\lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]$, так что при $\lambda = \lambda_1$ получается исходная задача, т.е. $\sigma_i(\lambda_1) = \sigma_i^*, \beta_i(\lambda_1) = \beta_i^*, \gamma_i(\lambda_1) = \gamma_i^*$, а при $\lambda = \lambda_0$ имеем задачу, чьи СФ легко вычисляются. Такие задачи называются однопараметрическим семейством задач.

Пусть $\lambda_0 = \lambda^1 < \lambda^2 < \lambda^3 < \dots < \lambda^r = \lambda_1$. Решение, построенное для $\lambda = \lambda_0$, берется в качестве начального приближения решений задач для λ^2 и т.д. Двигаясь таким образом по значениям параметра λ , при $\lambda = \lambda_1$ получаем СФ исходной задачи.

Этот алгоритм легко можно применить для $N = 2, 3$.

Однопараметрические семейства решений для симметричных задач. Обозначим через M множество допустимых параметров симметричных задач. Для таких параметров условия существования автомодельных решений (3), (4) всегда выполняются, а условие конечности энергии (9) эквивалентно условию

$$N(1 + \sigma) < N(\beta + \gamma) < 2 + N(1 + \sigma), \quad \sigma > 0, \quad \beta > 1, \quad \gamma \geq 0.$$

Пусть $\sigma = \sigma_0 > 0, \beta + \gamma = \beta_0 > 0, N(1 + \sigma_0) < N\beta_0 < 2 + N(1 + \sigma_0)$. Один из простейших способов построения однопараметрического семейства решений является следующим: $\gamma(\lambda) = \lambda\beta_0, \beta(\lambda) = \beta_0(1 - \lambda), \lambda \in [0, \lambda_1], \lambda_1 < (\beta_0 - 1)/\beta_0$. Если $\lambda = 0$, то $\gamma = 0$ и система (5) вырождается в одно уравнение однокомпонентной среды с параметрами σ_0, β_0 . Решения этого уравнения, которые легко получаются [13], используем как начальное приближение при решении задач с параметрами $\beta(\lambda^1), \gamma(\lambda^1)$ и т.д.

Однопараметрические семейства решений для несимметричных задач. Алгоритм построения СФ для несимметричных задач использует СФ для симметричных задач. Пусть задана точка $x = (\sigma_1, \sigma_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2) \in \mathcal{D}$, где \mathcal{D} — множество допустимых параметров, определенное неравенствами (3), (4), (9). Предположим, что $|m_1| > |m_2|$. (Случай $|m_1| < |m_2|$ разбирается аналогично.) Определяем симметричную точку x_s с координатами $\beta_s = 0.5(\beta_1 + \beta_2), \gamma_s = 0.5(\gamma_1 + \gamma_2), \sigma_s = (2n_s - 1)/m_s$, где $n_s = n$. Допустимая

кривая, которая соединяет точки x_s и x , строится по формулам

$$\beta_1(\lambda) = \beta_s + 0.5\lambda(\beta_1 - \beta_2), \quad \gamma_1(\lambda) = \gamma_s + 0.5\lambda(\gamma_1 - \gamma_2),$$

$$\beta_2(\lambda) = \beta_s + 0.5\lambda(\beta_2 - \beta_1), \quad \gamma_2(\lambda) = \gamma_s + 0.5\lambda(\gamma_2 - \gamma_1),$$

$$n(\lambda) = \begin{cases} \varepsilon|m_2(\lambda)|, & n > \varepsilon|m_2(\lambda)|, \\ n, & n \leq \varepsilon|m_2(\lambda)|, \end{cases} \quad \varepsilon = n/|m_2|, \quad (13)$$

$$\sigma_i(\lambda) = (2n(\lambda) - 1)/m_i(\lambda), \quad i = 1, 2.$$

Если $x \in \mathcal{D}$, то всегда $0 < \varepsilon < 1$. Очевидно, что

$$x(\lambda) = (\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda), \beta_1(\lambda), \beta_2(\lambda), \gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda)) \in \mathcal{D} \quad \forall \lambda \in [0, 1].$$

Решая задачу для x_s и двигаясь по параметру λ от 0 до 1, при $\lambda = 1$ получаем решение в несимметричной точке x .

Метод построения однопараметрических семейств решений позволяет не только получить различные СФ, но и проследить зависимости поведения решений от значений параметров среды.

5. Численные результаты

Цель численных экспериментов была:

- исследование точности разработанного численного метода;
- проверка эффективности предложенных способов получения начальных приближений и эффективности численного метода вычисления СФ;
- исследование эволюции СФ в зависимости от значений параметров среды;
- вычисление СФ двухкомпонентной среды с левым фронтом.

5.1. Исследование точности метода

Для установления точности разработанных вычислительных схем были проведены численные эксперименты на последовательности вложенных сектор. В таблице 1 приведены значения компонент f_1, f_2 решения типа (1, 2) при $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 2.3956, \beta_1 = 3.18, \beta_2 = 3.9156, \gamma_1 = 0.18, \gamma_2 = 0.52, N = 2$ в разных точках трех вложенных разбиений с шагами 0.4, 0.2, 0.1 для квадратичных элементов и 0.2, 0.1, 0.05 для линейных элементов. Порядок точности α вычислен по методу Рунге

$$\alpha = \ln \left[\frac{(f_i^h - f_i^{h/2})}{(f_i^{h/2} - f_i^{h/4})} \right] \ln^{-1} 2, \quad i = 1, 2.$$

Анализ численных результатов указывает на сверхсходимость $O(h^4)$ МКЭ при использовании квадратичных элементов ($\alpha \approx 2^2$) и сходимость порядка $O(h^2)$ ($\alpha \approx 2$) при использовании линейных элементов.

Для достижения критерия прекращения итераций (норма невязки меньше 10^{-5}) в большинстве случаев было необходимо около 10–13 итераций

при $\tau_0 = 0.1$. Число итераций существенно увеличивается при вычислении СФ с левым фронтом.

Таблица 1

h	$\xi = 0$	α	$\xi = 0.8$	α	$\xi = 1.6$	α	$\xi = 3.2$	α
Линейные элементы								
f_1								
0.20	0.8531039		0.8283898		0.7511314		0.4619716	
0.10	0.8520007		0.8279043		0.7508823		0.4619367	
0.05	0.8516932	1.84	0.8277823	1.99	0.7508199	2.00	0.4619279	1.98
f_2								
0.20	0.5240968		0.5838984		0.6889737		0.7440246	
0.10	0.5265519		0.5844895		0.6890886		0.7433674	
0.05	0.5272537	1.81	0.5846384	1.99	0.6891183	1.96	0.7432015	1.99
Квадратные элементы								
f_1								
0.40	0.8515707		0.8277474		0.7508015		0.4619259	
0.20	0.8515762		0.8277419		0.7507992		0.4619250	
0.10	0.8515767	3.45	0.8277416	3.95	0.7507990	4.02	0.4619249	4.89
f_2								
0.40	0.5273499		0.5846625		0.6891194		0.7421571	
0.20	0.5275138		0.5846865		0.6891277		0.7431468	
0.10	0.5275261	3.75	0.5846880	3.97	0.6891282	3.98	0.7431461	3.97

5.2. Собственные функции из начальных приближений, полученных методом "сшивания"

Используя начальные приближения, полученные методом "сшивания", установили следующие особенности:

C^1 -приближения произвольного вида (k, l) приводят к получению СФ с качественно подобными компонентами. Этот факт установлен как для системы сильной обратной связи, так и для системы слабой обратной связи. В то же время численные эксперименты показали, что для системы слабой обратной связи использование C^0 -приближений обеспечивает получение СФ, которые сохраняют структуру начальных приближений. На рис.1а показаны C^0 -начальное приближение и соответствующее решение типа (1,2) для параметров $\sigma_1 = 2, \sigma_2 = 2.3956, \beta_1 = 3.18, \beta_2 = 3.9156, \gamma_1 = 0.18, \gamma_2 = 0.52, N = 3$, а на рис.1б - C^0 - начальные приближение и соответствующее решение типа (3,2) для параметров $\sigma_1 = \sigma_2 = 2, \beta_1 = \beta_2 = 3.2, \gamma_1 = \gamma_2 = 0.2, N = 2$.

5.3. Исследование эволюции СФ в зависимости от значений параметров среды

Рассматриваем симметричные однопараметрические семейства реше-

$\sigma_1 = 2.0000 \quad \beta_1 = 3.1800 \quad \gamma_1 = 0.18$
 $\sigma_2 = 2.3956 \quad \beta_2 = 3.9156 \quad \gamma_2 = 0.52$
 $N = 3 \quad (1, 2)$

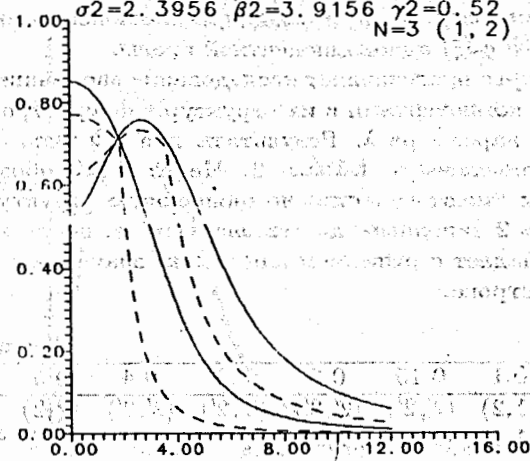


Рис. 1а. Нач. приближение - - -
Решение —

$\sigma = 2 \quad \beta = 3.2 \quad \gamma = 0.2 \quad N = 2$

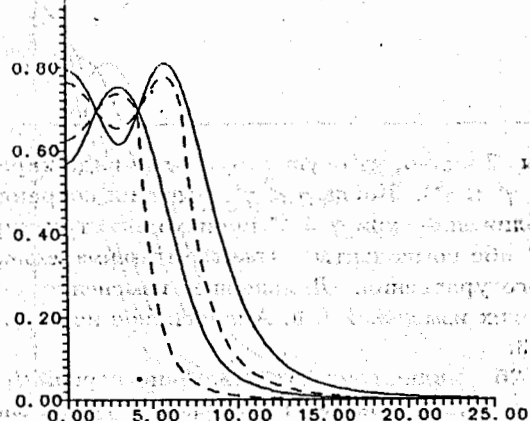


Рис. 1б. Нач. приближение - - -
Решение —

ний, полученные по формулам

$$\sigma_0 = 2, \beta_0 = 3.4, \gamma(\lambda) = \lambda\beta_0, \beta(\lambda) = \beta_0(1 - \lambda), \lambda \in [0, \lambda_1], \lambda_1 = 2.3/\beta_0, N = 2, 3.$$

Когда $\gamma = 0$ ($\lambda = 0$), система вырождается в одно уравнение с параметрами $\sigma = 2, \beta = 3.4$. Для этого уравнения можно получить все возможные СФ - $g_k(\xi), k = 1 \div 5$ [13]. Их различные комбинации $(g_k, g_l), k, l = 1 \div 5$ берем как начальные приближения для СФ типа (k, l) при $\lambda = \lambda^1$.

Легко заметить, что решения типа (k, k) не только не изменяются при движении по параметру λ , но и каждая их компонента совпадает с соответствующей СФ $g_k(\xi)$ однокомпонентной среды.

Особый интерес представляет исследование эволюции СФ с качественно различными компонентами и их структурная перестройка в зависимости от значения параметра λ . Результаты для СФ типа (k, l) , $l < k$, $k, l = 1 \div 5$, $N = 2$ приведены в таблице 2. Через (k', k') обозначено решение, чьи компоненты имеют качественно одинаковую структуру, но не совпадают. Таблица 2 заполнена до тех значений γ , после которых решение полностью совпадает с решением для тех же значений параметров среды в предыдущей строке.

Таблица 2

γ	0	0.1	0.15	0.2	0.3	0.4	0.5	2.3
р	(1,2)	(1,2)	(2',2')	(2',2')	(2',2')	(2',2')	(2,2)	(2,2)
е	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)	(1,3)
ш	(1,4)	(1,4)	(1,4)	(1,4)	(1,4)	(1,4)	(1,4)	(1,4)
е	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)	(1,5)
н	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(2,3)	(3',3')	(3,3)	(3,3)
и	(2,4)	(2,4)	(2,4)	(2,4)	(2,4)	(2,4)	(2,4)	(2,4)
е	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)	(2,5)
	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)	(3,4)
	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)	(3,5)
	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)	(4,5)

Из таблицы 2 видно, что существуют два вида характерных значений параметра γ : γ^* и γ^{**} . Когда $\gamma < \gamma^*$, решения сохраняют структуру начальных приближений, при $\gamma = \gamma^*$ происходит структурная перестройка, а при $\gamma = \gamma^{**}$ обе компоненты становятся равными некоторой собственной функции одного уравнения. Дальнейшее изменение параметра γ уже не вызывает никаких изменений СФ. Аналогичное исследование проведено и в случае $N = 3$.

Рис.2а и 2б иллюстрируют поведение первой f_1 и второй f_2 компонент СФ типа $(1,2)$ — показаны графики f_1, f_2 для значений параметра $\gamma = 0, 0.1, 0.15, 0.3, 0.5$, $\gamma^* = 0.15$, $\gamma^{**} = 0.5$.

Интересный результат получен при прослеживании эволюции решений типа $(1,3)$ из рассматриваемых однопараметрических семейств. В этом случае $\gamma^* = 0.2$. Когда γ равно 0.3, решения переходят в решения типа $(1,2)$. Подробный численный анализ СФ для значений γ между 0.2 и 0.3 показал следующее. При

$$\gamma^* < \gamma \leq \gamma_N^b, \text{ где } \gamma_N^b = \begin{cases} 0.25 & N=2 \\ 0.24 & N=3 \end{cases}$$

решения сохраняют структуру $(1,3)$. Первая компонента f_1 совпадает с g_1 . Первая часть второй компоненты f_2 приближается к f_1 , ее минимум

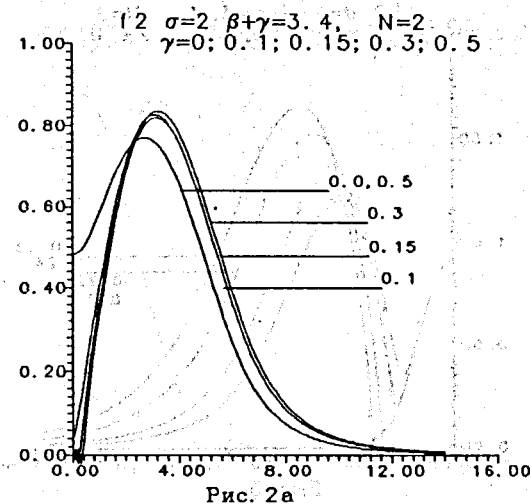


Рис. 2а

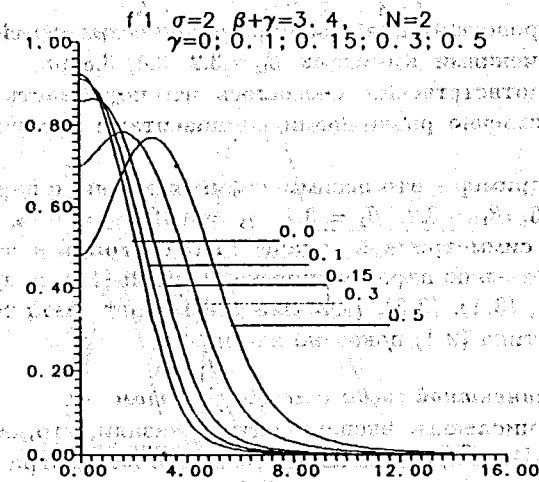
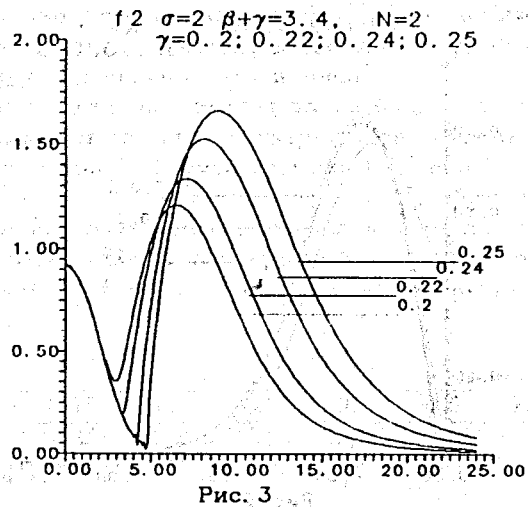


Рис. 2б

уменьшается к нулю, а ее второй максимум удаляется от второй компоненты гомотермического решения и двигается вправо. На рис.3 показано поведение f_2 для $\gamma = 0.2, 0.22, 0.24, 0.25$, $N = 2$. Отметим, что все попытки получить решения при $\gamma \in (\gamma_N^b, 0.3)$ оказались безуспешными. Это позволяет нам сделать предположение о существовании бифуркации вблизи точек $\sigma = 2$, $\beta = 3.4 - \gamma_N^b$, $\gamma = \gamma_N^b$, $N = 2, 3$.

Численные результаты показывают, что с возрастанием N подобласть допустимых значений параметров, где существуют решения с качественно различными компонентами, сокращается. Размер этой области существенно зависит и от значения автомодельного параметра n . Численные



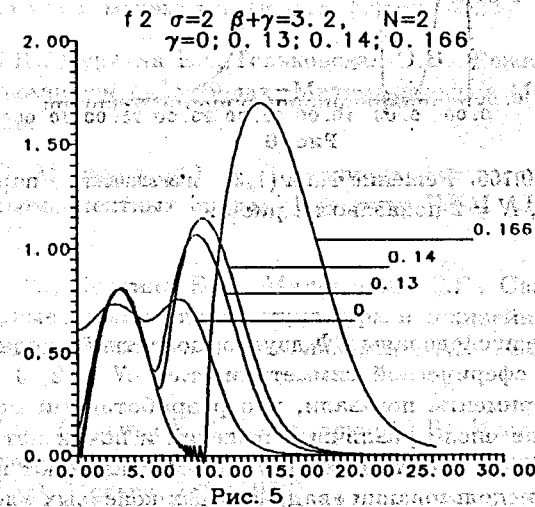
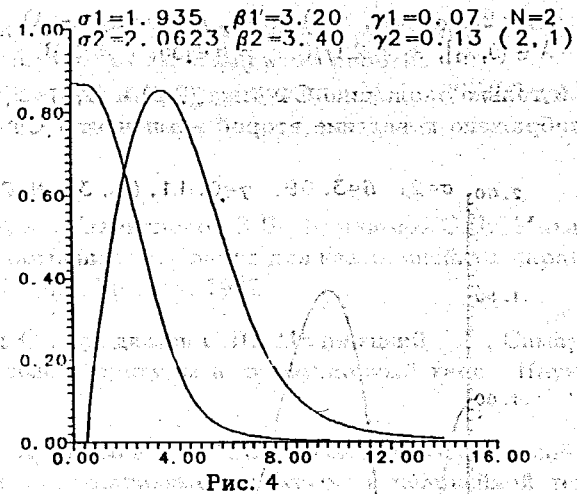
эксперименты проведены для однопараметрических семейств решений с различными значениями параметров $\beta_0 = 3.2, 3.4, 3.8$ ($\sigma_0 = 2$) и $n = 0.0455, 0.0833, 0.1429$ соответственно. Оказалось, что подобласть существования решения с качественно различными компонентами увеличивается с возрастанием n .

Следующий пример - это несимметричная задача с параметрами $\sigma_1 = 1.935, \sigma_2 = 2.0623, \beta_1 = 3.2, \beta_2 = 3.4, \gamma_1 = 0.07, \gamma_2 = 0.13, N = 2$. Начиная от решений симметричной задачи с параметрами $\sigma = 2, \beta = 3.3, \gamma = 0.1, N = 2$ и двигаясь по параметрической кривой (13), получаем СФ типа (1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (2,3), (3,2) для рассматриваемой несимметричной точки. Решение типа (2,1) показано на рис.4.

5.4. СФ двухкомпонентной среды с левым фронтом

Проведенные численные эксперименты показали, что, как и в однокомпонентной среде [13], значение автомодельного параметра n является определяющим фактором для получения СФ с левым фронтом - их существование возможно только когда $n \rightarrow 0$. С другой стороны, в рамках одного однопараметрического семейства решений с достаточно малым значением n установлено, что существенным фактором оказывается параметр γ . При фиксированных значениях параметров σ и n область, где СФ обращаются в ноль, расширяется с возрастанием γ .

Зависимость от n и γ приводит к следующим изменениям в поведении компонент решений $F = (f_1, f_2)$. Компонента с четным номером $2k$ аннулируется в окрестности центра симметрии, т.е. $\exists \xi_k^* : f_1(\xi) \equiv 0 \quad 0 \leq \xi \leq \xi_k^*$. ξ_k^* возрастает с уменьшением n , а в рамках одного семейства решений (т.е. σ и n не меняются) - с возрастанием γ . Кроме того, при $k \neq 1$ эта компонента



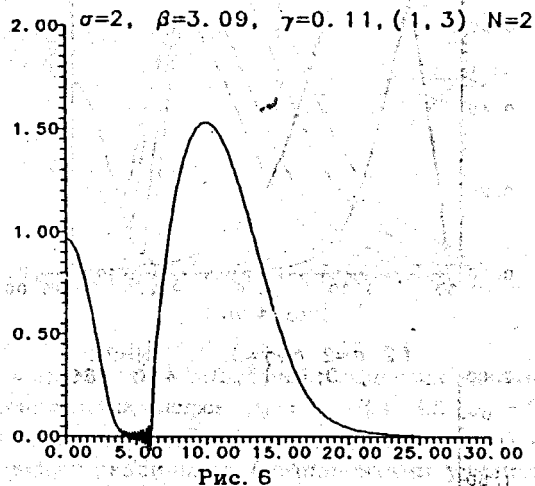
f_1 вырождается в k раздельные функции, которые имеют характер второй СФ. Компонента с нечетным номером $2k+1$ вырождается в одну первую СФ и в k раздельные функции с характером второй СФ. Область, где эта компонента аннулируется, расширяется с уменьшением n и возрастанием γ .

Выводы для поведения СФ с левым фронтом сделаны на основании численного анализа решений однопараметрических семейств:

$$\sigma_0 = 2, \beta_0 = 3.4, \gamma(\lambda) = \lambda\beta_0, \beta(\lambda) = \beta_0(1-\lambda), \lambda \in [0, \lambda_1], \lambda_1 = 2.3/\beta_0, n = 0.0833, N = 2, 3, \quad (14)$$

$$\sigma_0 = 2, \beta_0 = 3.2, \gamma(\lambda) = \lambda\beta_0, \beta(\lambda) = \beta_0(1 - \lambda), \lambda \in [0, \lambda_1], \lambda_1 = 2.1/\beta_0, n = 0.0455, N = 2, 3. \quad (15)$$

Здесь покажем только эволюцию СФ типа (2,4) и (1,3) из (15) при $N = 2$. На рис.5 изображено поведение второй компоненты СФ типа (2,4) при



$\gamma = 0, 0.13, 0.14, 0.166$. Решение типа (1,3) для значений параметров $\sigma = 2, \beta = 3.09, \gamma = 0.11, N = 2$ показано на рис 6.

6. Заключение

В этой работе исследованы СФ двухкомпонентной среды в случаях цилиндрической и сферической симметрии, т.е. $N = 2, 3$. Проведенные численные эксперименты показали, что разработанный метод позволяет получить большое число различных решений и почти автоматизировать процесс вычисления. Численные результаты указывают на сверхсходимость МКЭ при использовании квадратичных конечных элементов.

С помощью модифицированного метода "спивания" получены C^0 -приближения с качественно различными компонентами, которые для системы слабой обратной связи приводят к СФ, сохраняющим их структуру. Для симметричной и несимметричной систем сильной обратной связи вычислены СФ с качественно подобными компонентами.

Проведен детальный численный анализ эволюции СФ в зависимости от значений параметров среды. В процессе исследований найдена точка бифуркации в области допустимых значений параметров.

Качественно новым результатом является обнаружение СФ двухкомпонентной среды с левым фронтом. Доказательство существования этих решений является предметом следующей работы.

Автор благодарен С.Н. Димовой и М.С. Касчиеву за творческие обсуждения и помощь при выполнении этой работы.

Эта работа финансирована по контракту ММ - 207/92 с МОН.

Литература

1. Самарский А.А., Галактионов В.В., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. Наука, Москва, 1987.
2. Ахромеева Т.С., Курдюмов С.П., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. Наука, Москва, 1992.
3. Еленин Г.Г., Курдюмов С.П., Михайлов А.П., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. Вычисл. математика и мат. физика, 2(23) 1983 380.
4. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Тельковская О.В. Режимы с обострением в двухкомпонентных средах - Математическое Моделирование, 1(1), 1989, 35.
5. Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г., Нестационарные диссипативные структуры в двухкомпонентных средах, Препринт ИПМ АН СССР, Москва, 19 (1981).
6. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Малинецкий Г.Г., Самарский А.А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейных двухкомпонентных средах с объемными источниками, ДАН СССР, 258, 1981, 1084.
7. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Тельковская О.В. Исследование собственных функций автомодельной задачи для двухкомпонентной среды, Препринт ИАЭ, Москва, 189 (1986).
8. Тельковская О.В. Структура линеаризованного приближения собственных функций LS-режима двухкомпонентной среды, Препринт ИАЭ, Москва, 4814/1 (1989).
9. Тельковская О.В. Предельные свойства автомодельных решений квазилинейного уравнения теплопроводности со степенным источником, Препринт ИАЭ, Москва, 5037/1 (1990).
10. Тельковская О.В. О некоторых новых типах автомодельных решений уравнений теплопроводности в LS-режиме с обострением, Препринт ИАЭ, Москва, 5021/1 (1990).

11. Гуревич М.И., Тельковская О.В. Существование автомодельных решений нелинейного уравнения теплопроводности с нулем в окрестности начала координат. Препринт ИАЭ, Москва, 5565/1 (1992).
12. S.N. Dimova, M.S. Kaschiev, M.G. Koleva, D.P. Vasileva. Numerical analysis of the blowup regimes of combustion of two-component nonlinear heat-conducting medium (in press).
13. S.N. Dimova, M.S. Kaschiev and S.P. Kurdyumov. Numerical analysis of eigenfunctions for combustion of a nonlinear medium in the radial-symmetric case, USSR Comput. Maths. Math. Phys., 29(6) (1989) 61.
14. Гавурин М.К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов. - Изв. ВУЗов, сер. Матем., 5(6) (1958) 18.
15. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. - ЭЧАЯ, 4(1) (1973) 123.
16. Пузынин И.В., Пузынина Т.П. Алгоритмы и программы решения некоторых задач физики, КГК1-74-34, Будапешт (1974) 93.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 октября 1993 года.