сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-93-350

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова

ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ

1993

В различных задачах физики часто встречаются задачи, когда малый параметр входит в уравнение так, что теория Крылова-Боголюбова не применима. К этому классу задач относятся уравнения с малым параметром при старшей производной. Такие задачи называют сингулярно возмущенными.

Рассмотрим систему уравнений

$$A_\mu: \quad \mu \frac{dz}{dt} = F(z,y,t), \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dt} = f(z,y,t),$$

где $\mu > 0$ – малый параметр, с заданными начальными условиями:

$$z(0,\mu) = z^{00}, \qquad (2)$$
$$y(0,\mu) = y^{00},$$

$x(t) = \{z(t), y(t)\}$ – искомые функции.

Предполагается, что удовлетворены все условия, необходимые для существования решения задачи Коши.

Дифференциальные уравнения с малым параметром при старшей производной возникают во многих областях физики, например, в теории ускорителей. Релятивистское уравнение Лоренца с учетом радиационной силы трения имеет вид[13]:

$$m_0 \ddot{x}_\mu = -\frac{e_0}{c}\dot{x}_0 F_{\mu\nu} + \frac{2e_0^2}{3c^3}\left(\dddot{x}_\mu - \frac{1}{c^2}\dot{x}_\mu \ddot{x}_\nu \ddot{x}_\nu\right),$$

где c – скорость света и величина $\frac{1}{c}$ – малый параметр.

Другой пример из квантовой хромодинамики:

$$\left(\sqrt{-\nabla^2+m_1^2} + \sqrt{-\nabla^2+m_2^2} + V(r) - M\right)\psi(\bar{r}) = 0,$$

при разложении подкоренного выражения в ряд с учетом физических величин получается бесконечная система дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной[12].

В релятивистской квантовой механике существует уравнение Кадышевского, которое можно представить в виде[11]

$$\left[q^2+O(\varepsilon^2)-V(r)+\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2\varepsilon^2}{4!}\frac{d^4}{dr^4}+\frac{2\varepsilon^4}{6!}\frac{d^6}{dr^6}-\frac{2\varepsilon^6}{8!}\frac{d^8}{dr^8}+\dots\right]$$

$$\times\,\Psi_{q0}^{(r)}=0,$$

где ε – малый параметр. При $\varepsilon=0$ это уравнение превращается в уравнение Шредингера.

Таким образом, область возникновения сингулярных дифференицальных уравнений с малым параметром при старшей производной достаточно широка.

Рассмотрим особенности поведения решений сингулярного уравнения вида (I) на примере (пример взят из книги[4]).

Пусть

$$A_\mu:\ \mu\frac{dx}{dt}=-x+t\ , \qquad (3)$$

$$0\le x\le 1\ ,\ x(0)=1\ .$$

Решение задачи (3) имеет вид

$$x_\mu(t)=(1+\mu)e^{-t/\mu}+t-\mu\ . \qquad (4)$$

Если $\mu=0$, то получается так называемое вырожденное уравнение:

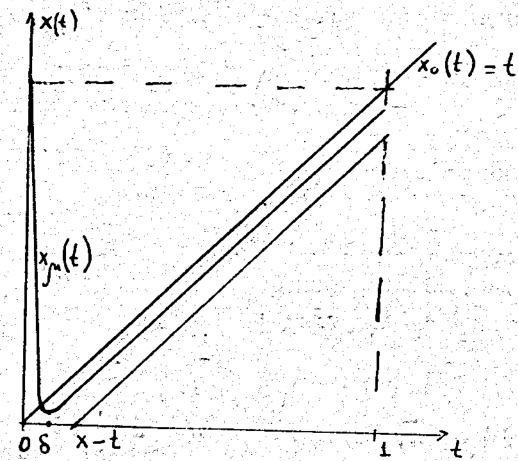
$$A_0\ :\quad 0=-x+t \qquad (5)$$

уже не дифференциальное, а алгебраическое и его решение

$$x_0(t)=t. \qquad (6)$$

Посмотрим на рисунке,как ведут себя решения (4),(6) сингулярной задачи (3) и вырожденной задачи (5).

На рисунке хорошо видно, что решение x_μ возмущенной задачи A_μ не является близким к решению x_0 невозмущенной задачи A_0 при малых μ лишь в малой δ – окрестности начальной точки, а на отрезке $[\delta,1]$, где $\delta>0$ – малое, но фиксированное число, $x_0(t)$ близко к $x_\mu(t)$. Отрезок $[0,\delta]$, где происходит изменение значений решений $x_\mu(t)$ от начального до близкого к $x_0(t)$, называется пограничным слоем, а решение на этом отрезке $[0,\delta]$ – погранслойным. Решение на отрезке $[\delta,1]$ называется регулярным.



Таким образом, из примера хорошо видно, что основная проблема, возникающая при решении сингулярных задач вида (I) это построение таких приближений $x_\mu(t)$, которые пригодны как вне, так и внутри пограничного слоя.

Одним из первых результаты в области сингулярных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной были получены[I,2] А.Н.Тихоновым. Его теоремы легли в основу теории сингулярных уравнений[3,I4].

Существуют различные способы решать сингулярные уравнения вида (I). Один из них – построение приближенных решений с помощью асимптотических рядов по степеням малого параметра μ . Как правило, нахождение асимптотических приближений сводится к решению задачи более простой, чем исходная. В то же время, в реальных задачах, где μ – малое, но фиксированное число, асимптотическое разложение может оказаться довольно грубым приближением для $x_\mu(t)$.

Численное интегрирование сингулярно возмущенных уравнений имеет свои трудности, так как в пограничном слое, при резком изменении значений решения $x_\mu(t)$ при малых μ , многие стандартные численные методы не работают. Разработкой численных методов для сингулярно возмущенных задач занимаются очень многие[5,6,7].

Асимптотическое решение даже достаточно грубое, дает качественное представление о решении и помогает при выборе методики численных расчетов.

Таким образом, для сингулярно возмущенных задач численные и аналитические методы дополняют друг друга. Один из таких методов использован нами.

Построим асимптотическое разложение для решений $x(t,\mu) = \{z(t,\mu), y(t,\mu)\}$ задачи (I)-(2). В дальнейшем мы используем алгоритмы и обозначения из книги[4].

Введем новую переменную

$$\tau = t/\mu. \tag{7}$$

τ - растянутое время.

Асимптотическое разложение ищем в виде:

$$x(t,\mu) = \bar{x}(t,\mu) + \Pi x(\tau,\mu), \tag{8}$$

где

$$\bar{x}(t,\mu) = \bar{x}_0(t) + \mu \bar{x}_1(t) + \ldots + \mu^K \bar{x}_K(t) + \ldots \tag{9}$$

регулярная часть решения и

$$\Pi x(\tau,\mu) = \Pi_0 x(\tau) + \mu \Pi_1 x(\tau) + \ldots + \mu^K \Pi_K x(\tau) + \ldots \tag{10}$$

асимптотическое разложение для погранслойной части решения.

Подставляем разложения (9)-(10) в уравнения (I) и представляем правые части уравнения в виде, аналогичном (9):

$$F = \bar{F} + \Pi F; \quad f = \bar{f} + \Pi f, \tag{11}$$

где

$$\bar{F} = \bar{F}_0(t) + \mu \bar{F}_1(t) + \ldots + \mu^K \bar{F}_K(t) + \ldots, \tag{12}$$
$$\Pi F = \Pi_0 F(\tau) + \mu \Pi_1 F(\tau) + \ldots + \mu^K \Pi_K F(\tau) + \ldots,$$

и

$$\bar{f} = \bar{f}_0(t) + \mu \bar{f}_1(t) + \ldots + \mu^K \bar{f}_K(t) + \ldots,$$
$$\Pi f = \Pi_0 f(\tau) + \mu \Pi_1 f(\tau) + \ldots + \mu^K \Pi_K f(\tau) + \ldots. \tag{13}$$

Приравнивая теперь члены при одинаковых степенях μ в правых и левых частях уравнений (I), причем отдельно для членов, зависящих от t, и отдельно - для τ, получаем системы обыкновенных дифференицальных уравнений, которые не зависят от μ и которые можно решать стандартными численными методами, что позволяет найти коэффициенты разложений (9)-(10).

Так для главных членов регулярной части асимптотики получаем систему уравнений:

$$0 = \bar{F}_0 = F(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t),$$
$$\frac{d\bar{y}_0}{dt} = \bar{f}_0 = f(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t). \tag{14}$$

Для главного члена погранслойной части асимптотики получаем:

$$\frac{d\Pi_0 z}{d\tau} = \Pi_0 F = F(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0) \tag{15}$$
$$\frac{d\Pi_0 y}{d\tau} = 0.$$

Для членов асимптотики с номерами $K \geqslant 1$ имеем нелинейные уравнения:

$$\frac{d\bar{z}_{K-1}}{dt} = \bar{F}_K = \bar{F}_z(t)\bar{z}_K + \bar{F}_y(t)\bar{y}_K + F_K(t) \tag{16}$$
$$\frac{d\bar{y}_K}{dt} = \bar{f}_K = \bar{f}_z(t)\bar{z}_K + \bar{f}_y(t)\bar{y}_K + f_K(t),$$

где производные $\bar{F}_z(t), \bar{f}_z(t)$ и $\bar{F}_y(t), \bar{f}_y(t)$ вычисляются в точке $(\bar{z}_0(t), \bar{y}_0(t), t)$ и функции $F_K(t), f_K(t)$ рекуррентно выражаются через $\bar{z}_i(t), \bar{y}_i(t)$ для $i < K$.

Для погранслойной части имеем:

$$\frac{d\Pi_K z}{d\tau} = \Pi_K F = F_z(\tau)\Pi_K z + F_y(\tau)\Pi_K y + G_K(\tau), \tag{17}$$
$$\frac{d\Pi_K y}{d\tau} = \Pi_{K-1} f,$$

где $G_K(\tau)$ рекуррентно выражаются через $\Pi_i z(\tau), \Pi_i y(\tau)$ при $i < K$ и производные $F_z(\tau)$, $F_y(\tau)$ вычисляются в точке $(\bar{z}_0(0) + \Pi_0 z(\tau), \bar{y}_0(0) + \Pi_0 y(\tau), 0)$.

Для решения дифференциальных уравнений (14)-17) необходимы начальные условия, поэтому, подставляя искомые разложения (8) в начальные условия (2) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях μ, получаем системы уравнений для нахождения начальных условий для систем (I4)-I7):

$$\begin{aligned} &\bar z_0(0)+\Pi_0 z(0)=z^{00}, \quad \bar y_0(0)+\Pi_0 y(0)=y^{00} \\ &\bar z_k(0)+\Pi_k z(0)=0, \quad \bar y_k(0)+\Pi_k y(0)=0, \\ &\quad k=1,2,\ldots \end{aligned} \tag{I8}$$

Уравнения (I4)-(I7) с начальными условиями (I8) позволяют последовательно найти все члены рядов (9)-(I0).

Изложенный алгоритм широко применим в различных областях физики, однако его применение существенно усложняется громоздкостью выкладок, поэтому мы реализовали его на ЭВМ с использованием системы аналитических вычислений.

Нами была рассмотрена система уравнений

$$\begin{aligned} &\mu\frac{dz}{dt}=a_1(t)z^2+a_2(t)z+b_1(t)y^2+b_2(t)y+g(t)=F, \\ &\frac{dy}{dt}=c_1(t)z^2+c_2(t)z+d_1(t)y^2+d_2(t)y+h(t)=f, \\ &\qquad 0\le t\le T, \end{aligned} \tag{I9}$$

с начальными условиями (2).

Это достаточно сложная нелинейная задача.

Реализованный алгоритм позволил получить на ЭВМ уравнения:

$$0=\bar F_0=a_1(t)\bar z_0^2(t)+a_2(t)\bar z_0(t)+b_1(t)\bar y_0^2(t)+b_2(t)\bar y_0(t)+g(t),$$

$$\frac{d\bar y_0}{dt}=\bar f_0=c_1(t)\bar z_0^2(t)+c_2(t)\bar z_0(t)+d_1(t)\bar y_0^2(t)+d_2(t)\bar y_0(t)+h(t),$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_0 z}{d\tau}=\Pi_0 F=\;&2a_1(0)\bar z_0(0)\Pi_0 z(\tau)+2b_1(0)\bar y_0(0)\Pi_0 y(\tau)+ \\ &+a_1(0)\Pi_0 z^2(\tau)+a_2(0)\Pi_0 z(\tau)+b_1(0)\Pi_0 y^2(\tau)+ \\ &+b_2(0)\Pi_0 y(\tau), \end{aligned}$$

$$\frac{d\Pi_0 y}{d\tau}=\Pi_0 f=0,$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar z_0}{dt}=\bar F_1=\;&b_2(t)\bar y_1(t)+2a_1(t)\bar z_0(t)\bar z_1(t)+ \\ &+a_2(t)\bar z_1(t)+2b_1(t)\bar y_0(t)\bar y_1(t), \\ \frac{d\bar y_1}{dt}=\bar f_1=\;&2c_1(t)\bar z_0(t)\bar z_1(t)+c_2(t)\bar z_1(t)+2d_1(t)\bar y_0(t)\bar y_1(t)+ \\ &+d_2(t)\bar y_1(t), \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1 y}{d\tau}=\Pi_0 f=\;&2c_1(0)\bar z_0(0)\Pi_0 z(\tau)+2d_1(0)\bar y_0(0)\Pi_0 y(\tau)+ \\ &+c_1(0)\Pi_0 z^2(\tau)+c_2(0)\Pi_0 z^2(\tau)+d_1(0)\Pi_0 y^2(\tau)+ \\ &+d_2(0)\Pi_0 y(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi_1 z}{d\tau}=\Pi_1 F=\;&2a_1(0)\bar z_0(0)\Pi_1 z(\tau)+2a_1(0)\bar z_1(0)\Pi_0 z(\tau)+ \\ &+2b_1(0)\bar y_0(0)\Pi_1 y(\tau)+2b_1(0)\bar y_1(0)\Pi_0 y(\tau)+ \\ &+2a_1(0)\Pi_0 z(\tau)\Pi_1 z(\tau)+a_2(0)\Pi_1 z(\tau)+ \\ &+2b_1(0)\Pi_0 y(\tau)\,\Pi_1 y(\tau)+b_2(0)\Pi_1 y(\tau). \end{aligned}$$

В качестве теста для программ был использован пример, приведенный ранее.

Таким образом, описанный алгоритм (I4)-(I8) реализован нами на ЭВМ с помощью системы *REDUCE-3.4*. Он применен к конкретной сингулярной системе дифференциальных уравнений. Нелинейная система двух дифференциальных уравнений сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, не зависящих от малого параметра. Полученные дифференциальные уравнения (20) решаются стандартными численными методами, что позволяет получить решения исходной задачи (I9)-(2).

Литература

I. Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. Матем.сб., 1948, 22(64), № 2, с.193-204.
2. Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. Матем.сб., 1950, 27(69),№1, с.147-156.
3. Тихонов А.Н., Васильева А.Б., Свешников А.Г. Дифференциальные уравнения. Москва, Наука, 1985.
4. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.,Высшая школа, 1990.
5. Бахвалов Н.С. К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя. ЖВМ и МФ, 1969, 9, №4, с.841-859.
6. Боглаев Ю.П. О численных методах решения сингулярно возмущенных задач. Дифф.ур., 1985, 21, №10, с.1804-1806.
7. Ван-Дайк М., Методы возмущений в механике жидкостей. М., Мир, 1967.
8. Васильева А.Б. Асимптотика решения некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. УМН, 1963, 18, №3, с.15-86.
9. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., Наука, 1973.
10. Вишик М.И. , Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром. УМН, 1957, 12, №5, с.3-122.
11. Жидков Е.П. Кадышевский В.Г., Катышев Ю.В. К вопросу о предельном переходе $c \to \infty$ в релятивистском уравнении Шредингера. ТМФ, т.3, №2, 1970, с.191-196.
12. Nickish L.J., Durand L., Durand B., Salpeter equations in position space: numerical solution for arbitrary confining potentials, Phys. Rev. D., v. 30, N3, 1984.

13. Тернов И.М., Михайлин В.В., Халилов В.Ф. Синхротронное излучение и его применение. М., изд-во МГУ, 1985.
14. Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М., Наука, 1981.

Рукопись поступила в издательский отдел
21 сентября 1993 года.