объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-93-266

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов

ДЕКОМПОЗИЦИЯ ОБЛАСТИ И ГЕНЕРАТОРЫ ПРЯМЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМИ МАТРИЦАМИ ОБЩЕГО ВИДА

Направлено в «Siberian Journal of Computer Mathematics»

1993

I. Введение. Идея предварительного разбиения сложной исходной задачи на подзадачи, которые легко и с высокой гарантией качества решались бы вначале независимо друг от друга и из полученных решений затем восстанавливалось бы решение задачи в целом, имеет в прикладной математике, механике, математической физике, инженерном деле и т.д. уже довольно давнюю историю. При решении алгебраических задач основные идеи и методы такого подхода, объединённые общим названием - методы декомпозиции области, довольно полно отражены уже в ряде известных монографий (см., например, /I,2/ и т.д.). Хотя осознание /2/преимуществ такого подхода проявилось, по-видимому, наиболее полно в вычислительной математике в связи с появлением многопроцессорных параллельных и векторных ЭВМ, вычислительные методы, развиваемые в этой области, имеют несомненный интерес и с точки зрения их эффективного использования при вычислениях на однопроцессорных ЭВМ последовательного действия. Хороший обзор, анализ и описание основных известных, распараллеленных с использованием идеи декомпозиции области, прямых и итерационных методов решения систем линейных уравнений приведён в главах 2 и 3 /2/. Обсуждаемые в этой монографии прямые и итерационные методы декомпозиционного типа часто ориентированы как на определённый класс матриц, так и на матрицы с заданными свойствами. В частности, матрицы линейных систем могут иметь и блочно-трёхдиагональный вид. При этом на элементы-блоки таких матриц накладываются определённые условия, которые обусловлены как физической спецификой задачи, так и её математической моделью. В частности, в работе /3/ дан также краткий обзор существующих и построены новые итерационные методы декомпозиционного типа для решения систем уравнений с блочно-трёхдиагональными матрицами, возникающими при разностной аппроксимации краевых задач для уравнений в частных производных. На матрицы подобных систем /3/ накладываются условия блочной симметрии, блочно-диагонального преобладания, перестановочности и невырожденности их элементов-блоков и невырожденности ведущих блочных усечённых подматриц. Кроме того, следует отметить, что как в прямых, так и итерационных методах декомпозиционного типа не всегда однозначно решаются вопросы эффективного выбора подпространств и операторов, связывающих подпространственные решения с решением всей системы (см., например, /3/).

Настоящая работа базируется на результатах работ /4+7/ и содержит результаты наших оригинальных исследований по построению эффективных прямых методов декомпозиционного типа для решения систем $C \cdot X = Y$ линейных уравнений с блочно-трёхдиагональными матрицами общего вида C (1.1) . При этом решаются также вопросы эффективного практического выделения при расчётах на ЭВМ декомпозиционных областей и построения единственных операторов перехода между выделенными подпространствами. Мы не останавливаемся при этом специально на вопросах реализации полученных алгоритмов на ЭВМ параллельной и векторной архитектуры в силу очевидности этого вопроса в нашем подходе.

Для удобства и полноты восприятия, а также лаконичности доказательства всех результатов настоящей работы мы приводим ниже и основные результаты наших более ранних работ /4÷7/, без которых, по-видимому, настоящее исследование было бы просто невозможным.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & \\ & & - & - & - \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \qquad (\text{I.I})$$

, где

$\{q_j\}_{j=1}^{m}$ – диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а

$\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ – под (над) диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся прямоугольными матрицами, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{j-1} \quad q_j\}_{j=2}^{m}$.

Напомним, что (как и в /4÷7/) под ведущими $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{m}$ –верхними и $\{\Delta_j^m\}_{j=1}^{m}$ –нижними блочно-угловыми минорами $\mathbb{C}\,(1.1)$ понимаются определители ведущих усечённых (т.е. уменьшенной размерности) подматриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

В работах /4,6,7/ нами были введены обобщённые матричные (процессы)--последовательности вида

$$\begin{cases} \text{Если } det(\Lambda_j)\neq 0 \text{ для всех } 2\le j\le m+1, \text{то } \Lambda_{j+1}=q_j-p_j\cdot\Lambda_j^{-1}\cdot r_j,\ \Lambda_2=q_1\ (det(q_1)\neq 0), \\ j=2,3,\dots,m. \\ \text{Если } det(\Lambda_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (3\le j\le m-1), \text{то } \Lambda_{j+1}=\ ?, \text{но } \Lambda_{j+2}=q_{j+1}, \text{где} \\ det(q_{j+1})\neq 0 . \end{cases} \qquad (\text{I.2})$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(G_j)\neq 0 \text{ для всех } 0\le j\le m-1, \text{то } G_{j-1}=q_j-r_{j+1}\cdot G_j^{-1}\cdot p_{j+1},\ G_{m-1}=q_m, \\ (det(q_m)\neq 0),\ j=m-1,m-2,\dots,1. \\ \text{Если } det(G_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (2\le j\le m-2), \text{то } G_{j-1}=\ ?, \text{но } G_{j-2}=q_{j-1}, \\ \text{где } det(q_{j-1})\neq 0 . \end{cases} \qquad (\text{I.3})$$

В работе /4_9)/ при следующих комбинациях нулевых ведущих блочно-угловых миноров $\mathbf{C}(1.1)$:

I. $\{[\Delta_1^{k-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_k^{m}=0]$ для любого k из $(3\le k\le m-1)\}$ –равны нулю только по одному минору каждого типа;

II. $\{[\Delta_1^{k-1}=0]$ <u>и</u> $[\Delta_k^{m}=0]$ для любого k из $(3\le k\le m-1)\}$ –равны нулю одновременно только по одному минору обоих типов, были построены генераторы различных типов матрично-факторизованных представлений матриц $\mathbf{C}(1.1)$ и им обратных матриц $(\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1})$ вида:

<u>Представление I.I</u> (для $\mathbf{C}(1.1)$ при условиях $I_{I)}, I_{2)}$, II)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix} & & \\
(p\cdot B)_{k-1,k-2,1}\dots(p\cdot B)_{k-1,k-2,k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (z\cdot B)_{k+1,k+1,k+1}\dots(z\cdot B)_{k+1,k+1,m} \\
 & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ & E_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_1}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}=\mathbf{C}_1^{k-2} & & \\
 & \begin{bmatrix} (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2,k-2}\cdot z_{k-1}) & (z)_k \\ (p)_k & (q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1}) \end{bmatrix}=\omega_k & \\
 & & \mathbf{C}_{k+1}^{m}=\begin{bmatrix} q_{k+1} & z_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & z_{k+3} & \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & p_m & q_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\omega_k}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix}\begin{matrix}(B\cdot z)_{1,k-2,k-1}\\ (B\cdot z)_{2,k-2,k-1}\\ \dots \\ (B\cdot z)_{k-2,k-2,k-1}\end{matrix} & & \\
 & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & \\
 & \begin{matrix}(B\cdot p)_{k+1,k+1,k+1}\\ (B\cdot p)_{k+2,k+1,k+1}\\ \dots \\ (B\cdot p)_{m,k+1,k+1}\end{matrix} & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ & E_{k+2} & \\ & & \ddots \\ & & & E_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{C}_1}
\qquad (I.4)
$$

<u>Представление I.2</u> (для $\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}$типа $\mathbf{B}=\tilde{\mathbf{B}}+\Delta\mathbf{B}$ при условиях $I_{I)}$, $I_{I)}$, II)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}^{-1}=\mathbf{B}_1^{k-2} & & \\
 & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k-1} & \\ & \mathbf{0}_k \end{bmatrix} & \\
 & & \mathbf{B}_{k+1}^{m}=\begin{bmatrix} q_{k+1} & z_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & z_{k+3} & \\ & \dots & \dots & \dots \\ & & p_m & q_m\end{bmatrix}^{-1}
\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{B}}}
+\left\{
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 & & \\ & \mathbf{0}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{0}_{k-2}\end{bmatrix}\begin{matrix}(-B\cdot z)_{1,k-2,k-1}\\ (-B\cdot z)_{2,k-2,k-1}\\ \dots \\ (-B\cdot z)_{k-2,k-2,k-1}\end{matrix} & & \\
 & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & \\
 & \begin{matrix}(-B\cdot p)_{k+1,k+1,k+1}\\ (-B\cdot p)_{k+2,k+1,k+1}\\ \dots \\ (-B\cdot p)_{m,k+1,k+1}\end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k+1} & & \\ & \mathbf{0}_{k+2} & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{0}_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_1}\right. \times
$$

$$
\times\left[\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & -- & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix} & & \\
& \begin{bmatrix} (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1}) & (z)_k \\ (p)_k & (q_k - z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix}^{-1} = \omega_k^{-1} & \\
& & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ & E_{k+2} & & \\ & & -- & \\ & & & E_m\end{bmatrix}
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{ccc}
\begin{bmatrix} O_1 & & & \\ & O_2 & & \\ & & -- & \\ & & & O_{k-2}\end{bmatrix} & & \\
(-p\cdot B)_{k-1\,k-2\,1}\ldots(-p\cdot B)_{k-1\,k-2\,k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & (-z\cdot B)_{k+1\,k+1\,k+1}\ldots(-z\cdot B)_{k+1\,k+1\,m} \\
& & \begin{bmatrix} O_{k+1} & & & \\ & O_{k+2} & & \\ & & -- & \\ & & & O_m\end{bmatrix}
\end{array}\right] = (\tilde{B}+\Delta B) = B \qquad (I.5)
$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\tilde{\tilde{q}}_k} \qquad\qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{B_2}$$

Здесь в (I.4) $[C^{\rho}_{\mu}]$ -соответствующие усечённые (т.е. уменьшенной размерности) блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида (I.I), для которых имеют место /$4_{5)}$,$4_{7)}$/ следующие матрично-факторизованные представления:

<u>Представление I.I′</u> (для C^{ρ}_{μ}) <u>Представление I.2′</u> (для C^{ρ}_{μ})

$$
\begin{bmatrix}
E_\mu & & & & \\
(-\beta)_{\mu+1}E_{\mu+1} & & & & \\
& -- & & & \\
& & (-\beta)_i E_i & & \\
& & & -- & \\
& & & (-\beta)_\jmath & E_\jmath
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{\mu\mu}-z_{\mu+1}\cdot\hat{c}_{\mu+1}] & (z)_{\mu+1} & & \\
-- & -- & -- & -- \\
& [B^{-1}_{ii}-z_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}] & (z)_{i+1} & \\
& -- & -- & -- \\
& & [B^{-1}_{\jmath-1\,\jmath-1}-z_\jmath\cdot\hat{c}_\jmath] & (z)_\jmath \\
& & & [B^{-1}_{\jmath\jmath}]
\end{bmatrix}
= C^{\rho}_{\mu}(\Delta G) =
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{\mu\mu}] & (z)_{\mu+1} & & \\
& [B^{-1}_{\mu+1\,\mu+1}-\beta_{\mu+1}\cdot z_{\mu+1}] & (z)_{\mu+2} & \\
& -- & -- & -- \\
& & [B^{-1}_{ii}-\beta_i\cdot z_i] & (z_{i+1}) \\
& & -- & -- \\
& & & [B^{-1}_{\jmath\jmath}-\beta_\jmath\cdot c_\jmath]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_\mu & & & \\
(-\hat{c})_{\mu+1}E_{\mu+1} & & & \\
& -- & & \\
& (-\hat{c})_i E_i & & \\
& & -- & \\
& & (-\hat{c})_\jmath & E_\jmath
\end{bmatrix}, \qquad (I.6)
$$

<u>Представление I.3′</u> (для C^{ρ}_{μ}) <u>Представление I.4′</u> (для C^{ρ}_{μ})

$$
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{\mu\mu}-\hat{\beta}_{\mu+1}\cdot p_{\mu+1}] & & & & \\
(p_{\mu+1})[B^{-1}_{\mu+1\,\mu+1}-\hat{\beta}_{\mu+2}\cdot p_{\mu+2}] & & & & \\
-- & -- & -- & & \\
& (p)_i[B^{-1}_{ii}-\hat{\beta}_{i+1}\cdot p_{i+1}] & & & \\
& -- & -- & -- & \\
& & (p)_{\jmath-1}[B^{-1}_{\jmath-2\,\jmath-2}-\hat{\beta}_{\jmath-1}\cdot p_{\jmath-1}] & & \\
& & & (p_\jmath)\,[B^{-1}_{\jmath-1\,\jmath-1}] &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E\,(-c)_{\mu\,\mu+1} & & & \\
& E\,(-c)_{\mu+1\,\mu+2} & & \\
& -- & -- & \\
& & E\,(-c)_{i\,i+1} & \\
& & -- & -- \\
& & & E\,(-c)_{\jmath-1\,\jmath} \\
& & & E_\jmath
\end{bmatrix}
= C^{\rho}_{\mu}(\Delta G) =
\begin{bmatrix}
E\,(-\hat{\beta})_{\mu\,\mu+1} & & & \\
& E\,(-\hat{\beta})_{\mu+1\,\mu+2} & & \\
& -- & -- & \\
& & E\,(-\hat{\beta})_{i\,i+1} & \\
& & -- & -- \\
& & & E\,(-\hat{\beta})_{\jmath-1\,\jmath} \\
& & & E_\jmath
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{\mu\mu}] & & & \\
(p)_{\mu+1}[B^{-1}_{\mu+1\,\mu+1}-p_{\mu+1}\cdot c_{\mu+1}] & & & \\
-- & -- & -- & \\
& (p)_i[B^{-1}_{ii}-p_i\cdot c_i] & & \\
& -- & -- & -- \\
& & (p)_{\jmath-1}[B^{-1}_{\jmath-1\,\jmath-1}-p_{\jmath-1}\cdot c_{\jmath-1}] & \\
& & & (p_\jmath)[B^{-1}_{\jmath\jmath}-p_\jmath c_\jmath]
\end{bmatrix}, \qquad (I.7)
$$

где

$$\begin{cases} \beta_{i+1}=-(P_{i+1}\cdot\Lambda^{-1}_{i+1}),\ c_{i+1}=-(\Lambda^{-1}_{i+1}\, z_{i+1}),\ \hat\beta_{i+1}=-(z_{i+1}\cdot G_i^{-1}),\ \hat c_{i+1}=-(G_i^{-1}\cdot P_{i+1}),\ (\mu=1)\le i\le(\zeta=k-2) \\ \text{и}\quad (\mu=k+1)\le i\le(\zeta=m), \text{ а последовательности матриц } \{\Lambda\} \text{ и } \{G\} \\ \text{определены в соответствии с (I.2), (I.3).} \end{cases} \qquad (I,8)$$

При этом в (I.6)$\div$(I.7) диагональные B_{ii} -элементы-блоки усечённых обратных подматриц $B^{\rho}_{\mu}=[C^{\rho}_{\mu}]^{-1}$, где $(\mu=1,\ \rho=k-2)$; $(\mu=k+1),\ \rho=m)$, определены /4$_{4)}$,4$_{9)}$/ в виде:

$$B_{ii}=\begin{cases} B_{ii}(\Lambda,G)=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-q_i)^{-1}, \text{где } (\mu=1)\le i\le(\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1)\le i\le(\rho=m); \\ \begin{cases} B_{ii}(\Lambda)=[\sum\limits_{n=i}^{\zeta}\prod\limits_{\zeta=i+1}^{n}c_\zeta\cdot\Lambda^{-1}_{n+1}\cdot\prod\limits_{\zeta=i+1}^{n}\beta_\zeta]\longleftrightarrow\Lambda^{-1}_{i+1}+c_{i+1}\cdot B_{i+1\,i+1}(\Lambda)\cdot\beta_{i+1},\ B_{\rho\rho}(\Lambda)=\Lambda^{-1}_{\rho+1},\ i=\rho-1,\rho-2,\dots,\mu; \\ B_{ii}(G)=[\sum\limits_{n=\mu+1}^{i}\prod\limits_{\zeta=n+1}^{i}\hat c_\zeta\cdot G^{-1}_{n-1}\cdot\prod\limits_{\zeta=n+1}^{i}\hat\beta_\zeta]\longleftrightarrow G^{-1}_{i-1}+\hat c_i\cdot B_{i-1\,i-1}(G)\cdot\hat\beta_i,\ B_{\mu\mu}(G)=G^{-1}_{\mu-1},\ i=\mu+1,\mu+2,\dots,\rho. \end{cases} \end{cases} \qquad (I.9)$$

Отметим, что лишь при использовании аддитивной скобки $B_{ii}(\Lambda,G)=$ $=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-q_i)^{-1}$ $(I.9)_{I)}$ четыре различные нетрадиционные представления (I.6)$\div$(I.7) усечённых подматриц C^{ρ}_{μ} сводятся к двум различным известным представлениям вида

<u>Представление I.5'</u> (для C^{ρ}_{μ}) <u>Представление I.6'</u> (для C^{ρ}_{μ})

$$\begin{bmatrix} E_\mu & & & & \\ (-\beta)_{\mu+1}E_{\mu+1} & & & & \\ & \text{— —} & & & \\ & & (-\beta)_i E_i & & \\ & & & \text{— —} & \\ & & & & (-\beta)_\zeta E_\zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Lambda_{\mu+1} & & & & \\ & \Lambda_{\mu+2} & & & \\ & & \text{— —} & & \\ & & & \Lambda_{i+1} & \\ & & & & \text{— —} \\ & & & & & \Lambda_{\zeta+1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_\mu(-c)_{\mu+1} & & & \\ & E_{\mu+1}(-c)_{\mu+2} & & \\ & & \text{— —} & \\ & & & E_i(-c)_{i+1} \\ & & & & E_{\zeta-1}(-c)_\zeta \\ & & & & & E_\zeta \end{bmatrix}=C^{\rho}_{\mu}(\Lambda),$$

$$\begin{bmatrix} E_\mu(-\hat\beta)_{\mu+1} & & & & \\ & E_{\mu+1}(-\hat\beta)_{\mu+2} & & & \\ & & \text{— —} & & \\ & & & E_i(-\hat\beta)_{i+1} & \\ & & & & E_{\zeta-1}(-\hat\beta)_\zeta \\ & & & & & E_\zeta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_{\mu-1} & & & & \\ & G_\mu & & & \\ & & \text{— —} & & \\ & & & G_{i-1} & \\ & & & & \text{— —} \\ & & & & & G_{\zeta-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_\mu & & & & \\ (-\hat c)_{\mu+1}E_{\mu+1} & & & & \\ & \text{— —} & & & \\ & & (-\hat c)_i E_i & & \\ & & & \text{— —} & \\ & & & & (-\hat c)_\zeta E_\zeta \end{bmatrix}=C^{\rho}_{\mu}(G) \qquad (I.10)$$

, где соответствующие матрицы $[\beta,\ \hat\beta\ ;\ c,\ \hat c\ ]$ – определены в (I.8).

В работах /4$\div$7/ нами были получены для $[B^{\rho}_{\mu}]_{ij}$ -элементов-блоков обратных усечённых подматриц $[B^{\rho}_{\mu}]=[C^{\rho}_{\mu}]^{-1}$ следующие множества прямых факторизованных представлений:

<u>Представление I.I'</u> (для $[B^{\rho}_{\mu}]_{ij}$)

$$[B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{ij}=\begin{cases} \prod\limits_{\zeta=i+1}^{j}c_\zeta\cdot[B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{jj}, \text{ если } (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2) \\ \text{и}\quad (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m), \\ [B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\zeta=j+1}^{i}\beta_\zeta, \text{ если } (\mu=1)\le j\le i\le(\rho=k-2) \\ \text{и}\quad (\mu=k+1)\le j\le i\le(\rho=m). \end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases} [B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{ij}=c_{i+1}\cdot[B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{i+1\,j}, \text{ если} \\ (\mu=1)\le i<j\le(\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1)\le i<j\le(\rho=m), \\ [B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{ii}=\Lambda^{-1}_{i+1}+c_{i+1}\cdot[B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1}, \\ (\mu=1)\le i=j\le(\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1)\le i=j\le(\rho=m), \\ [B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{ij}=[B^{\rho}_{\mu}(\Lambda)]_{i+1\,j}\cdot\beta_{i+1}, \text{ если} \\ (\mu=1)\le j<i\le(\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1)\le j<i\le(\rho=m). \end{cases} \qquad (I.II)$$

Представление I.2$'$ (для $[\mathrm{B}_\mu^\rho]_{ij}$)

$$[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{ij}=\begin{cases}[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}\hat{\beta}_\xi, \text{ если}\\ (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m);\\ \prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\hat{c}_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{jj}, \text{ если}\\ (\mu=1)\le j\le i\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le j\le i\le(\rho=m);\end{cases}\longleftrightarrow\begin{cases}[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{ij}=[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{ij-1}\cdot\hat{\beta}_j, \text{ если}\\ (\mu=1)\le i<j\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le i<j\le(\rho=m);\\ [\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{ii}=G_{i-1}^{-1}+\hat{c}_i\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i, \text{ если}\\ (\mu=1)\le i=j\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le i=j\le(\rho=m);\\ [\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{ij}=\hat{c}_i\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(G)]_{i-1j}, \text{ если}\\ (\mu=1)\le j<i\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le j<i\le(\rho=m).\end{cases}\quad(\text{I.12})$$

Представление I.3$'$ (для $[\mathrm{B}_\mu^\rho]_{ij}$)

$$[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ij}=\begin{cases}\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}c_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{jj}, & (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m);\\ [\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\beta_\xi, & (\mu=1)\le j\le i(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le j\le i\le(\rho=m).\end{cases}$$

Представление I.4$'$ (для $[\mathrm{B}_\mu^\rho]_{ij}$)

$$[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ij}=\begin{cases}[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}\hat{\beta}_\xi, & (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m);\\ \prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\hat{c}_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{jj}, & (\mu=1)\le j\le i\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m).\end{cases}\quad(\text{I.13})$$

Представление I.5$'$ (для $[\mathrm{B}_\mu^\rho]_{ij}$)

$$[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ij}=\begin{cases}\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}c_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{jj}, & (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m);\\ \prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\hat{c}_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{jj}, & (\mu=1)\le j\le i\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le j\le i\le(\rho=m).\end{cases}$$

Представление I.6$'$ (для $[\mathrm{B}_\mu^\rho]_{ij}$)

$$[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ij}=\begin{cases}[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}\hat{\beta}_\xi, & (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m);\\ [\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\beta_\xi, & (\mu=1)\le j\le i\le(\rho=k-2)\\ \underline{\text{и}} & (\mu=k+1)\le j\le i\le(\rho=m).\end{cases}\quad(\text{I.14})$$

Здесь в (I.II)+(I.I4) соответствующие $[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda),\mathrm{B}_\mu^\rho(G),\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}$ – диагональные элементы-блоки подматриц $\mathrm{B}_\mu^\rho=[\mathrm{C}_\mu^\rho]^{-1}$ определены в виде (I.9). При этом показано /4$_{\text{I})}$/, что для представлений (I.I3)÷(I.I4) справедливы коммутационные соотношения

$$\begin{cases}\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}c_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{jj}=[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=i+1}^{j}\hat{\beta}_\xi & \text{при } (\mu=1)\le i\le j\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le i\le j\le(\rho=m),\\ \prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\hat{c}_\xi\cdot[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{jj}=[\mathrm{B}_\mu^\rho(\Lambda,G)]_{ii}\cdot\prod\limits_{\xi=j+1}^{i}\beta_\xi & \text{при } (\mu=1)\le j\le i\le(\rho=k-2)\ \underline{\text{и}}\ (\mu=k+1)\le j\le i\le(\rho=m).\end{cases}\quad(\text{I.15})$$

В случае, когда все $\{q_i\}_{i=1}^{k-2}$ ($\{q_i\}_{i=k+1}^{m}$) –одинаковых размерностей и все $\{z_i,\ell_i\}_{i=2}^{k-2}$ ($\{z_i,\ell_i\}_{i=k+1}^{m}$) – не вырождены, в работах /4$_{5)}$,6,7/ показано, что существует множество различных прямых факторизованных представлений $[\mathrm{B}_\mu^\rho]_{ij}$ –элементов-блоков подматриц $\mathrm{B}_\mu^\rho=[\mathrm{C}_\mu^\rho]^{-1}$

вида

$$[B^{\rho}_{\mu}]_{ij} = \begin{cases} [F^{\rho}_{\mu}]_i \cdot [V^{\rho}_{\mu}]_j & \text{, если } (\mu=1) \le i \le j \le (\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1) \le i \le j \le (\rho=m) , \\ [R^{\rho}_{\mu}]_i \cdot [W^{\rho}_{\mu}]_j & \text{, если } (\mu=1) \le j \le i \le (\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1) \le j \le i \le (\rho=m) , \end{cases} \qquad (I.16)$$

генераторами которых являются представления (I.13)÷(I.14).

При этом для $[B^{\rho}_{\mu}]_{ii}$ -диагональных элементов-блоков подматриц B^{ρ}_{μ} имели место /$4_{4)}$/ следующие мультипликативные представления:

$$\left.\begin{matrix} (\prod\limits_{z=\mu+1}^{i} c_z)^{-1} \cdot (G^{-1}_{\mu-1} = B_{\mu\mu}) \cdot \prod\limits_{z=\mu+1}^{i} \hat{\beta}_z \\ \prod\limits_{z=\mu+1}^{i} \hat{c}_z \cdot (G^{-1}_{\mu-1} = B_{\mu\mu}) \cdot (\prod\limits_{z=\mu+1}^{i} \beta_z)^{-1} \end{matrix}\right\} = [B^{\rho}_{\mu}]_{ii} = \begin{cases} \prod\limits_{z=i+1}^{\rho} c_z \cdot (B_{\rho\rho} = \Lambda^{-1}_{\rho+1}) \cdot (\prod\limits_{z=i+1}^{\rho} \hat{\beta}_z)^{-1} , \\ (\prod\limits_{z=i+1}^{\rho} \hat{c}_z)^{-1} \cdot (B_{\rho\rho} = \Lambda^{-1}_{\rho+1}) \cdot \prod\limits_{z=i+1}^{\rho} \beta_z , \end{cases} \text{ где} \qquad (I.16')$$

$$(\mu=1) \le (i=j) \le (\rho=k-2) \text{ и } (\mu=k+1) \le (i=j) \le (\rho=m) .$$

В представлениях I.I и I.2 $\{B_{k-2j}\}^{k-2}_{j=1}$ -последний столбец, $\{B_{ik-2}\}^{k-2}_{i=1}$ -последняя строка подматриц $B^{k-2}_1 = [C^{k-2}_1]^{-1}$ и $\{B_{k+1j}\}^{m}_{j=k+1}$-первая строка, $\{B_{ik+1}\}^{m}_{i=k+1}$ -первый столбец подматриц $B^{m}_{k+1} = [C^{m}_{k+1}]^{-1}$ при соответствующих условиях могут быть[x)] представлены /$4_{9)}$/ в виде

При условии $I_{1)}$

$$\begin{cases} B_{k-2j}(\Lambda) = B_{k-2k-2}(\Lambda) \cdot \prod\limits_{z=j+1}^{k-2} \beta_z , \; B_{ik-2}(\Lambda) = \prod\limits_{z=i+1}^{k-2} c_z \cdot B_{k-2k-2}(\Lambda) , \; B_{ik+1}(\Lambda) = B_{ii}(\Lambda) \cdot \prod\limits_{z=k+2}^{i} \beta_z , \; B_{k+1j}(\Lambda) = \prod\limits_{z=k+2}^{j} c_z \cdot B_{jj}(\Lambda) . \\ \text{Здесь } (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-2k-2}(\Lambda) \cdot z_{k-1}) = \Lambda_k , \; (q_k - z_{k+1} B_{k+1k+1} \cdot p_{k+1}) = (q_k - \theta_k) . \end{cases} \qquad (I.17)$$

При условии $I_{2)}$

$$\begin{cases} B_{k-2j}(G) = \prod\limits_{z=j+1}^{k-2} \hat{c}_z \cdot B_{jj}(G) , \; B_{ik-2}(G) = B_{ii}(G) \cdot \prod\limits_{z=i+1}^{k-2} \hat{\beta}_z , \; B_{ik+1}(G) = \prod\limits_{z=k+2}^{i} \hat{c}_z \cdot B_{k+1k+1}(G) , \; B_{k+1j}(G) = B_{k+1k+1}(G) \cdot \prod\limits_{z=k+2}^{j} \hat{\beta}_z . \\ \text{Здесь } (q_k - z_{k+1} \cdot B_{k+1k+1}(G) \cdot p_{k+1}) = G_{k-1} , \; (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-1k-1} \cdot z_{k-1}) = (q_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1}) . \end{cases} \qquad (I.18)$$

При условии II

$$\begin{cases} B_{k-2k-2}(\Lambda,G) \cdot \prod\limits_{z=j+1}^{k-2} \beta_z = B_{k-2j}(\Lambda,G) = \prod\limits_{z=j+1}^{k-2} \hat{c}_z \cdot B_{jj}(\Lambda,G) , \; \prod\limits_{z=i+1}^{k-2} c_z \cdot B_{k-2k-2}(\Lambda,G) = B_{ik-2}(\Lambda,G) = B_{ii}(\Lambda,G) \cdot \prod\limits_{z=i+1}^{k-2} \hat{\beta}_z , \\ B_{ii}(\Lambda,G) \cdot \prod\limits_{z=k+2}^{i} \beta_z = B_{ik+1}(\Lambda,G) = \prod\limits_{z=k+2}^{i} \hat{c}_z \cdot B_{k+1k+1}(\Lambda,G) , \; \prod\limits_{z=k+2}^{j} c_z \cdot B_{jj}(\Lambda,G) = B_{k+1j}(\Lambda,G) = B_{k+1k+1}(\Lambda,G) \cdot \prod\limits_{z=k+2}^{j} \hat{\beta}_z . \\ \text{Здесь } (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-2k-2}(\Lambda,G) \cdot z_{k-1}) = \Lambda_k , \; (q_k - z_{k+1} \cdot B_{k+1k+1}(\Lambda,G) \cdot p_{k+1}) = G_k . \end{cases} \qquad (I.19)$$

Напомним также, что справедливость представлений (I.17)÷(I.19) является /$4_{8)}$, $4_{9)}$/ прямым следствием коммутационных свойств (I.15) для

[x)] Замечание I.I. При расчетах на ЭВМ элементы-блоки указанных строк и столбцов могут быть вычислены и любым другим известным в алгебре методом.

$\mathbb{B}_{ij}$ -элементов-блоков подматриц $\mathbb{B}_1^{k-1}=[\mathbb{C}_1^{k-1}]^{-1}$, $\mathbb{B}_{k+1}^{m}=[\mathbb{C}_{k+1}^{m}]^{-1}$ и определения последовательностей матриц $\{\Lambda\}$ (I.2), $\{G\}$ (I.3) и матриц $\mathbb{B}_{ii}$ (I.9)$_{I)}$.

Далее были получены /4$_{9)}$/ генераторы матрично-факторизованных представлений типа I.I для $\mathbb{C}(1.1)$ и типа I.2 для $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

Ш. $\{\ [\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{\ell-1}=0$ для любого k фиксированного и ℓ из $(k+3<\ell\leq m-1]$ <u>либо</u>
$[\Delta_\ell^{m}=0$ и $\Delta_k^{m}=0$ для любого ℓ фиксированного и k из $(3\leq k<\ell-3)]\ \}$ – равны нулю только по два отдалённых (или близких т.е. ℓ из $(k+3)\leq\ell\leq m-1)$ <u>либо</u> k из $(3\leq k\leq\ell-3)$) минора каждого типа.

IУ. $\{\ [\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{\ell-1}]$ и $[\Delta_\ell^{m}=0=\Delta_k^{m}]$ для любого k фиксированного и любого ℓ из $(k+3<\ell\leq m-1)\ \}$ –равны нулю одновременно только по два отдалённых (или близких т.е. ℓ из $(k+3\leq\ell\leq m-1)$) минора обоих типов

<u>Представление I.3</u> (для $\mathbb{C}(1.1)$ при условиях Ш$_{I)}$,Ш$_{2)}$,IУ)

$$\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix} & & & & & \\
(P\cdot\mathbb{B})_{k-1,k-2,1}\ldots(P\cdot\mathbb{B})_{k-1,k-2,k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (Z\cdot\mathbb{B})_{k+1,k+1,k+1}\ldots(Z\cdot\mathbb{B})_{k+1,k+1,\ell-2} & & & \\
 & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ & E_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{\ell-2}\end{bmatrix} & & & \\
 & & (P\cdot\mathbb{B})_{\ell-1,\ell-2,k+1}\ldots(P\cdot\mathbb{B})_{\ell-1,\ell-2,\ell-2} & \begin{bmatrix} E_{\ell-1} & \\ & E_\ell \end{bmatrix} & (Z\cdot\mathbb{B})_{\ell+1,\ell+1,\ell+1}\ldots(Z\cdot\mathbb{B})_{\ell+1,\ell+1,m} & \\
 & & & & \begin{bmatrix} E_{\ell+1} & & & \\ & E_{\ell+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m\end{bmatrix} &
\end{bmatrix}}_{\mathbb{C}_1}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\mathbb{C}_1^{k-2}\end{bmatrix} & & \\
 & \begin{bmatrix} [Q_{kk}] & \mathbb{O} & [R_{k+1,\ell}] \\ \mathbb{O} & [\mathbb{C}_{k+1}^{\ell-2}] & \mathbb{O} \\ [P_{\ell,k+1}] & \mathbb{O} & [Q_{\ell\ell}] \end{bmatrix} & \\
 & & \begin{bmatrix}\mathbb{C}_{\ell+1}^{m}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\mathfrak{F}_{k,\ell}} = \omega_{k,\ell}\,\times$$

$$
\times\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix}
\begin{matrix}(B_{1\,k-2}\cdot z_{k-1})\\ (B_{2\,k-2}\cdot z_{k-1})\\ \vdots \\ (B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1})\end{matrix} & & & & \\
& \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & & \\
& & \begin{matrix}(B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ (B_{k+2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ \vdots \\ (B_{l-2\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{matrix}
\begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ & E_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{l-2}\end{bmatrix}
\begin{matrix}(B_{k+1\,l-2}\cdot z_{l-1})\\ (B_{k+2\,l-2}\cdot z_{l-1})\\ \vdots \\ (B_{l-2\,l-2}\cdot z_{l-1})\end{matrix} & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ & E_l\end{bmatrix} & \\
& & & & \begin{matrix}(B_{l+1\,l+1}\cdot p_{l+1})\\ (B_{l+2\,l+1}\cdot p_{l+1})\\ \vdots \\ (B_{m\,l+1}\cdot p_{l+1})\end{matrix}
\begin{bmatrix} E_{l+1} & & & \\ & E_{l+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{C_2} = C \qquad (I.20)
$$

<u>Представление I.4</u> (для $B = C^{-1}$ типа $B = \tilde{B} + \Delta B$ при условиях Ш$_{I)}$, Ш$_{2)}$, ІУ)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p_{k-3} & q_{k-3} & z_{k-2} \\ & & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}^{-1} = B_1^{k-2} & & & & \\
& \begin{bmatrix} 0_{k-1} & \\ & 0_k\end{bmatrix} & & & \\
& & B_{k+1}^{l-2} = \begin{bmatrix} q_{k+1} & z_{k+2} & & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & z_{k+3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & p_{l-3} & q_{l-3} & z_{l-2} \\ & & & p_{l-2} & q_{l-2}\end{bmatrix} & & \\
& & & \begin{bmatrix} 0_{l-1} & \\ & 0_l\end{bmatrix} & \\
& & & & B_{l+1}^{m} = \begin{bmatrix} q_{l+1} & z_{l+2} & & \\ p_{l+2} & q_{l+2} & z_{l+3} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & p_m & q_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\tilde{B}}
+
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0_1 & & & \\ & 0_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{k-2}\end{bmatrix}
\begin{matrix}(-B_{1\,k-2}\cdot z_{k-1})\\ (-B_{2\,k-2}\cdot z_{k-1})\\ \vdots \\ (-B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1})\end{matrix} & & & & \\
& \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & & \\
& & \begin{matrix}(-B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ (-B_{k+2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ \vdots \\ (-B_{l-2\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{matrix}
\begin{bmatrix} 0_{k+1} & & & \\ & 0_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_{l-2}\end{bmatrix}
\begin{matrix}(-B_{k+1\,l-2}\cdot z_{l-1})\\ (-B_{k+2\,l-2}\cdot z_{l-1})\\ \vdots \\ (-B_{l-2\,l-2}\cdot z_{l-1})\end{matrix} & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ & E_l\end{bmatrix} & \\
& & & & \begin{matrix}(-B_{l+1\,l+1}\cdot p_{l+1})\\ (-q_{l+2\,l+1}\cdot p_{l+1})\\ \vdots \\ (-B_{m\,l+1}\cdot p_{l+1})\end{matrix}
\begin{bmatrix} 0_{l+1} & & & \\ & 0_{l+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{B_1} \times
$$

$$\times\left\{\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-2}\end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} [Q_{kk}] & \mathbb{O} & [\mathbb{R}_{k+1\ell}] \\ \mathbb{O} & \begin{bmatrix}E_{k+1}&&\\&\ddots&\\&&E_{\ell-2}\end{bmatrix} & \mathbb{O} \\ [\mathbb{P}_{\ell k+1}] & \mathbb{O} & [Q_{\ell\ell}]\end{bmatrix}^{-1} = \omega^{-1}_{k,\ell} & \\ & & \begin{bmatrix}E_{\ell+1}&&\\&\ddots&\\&&E_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\widetilde{\widetilde{\mathbb{B}}}_{k,\ell}} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}\mathbb{O}_1 &&&\\ &\mathbb{O}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbb{O}_{k-2}\end{bmatrix} &&&&& \\ (\mathbb{P}\cdot\mathbb{B})_{k-1\,k+1}\cdots(\mathbb{P}\cdot\mathbb{B})_{k-1\,k+\ell-2} & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & (\mathbb{Z}\cdot\mathbb{B})_{k+1\,k+1}\cdots(\mathbb{Z}\cdot\mathbb{B})_{k+1\,k+\ell-2} &&& \\ && \begin{bmatrix}\mathbb{O}_{k+1}&&\\&\mathbb{O}_{k+2}&\\&&\ddots\\&&&\mathbb{O}_{\ell-2}\end{bmatrix} &&& \\ && (\mathbb{P}\cdot\mathbb{B})_{\ell-1\,\ell-1\,k+1}\cdots(\mathbb{P}\cdot\mathbb{B})_{\ell-1\,\ell-2\,\ell-2} & \begin{bmatrix}E_{\ell-1}&\\&E_\ell\end{bmatrix} & (\mathbb{Z}\cdot\mathbb{B})_{\ell+1\,\ell+1\,\ell+1}\cdots(\mathbb{Z}\cdot\mathbb{B})_{\ell+1\,\ell+1\,m} & \\ &&&& \begin{bmatrix}\mathbb{O}_{\ell+1}&&\\&\mathbb{O}_{\ell+2}&\\&&\ddots\\&&&\mathbb{O}_m\end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathbb{B}_2}\right\}. \qquad (I.21)$$

Здесь в (I.20)÷(I.21) $\{[Q_{kk}], [\mathbb{R}_{k+1\ell}], [\mathbb{P}_{\ell k+1}]\}$ –блочно-элементарные /см. $4_{9)}$/ матрицы, которые определяются в виде

$$Q_{kk} = \begin{bmatrix} (q_{k-1} - \mathbb{P}_{k-1}\cdot\mathbb{B}_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1}) & (z_k) \\ (\mathbb{P}_k) & (q_k - z_{k+1}\cdot\mathbb{B}_{k+1\,k+1}\cdot\mathbb{P}_{k+1})\end{bmatrix}, \mathbb{R}_{k+1\ell} = \begin{bmatrix}\mathbb{O} & \mathbb{O}\\ (-z_{k+1}\cdot\mathbb{B}_{k+1\,\ell-2}\cdot z_{\ell-1}) & \mathbb{O}\end{bmatrix}, \mathbb{P}_{\ell k+1} = \begin{bmatrix}\mathbb{O} & (-\mathbb{P}_{\ell-1}\cdot\mathbb{B}_{\ell-2\,k+1}\cdot\mathbb{P}_{k+1}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O}\end{bmatrix}, Q_{\ell\ell} = \begin{bmatrix}(q_{\ell-1} - \mathbb{P}_{\ell-1}\cdot\mathbb{B}_{\ell-2\,\ell-2}\cdot z_{\ell-1}) & (z_\ell) \\ (\mathbb{P}_\ell) & (q_\ell - z_{\ell+1}\cdot\mathbb{B}_{\ell+1\,\ell+1}\cdot\mathbb{P}_{\ell+1})\end{bmatrix}. \qquad (I.22)$$

При этом неизвестные $\{[\widetilde{X}_{kk}], [\widetilde{X}_{k+1\ell}], [\widetilde{X}_{\ell k+1}], [\widetilde{X}_{\ell\ell}]\}$ –элементы-блоки характерных /см. $4_{9)}$/ обратных матриц $\omega^{-1}_{k,\ell}$ могут быть найдены любым методом с учётом следующих основных блочно-матричных уравнений:

$$\begin{bmatrix}[Q_{kk}] & [\mathbb{R}_{k+1\ell}] \\ [\mathbb{P}_{\ell k+1}] & [Q_{\ell\ell}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[\widetilde{X}_{kk}] & [\widetilde{X}_{k+1\ell}] \\ [\widetilde{X}_{\ell k+1}] & [\widetilde{X}_{\ell\ell}]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[E_{kk}] & \\ & [E_{\ell\ell}]\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}[\widetilde{X}_{kk}] & [\widetilde{X}_{k+1\ell}] \\ [\widetilde{X}_{\ell k+1}] & [\widetilde{X}_{\ell\ell}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}[Q_{kk}] & [\mathbb{R}_{k+1\ell}] \\ [\mathbb{P}_{\ell k+1}] & [Q_{\ell\ell}]\end{bmatrix}. \qquad (I.23)$$

Здесь также для подматриц $\mathbb{C}_1^{k-2}$, $\mathbb{C}_{k+1}^{\ell-2}$, $\mathbb{C}_{\ell+1}^{m}$ и им обратных подматриц $\mathbb{B}_1^{k-2} = [\mathbb{C}_1^{k-2}]^{-1}$, $\mathbb{B}_{k+1}^{\ell-2} = [\mathbb{C}_{k+1}^{\ell-2}]^{-1}$, $\mathbb{B}_{\ell+1}^{m} = [\mathbb{C}_{\ell+1}^{m}]^{-1}$ справедливы приведённые выше в (I.6)÷(I.9) результаты работ /4,6,7/. Далее в работе /$4_{9)}$/ были получены генераторы матрично-факторизованных представлений типа I.I, I.3 для $\mathbb{C}(1.1)$ и типа I.2, I.4 для $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ при следующих (более двух) комбинациях нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

у. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{\ell_{i-1}-1} = 0$ для любых целых $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ таких, что $(k < \ell_1 < \ell_i)$ и $(\ell_{i-1}+3 < \ell_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n-1]$ <u>либо</u> $[\Delta_k^m = 0$ и $\Delta^m_{\ell_{i-1}} = 0$ для любых целых $\ell_n, \ell_{n-1}, \ldots, \ell_2, \ell_1$ таких, что $((k-1) > \ell_n > \ell_{i-1})$ и $(\ell_i - 3 > \ell_{i-1})$, где $i = n-1, n-2, \ldots, 1]\}$ –равно нулю любое конечное число отдалённых (или близких т.е. $(k \le \ell_1 \le \ell_i)$ и $(\ell_{i-1}+3=\ell_i)$ либо $(k-1 \geqslant \ell_n \geqslant \ell_{i-1})$ и $(\ell_i - 3 = \ell_{i-1})$) минора каждого типа.

УI. $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 = \Delta_1^{\ell_{i-1}}]$ $\underline{и}$ $[\Delta_k^m = 0 = \Delta_{\ell_{i-1}}^m]$ для любых целых ℓ_1, ℓ_2, ..., ℓ_{n-1} таких, что $(k < \ell_1 < \ell_i)$ и $(\ell_{i-1}+3 < \ell_i)$, где $i = 1, 2, \ldots, n-1$ $\}$ – равно нулю одновременно любое конечное число отдалённых (или близких т.е. $(k \le \ell_1 \le \ell_i)$ и $(\ell_{i-1}+3=\ell_i)$) миноров обоих типов.

<u>Замечание I.2</u>. Здесь мы не приводим полученные нами в /4$_{9)}$/ представления типа I.I, I.3 для $\mathbb{C}(1.1)$ и представления типа I.2, I.4 для $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ при условиях У$_{1)}$, У$_{2)}$, УI в силу ограниченности объёма публикации. Напомним лишь, что в этих представлениях характерные матрицы ω имеют /4$_{9)}$/ общую блочно-трёхдиагональную структуру. Отметим, наконец, также, что и для $\mathbb{C}(1.1)$ при различных условиях I+УI существуют генераторы матрично-факторизованных представлений (сопряженных соответствующим представлениям $\mathbb{B} = \tilde{\mathbb{B}} + \Delta\mathbb{B}$) аддитивно-мультипликативного типа $\mathbb{C} = \tilde{\mathbb{C}} + \Delta\mathbb{C}$. Здесь же (в силу выше сказанного) приводим представления типа $\mathbb{C} = \tilde{\mathbb{C}} + \Delta\mathbb{C}$ для $\mathbb{C}(1.1)$ лишь при условиях I$_{1)}$, I$_{2)}$, П.

<u>Представление I.5</u>(для $\mathbb{C}(1.1)$ типа $\mathbb{C} = \tilde{\mathbb{C}} + \Delta\mathbb{C}$ при условиях I$_{1)}$, I$_{2)}$, П)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & - \\ & & p_{k-2} & q_{k-2} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2} & & \\
& \begin{bmatrix} 0_{k-1} & \\ & 0_k \end{bmatrix} & \\
& & \mathbb{C}_{k+1}^m = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbb{C}}}
+ \left\{
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0_1 & & & \\ & 0_2 & & \\ & & -- & \\ & & & 0_{k-2} \end{bmatrix} & & \\
(p\cdot\mathbb{B})_{k-1\,k-1\,1} \ldots (p\cdot\mathbb{B})_{k-1\,k-2\,k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (r\cdot\mathbb{B})_{k+1\,k+1\,k+1} \ldots (r\cdot\mathbb{B})_{k+1\,k+1\,m} \\
& & \begin{bmatrix} 0_{k+1} & & & \\ & 0_{k+2} & & \\ & & -- & \\ & & & 0_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbb{C}}_1} \times \right.
$$

$$
\left. \times \underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & \\ & & p_{k-2} & q_{k-2} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2} & & \\
& \begin{bmatrix} (q_{k-1} - p_{k-1}\cdot\mathbb{B}_{k-2\,k-2}\cdot r_{k-1}) & (r)_k \\ (p)_k & (q_k - r_{k+1}\cdot\mathbb{B}_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1}) \end{bmatrix} = \omega_k & \\
& & \mathbb{C}_{k+1}^m = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\overline{pq}_k}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0_1 & & \\ & 0_2 & \\ & -- & 0_{k-2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} (\mathbb{B}\cdot r)_{1\,k-2\,k-1} \\ --- \\ (\mathbb{B}\cdot r)_{k-2\,k-2\,k-1} \end{matrix} & \\
& \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & \\
& \begin{matrix} (\mathbb{B}\cdot p)_{k+1\,k+1\,k+1} \\ -\;- \\ (\mathbb{B}\cdot p)_{m\,k+1\,k+1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0_{k+1} & & \\ & 0_{k+2} & \\ & -- & 0_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbb{C}}_2} \right\} = (\tilde{\mathbb{C}} + \Delta\mathbb{C}) = \mathbb{C} \qquad \text{(I.24)}
$$

2. Инвариантность матрично-факторизованных представлений матриц $\mathbb{C}(1.1)$ и $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ относительно свойств вырожденности и плохой обусловленности соответствующих усечённых подматриц

Существование и единственность матрично-факторизованных представлений I.I, I.3, I.5 для блочно-трёхдиагональных матриц $\mathbb{C}$ общего вида (I.I) и I.2, I.4 им обратных матриц $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ была установлена нами в работах /4, 6/ в предположении комбинации (отмеченной в каждом из указанных разложений) нулевых блочно-угловых миноров.

Однако при расчетах на ЭВМ на практике значительно большие трудности возникают, как известно, не столько из-за вырожденности указанных усечённых подматриц, сколько из-за их возможной плохой обусловленности. Поэтому в настоящем параграфе будет показано, что приведённые выше в §I матричные факторизации существуют (и вид их не изменяется) также, если условия вырожденности заменить условиями плохой обусловленности соответствующих усечённых подматриц.

На самом деле, имеет место следующее

<u>Утверждение 2.I</u>. Если для матриц $\mathbb{C}(1.1)$ и $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ при получении факторизованных представлений, приведённых в §I, требования вырожденности заменить условиями плохой обусловленности соответствующих подматриц, то указанные представления (в частности их вид) не изменятся.

<u>Доказательство</u> свойств инвариантности представлений §I начнём с представления I.I. Напомним, что это разложение было получено /4[9])/ в предложениях $\{ det(\mathbb{C}) \neq 0 \rightarrow [(\Delta_1^{k-2} \equiv det(\mathbb{C}_1^{k-2}))$, $(\Delta_{k+1}^{m} \equiv det(\mathbb{C}_{k+1}^{m}))$, $det(\omega_k) \neq 0] \}$, а также $[\Delta_1^{k-1} \equiv det(\mathbb{C}_1^{k-1})] = 0$ и (или) $[\Delta_{k+1}^{m} \equiv det(\mathbb{C}_{k}^{m})] = 0$. Его справедливость устанавливалась путём перемножения факторизирующих сомножителей в (I.4) и проверкой основных матричных равенств: $\mathbb{C}_1^{k-2} \cdot \mathbb{B}_1^{k-2} = \mathbb{E}_1^{k-2} = \mathbb{B}_1^{k-2} \cdot \mathbb{C}_1^{k-2}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^{m} \cdot \mathbb{B}_{k+1}^{m} = \mathbb{E}_{k+1}^{m} = \mathbb{B}_{k+1}^{m} \cdot \mathbb{C}_{k+1}^{m}$. Мы не пользовались явным образом также обобщёнными матричными процессами $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3).
Условия же $\Delta_1^{k-1} = 0$ и (или) $\Delta_k^{m} = 0$ были при этом эквивалентны условиям[x)]

$$det[\zeta_{k-1} = (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot \mathbb{B}_{k-2\,k-2} \cdot z_{k-1})] = 0 \text{ и (или) } det[\zeta_k = (q_k - z_{k+1} \cdot \mathbb{B}_{k+1\,k+1} \cdot p_{k+1})] = 0 \ . \qquad (3.I)$$

---

x) Если, в частности, пользоваться для $[\mathbb{C}_1^{k-2}]^{-1}$ и $[\mathbb{C}_{k+1}^{m}]^{-1}$ матричными процессами $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3), то в данном случае $\zeta_{k-1} = \Lambda_k$ и $\zeta_k = G_{k-1}$.

Обратим теперь внимание на следующий факт. Хотя представление I.I для $\mathbb{C}(1.1)$ и было получено в предположениях $\Delta_1^{k-1}=0$ и (или) $\Delta_k^m=0$, оно имеет место и в случае, если эти условия не выполняются, но по-прежнему, выполняются условия $det(\mathbb{C}_1^{k-1})\neq 0$, $det(\omega_k)\neq 0$ и $det(\mathbb{C}_{k+1}^m)\neq 0$. В этом нетрудно убедиться, проследив формально указанную выше цепочку проверок матричных равенств. Следовательно, представление I.I при условиях $det(\mathbb{C})\neq 0$, $det(\mathbb{C}_1^{k-1})\neq 0$, $det(\mathbb{C}_{k+1}^m)\neq 0$, $det(\omega_k)\neq 0$ существует и единственно как при выполнении условий (2.I), так и в случае, если одно из условий (2.I) или оба из них нарушаются. В частности, обе матрицы ζ_{k-1}, ζ_k (или одна из них) могут быть и плохо обусловленными. Итак, если в процессе получения на ЭВМ оказываются хорошо обусловленными подматрицы $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^m$ и лишь плохо обусловленными матрицы ζ_{k-1} и (или) ζ_k, то представление I.I для $\mathbb{C}(1.1)$ также существует и единственно. При этом если сама матрица $\mathbb{C}(1.1)$ хорошо обусловлена, то хорошо обусловлена и характерная /4$_7$), 6/ матрица ω_k как составной элемент индуцированной /4$_7$), 6/ матрицы ξ_k. И напротив, ω_k плохо обусловлена при хорошо обусловленных $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^m$, если плохо обусловлена сама матрица $\mathbb{C}(1.1)$. Завершая первый этап доказательства, уместно сделать следующее

<u>Замечание 2.I</u>. Представление I.I является по сути мультипликативным расслоением (декомпозицией) матрицы $\mathbb{C}(1.1)$ в случае существования у неё двух невырожденных квазинезависимых подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^m$. При этом единственное прямое восстановление самой матрицы $\mathbb{C}(1.1)$ на основе указанных её подматриц осуществляется с использованием явно задаваемой характерной матрицы ω_k (I.4).

Выше мы рассмотрели по сути случай существования двух хорошо обусловленных невырожденных подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^m$, размерности которых позволяют работать с ними на выделяемой памяти ЭВМ. Пусть теперь одна (или сразу обе) из невырожденных подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^m$ являются либо плохо обусловленными, либо размерности их блоков (а следовательно, и их полные размерности) таковы, что необходимо (в свою очередь) их дальнейшее расслоение наподобие только что описанного выше. В такой ситуации мы практически неизбежно столкнёмся с необходимостью рассмотрения одного из представлений I.3 общего вида (I.20). При этом, опираясь на анализ выполненный выше, мы можем практически на ЭВМ осуществить мультипликативное расслоение (декомпозицию) матрицы $\mathbb{C}(1.1)$ с учётом конечного числа хорошо обусловленных её подматриц. В частности, в случае представления I.3 ими являются подматрицы $\mathbb{C}_1^{k-1}$, $\mathbb{C}_{k+1}^{\ell-1}$ и $\mathbb{C}_{\ell+1}^m$. Характерные матрицы ω ($\omega_{k,\ell}$ в случае представления I.3) являются /4$_9$)/ в общем случае (в свою очередь) невырожденными (если $\det(\mathbf{C}) \neq 0$) блочно-трёхдиагональными /4₉)/ матрицами. При этом они могут оказаться и плохо обусловленными, если плохо обусловлена исходная матрица $\mathbf{C}(1.1)$.

Применяя далее к ω -характерным блочно-трёхдиагональным матрицам всё сказанное о самой матрице $\mathbf{C}(1.1)$ и учитывая теорему 5/4₇)/, мы тем самым можем выполнить за два шага процесса полную декомпозицию матрицы $\mathbf{C}(1.1)$. При этом связь между квазинезависимыми подматрицами будет осуществляться на основе явно определяемых, характерных подматриц блочной размерности типа ω_k в (I.4). Утверждение 2.I доказано.

Из выполненного выше анализа следует необходимость введения следующего определения, которое значительно упростило бы как формулировки уже приведённых в §I результатов, так и результатов следующего параграфа.

<u>Определение 2.I</u>. Минимальный набор $\{ \mathbf{C}_\mu^\rho \}$ -блочно-трёхдиагональных усечённых подматриц общего вида (I.I) будем называть исчерпывающим матрицу $\mathbf{C}(1.1)$, если с помощью подматриц этого набора можно получить одно из её представлений вида I.I, I.3, I.5 и при этом $\mathbf{C}_\mu^\rho$ -подматрицы набора удовлетворяют следующим требованиям:

I. Каждая $\mathbf{C}_\mu^\rho$ -подматрица набора является хорошо обусловленной.

2. Каждая $\mathbf{C}_\mu^\rho$ -подматрица набора имеет максимально возможную размерность, согласованную с размерами памяти в ЭВМ, отводимой для получения либо $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{B}$, либо решения систем линейных уравнений $\mathbf{C} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{Y}$.

Как нетрудно видеть, в соответствии с данным определением в представлении I.I. исчерпывающими являются подматрицы $\mathbf{C}_1^{k-1}$ и $\mathbf{C}_{k+1}^m$; в представлении I.3-подматрицы $\mathbf{C}_1^{k-1}$, $\mathbf{C}_{k+1}^{l-1}$, $\mathbf{C}_{l+1}^m$ и т.д. Другими словами, исчерпывающие подматрицы - эта такие подматрицы, которые позволяют осуществить (как с точки зрения вычислительных свойств, так и с точки зрения затрат ресурсов ЭВМ) оптимальную декомпозицию матрицы $\mathbf{C}(1.1)$. С учётом сказанного выше данное определение, как нам представляется, является дальнейшим распространением его хорошо известного (см., например, /8÷10/) эквивалента из спектральной проблемы.

Выше, в §I, фактически приведены и алгоритмы практического выделения на ЭВМ такого набора подматриц $\{ \mathbf{C}_\mu^\rho \}$. При этом была использована техника обобщённых матричных процессов $\{ \Lambda \}$ (I.2) и $\{ \mathrm{G} \}$ (I.3).

3. Генераторы прямых методов решения систем линейных уравнений с блочно-трёхдиагональными матрицами общего вида

В настоящем параграфе будут построены на основе результатов первых двух параграфов, по сути посвящённых методам практической декомпозиции на ЭВМ блочно-трёхдиагональных матриц общего вида $\mathbf{C}\,(1.1)$, различные методы не итерационного типа решения на ЭВМ систем линейных уравнений с матрицами указанного вида.

Имеет место следующая

Теорема 3.I. Пусть $\mathbf{C}$ –невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I), минимальный исчерпывающий набор $\{\mathbf{C}_{\nu}^{\rho}\}$ которой состоит только из двух подматриц $\mathbf{C}_1^{k-2}$ и $\mathbf{C}_{k+1}^{m}$. Тогда генератор различных представлений решения систем линейных уравнений $\mathbf{C}\cdot X = Y$ имеет вид

Представление 3.I (типа $X = \overset{o}{X} + (B\cdot\Delta X = \langle B\rangle\cdot\langle\Delta X\rangle)$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} X_1\\ X_2\\ \cdots \\ X_{k-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k-1}\\X_k\end{bmatrix}\\ X_{k+1}\\ X_{k+2}\\ \cdots\\ X_m\end{bmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & \\ p_2 & q_2 & z_3 & \\ & \cdots & & \\ & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ \cdots\\ y_{k-2}\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 0_{k-1}\\ 0_k\end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} q_{k+1} & z_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & z_{k+3} & \\ & \cdots & & \\ & & p_m & q_m\end{bmatrix}^{-1}\times \begin{bmatrix} y_{k+1}\\ y_{k+2}\\ \cdots\\ y_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\overset{o}{X}} + \left\{ \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}0_1&&&\\&0_2&&\\&&\cdots&\\&&&0_{k-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(-B_{1\,k-2}\cdot z_{k-1})\\ (-B_{2\,k-2}\cdot z_{k-1})\\ \cdots\\ (-B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1})\end{matrix} & \\ & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & \\ & \begin{matrix}(-B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ (-B_{k+2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ \cdots \\ (-B_{m\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}0_{k+1}&&&\\&0_{k+2}&&\\&&\cdots&\\&&&0_m\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{B_1} \underbrace{\begin{bmatrix}0_1\\0_2\\ \cdots\\ 0_{k-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k-1}\\X_k\end{bmatrix}\\ 0_{k+1}\\0_{k+2}\\ \cdots\\ 0_m\end{bmatrix}}_{\Delta X} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix}(-B_{1\,k-2}\cdot z_{k-1}) & 0_1\\ (-B_{2\,k-2}\cdot z_{k-1}) & 0_2\\ \cdots & \cdots\\ (-B_{k-1\,k-2}\cdot z_{k-1}) & 0_{k-2}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}0_{k+1} & (-B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ 0_{k+2} & (-B_{k+2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\ \cdots & \cdots\\ 0_m & (-B_{m\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\langle B_1\rangle} \times \underbrace{\begin{bmatrix}X_{k-1}\\X_k\end{bmatrix}}_{\langle\Delta X\rangle}\right\} \quad (3.I)$$

При этом если выделение исчерпывающих подматриц $\mathbf{C}_1^{k-2}$ и $\mathbf{C}_{k+1}^{m}$ было осуществлено с использованием обобщённых матричных процессов $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3), то для B_{ij} –элементов-блоков обратных подматриц $B_1^{k-2} = [\mathbf{C}_1^{k-2}]^{-1}$ и $B_{k+1}^{m} = [\mathbf{C}_{k+1}^{m}]^{-1}$ имеет место одно из прямых факторизованных представлений вида I.I$'$ ÷I.6$'$ или вида (I.I6), если соответствующие матрицы $\{\Lambda\}$ или $\{G\}$ хорошо обусловлены$^{x)}$.

x) Замечание 3.I. Если подматрицы $\mathbf{C}_1^{k-2}$ и $\mathbf{C}_{k+1}^{m}$ известны априори, или выделены каким-либо отличным от указанного в §I способом, либо у матриц $\mathbf{C}_1^{k-2}$, $\mathbf{C}_{k+1}^{m}$ среди соответствующих матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ имеются плохо обусловленные, то подвектор $\overset{o}{X}$ и элементы-блоки $\{B_{i\,k-1}\}_{i=1}^{k-2}$, $\{B_{i\,k+1}\}_{i=k+1}^{m}$, $\{B_{k-2\,j}\}_{j=1}^{k-2}$ и $\{B_{k+1\,j}\}_{j=k+1}^{m}$ могут быть найдены любым другим из известных методов, обладающих хорошими вычислительными свойствами.

Здесь $[X_{k-1}, X_k]^T$ – компоненты решения X, в свою очередь, являются решением следующей индуцированной совместной системы уравнений:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-2\,k-2} \cdot z_{k-1}) & (z_k) \\ (p_k) & (q_k - z_{k+1} \cdot B_{k+1\,k+1} \cdot p_{k+1}) \end{bmatrix}}_{\omega_k} \underbrace{\begin{bmatrix} X_{k-1} \\ X_k \end{bmatrix}}_{<\Delta X>} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_{k-1} - p_{k-1} \cdot (\sum_{j=1}^{k-2} B_{k-2\,j} \cdot y_j) \\ y_k - z_{k+1} \cdot (\sum_{j=k+1}^{m} B_{k+1\,j} \cdot y_j) \end{bmatrix}}_{<\Delta Y>}, \text{ где} \tag{3.2}$$

в (3.I) и (3.2) для $\{B_{k-2\,j}\}_{j=1}^{k-2}$ – последней строки, $\{B_{i\,k-2}\}_{i=1}^{k-2}$ –последнего столбца подматрицы $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ и $\{B_{k+1\,j}\}_{j=k+1}^{m}$ – первой строки, $\{B_{i\,k+1}\}_{i=k+1}^{m}$ – первого столбца подматрицы $B_{k+1}^{m} = [C_{k+1}^{m}]^{-1}$ при использовании $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3) имеет место одно из представлений вида (I.I7)+(I.I9).

<u>Доказательство</u>. Генератор различных представлений решения X типа (3.I)+(3.2) получаем[x)] из формального равенства $X = (B = C^{-1}) \cdot Y$ после подстановки в него явного вида представления I.2 для $B = C^{-1}$ типа $B = \tilde{B} + \Delta B$. Невырожденность матрицы ω_k следует из представления I.I мультипликативного типа для $C(i.i)$ с учётом невырожденности матриц $C(i.i)$. Справедливость же генератора (3.I)+(3.2) проверяется непосредственно подстановкой X (3.I)+(3.2) в уравнение $C \cdot X = Y$. Отметим, что при этом следует воспользоваться основными равенствами $B_1^{k-2} \cdot C_1^{k-2} = E_1^{k-2} = C_1^{k-2} \cdot B_1^{k-2}$ и $B_{k+1}^{m} \cdot C_{k+1}^{m} = E_{k+1}^{m} = C_{k+1}^{m} \cdot B_{k+1}^{m}$ для B_{ij} – элементов- блоков обратных подматриц $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ и $B_{k+1}^{m} = [C_{k+1}^{m}]^{-1}$ соответственно. Теорема доказана.

Далее в следующей теореме рассматривается генератор различных представлений решения X (типа $X = \overset{o}{X} + (B \cdot \Delta X = <B> \cdot <\Delta X>)$) систем линейных уравнений $C \cdot X = Y$ в случае, когда исчерпывающий набор $\{C_\mu^\rho\}$ состоит только из трёх подматриц C_1^{k-2}, C_{k+1}^{l-2} и C_{l+1}^{m}.

Имеет место следующая

<u>Теорема 3.2</u>. Пусть C –невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I), минимальный исчерпывающий набор $\{C_\mu^\rho\}$ которой состоит только из трех подматриц C_1^{k-2}, $C_{k+1}^{l_2}$ и C_{l+1}^{m}. Тогда генератор различных представлений решения систем линейных уравнений $C \cdot X = Y$ имеет вид

---

x) Здесь и далее мы останавливаемся лишь на основных моментах доказательства.

Представление 3.2 (типа $X=\overset{\circ}{X}+(B\cdot\Delta X=\langle B\rangle\cdot\langle\Delta X\rangle)$)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} X_1\\ X_2\\ --\\ X_{k-2}\\ \begin{bmatrix} X_{k-1}\\ X_k\end{bmatrix}\\ X_{k+1}\\ X_{k+2}\\ --\\ X_{l-2}\\ \begin{bmatrix} X_{l-1}\\ X_l\end{bmatrix}\\ X_{l+1}\\ X_{l+2}\\ --\\ X_{m-1}\\ X_m\end{bmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & - \\ & & p_{k-2} & q_{k-2}\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix} y_1\\ y_2\\ --\\ y_{k-2}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 0_{k-1}\\ 0_k\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_{l-2} & q_{l-2}\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix} y_{k+1}\\ y_{k+2}\\ --\\ y_{l-2}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} 0_{l-1}\\ 0_l\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} q_{l+1} & r_{l+2} & & \\ p_{l+2} & q_{l+2} & r_{l+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_m & q_m\end{bmatrix}^{-1}\times\begin{bmatrix} y_{l+1}\\ y_{l+2}\\ --\\ y_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\overset{\circ}{X}}
+
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0_1 & & \\ & 0_2 & \\ & -- & \\ & & 0_{k-2}\end{bmatrix}\begin{matrix}(-B_{1,k-2}\cdot r_{k-1})\\ (-B_{2,k-2}\cdot r_{k-1})\\ --\\ (-B_{k-2,k-2}\cdot r_{k-1})\end{matrix} & & & & \\
& \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & & \\
& \begin{matrix}(-B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1})\\ (-B_{k+2,k+1}\cdot p_{k+1})\\ --\\ (-B_{l-2,k+1}\cdot p_{k+1})\end{matrix}\begin{bmatrix} 0_{k+1} & & \\ & 0_{k+2} & \\ & -- & \\ & & 0_{l-2}\end{bmatrix}\begin{matrix}(-B_{k+1,l-2}\cdot r_{l-1})\\ (-B_{k+2,l-2}\cdot r_{l-1})\\ --\\ (-B_{l-2,l-2}\cdot r_{l-1})\end{matrix} & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ & E_l\end{bmatrix} & \\
& & & \begin{matrix}(-B_{l+1,l+1}\cdot p_{l+1})\\ (-B_{l+2,l+1}\cdot p_{l+1})\\ --\\ (-B_{m,l+1}\cdot p_{l+1})\end{matrix}\begin{bmatrix} 0_{l+1} & & \\ & 0_{l+2} & \\ & -- & \\ & & 0_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{B_1}
\underbrace{\begin{bmatrix} 0_1\\ 0_2\\ --\\ 0_{k-2}\\ \begin{bmatrix} X_{k-1}\\ X_k\end{bmatrix}\\ 0_{k+1}\\ 0_{k+2}\\ --\\ 0_{l-2}\\ \begin{bmatrix} X_{l-1}\\ X_l\end{bmatrix}\\ 0_{l+1}\\ 0_{l+2}\\ --\\ 0_m\end{bmatrix}}_{\Delta X}
\equiv
$$

$$
\equiv
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} (-B_{1,k-1}\cdot r_{k-1}) & 0_1\\ (-B_{2,k-2}\cdot r_{k-1}) & 0_2\\ -- & --\\ (-B_{k-2,k-2}\cdot r_{k-1}) & 0_{k-2}\end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & \\
\begin{bmatrix} 0_{k+1} & (-B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1})\\ 0_{k+2} & (-B_{k+2,k+1}\cdot p_{k+1})\\ -- & --\\ 0_{l-2} & (-B_{l-2,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (-B_{k+1,l-2}\cdot r_{l-1}) & 0_{k+1}\\ (-B_{k+2,l-2}\cdot r_{l-1}) & 0_{k+2}\\ -- & --\\ (-B_{l-2,l-2}\cdot r_{l-1}) & 0_{l-2}\end{bmatrix}\\
& \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ & E_l\end{bmatrix}\\
& \begin{bmatrix} 0_{l+1} & (-B_{l+1,l+1}\cdot p_{l+1})\\ -- & --\\ 0_m & (-B_{m,l+1}\cdot p_{l+1})\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\langle B_1\rangle}
\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{k-1}\\ X_k\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix} X_{l-1}\\ X_l\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\langle\Delta X\rangle}
. \qquad (3.3)
$$

При этом, если выделение исчерпывающих подматриц C_1^{k-2}, C_{k+1}^{l-2} и C_{l+1}^{m} было осуществлено с использованием обобщённых матричных процессов $\{A\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3), то для B_{ij} – элементов-блоков обратных подматриц $B_1^{k-2}=[C_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^{l-2}=[C_{k+1}^{l-2}]^{-1}$ и $B_{l+1}^{m}=[C_{l+1}^{m}]^{-1}$ имеет место

одно из прямых представлений вида I.I'÷I.6' или вида (I.I6), если соответствующие матрицы $\{\Lambda\}$ или $\{G\}$ хорошо обусловлены[x)].
Здесь $[x_{k-1}, x_k]^T$, $[x_{l-1}, x_l]^T$ – компоненты решения X, в свою очередь, являются решением следующей индуцированной совместной системы уравнений:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-1k-1}\cdot z_{k-1}) & (z_k) \\ (p_k) & (q_k - z_{k+1}\cdot B_{k+1k+1}\cdot p_{k+1}) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (-z_{k+1}\cdot B_{k+1l-1}\cdot z_{l-1}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbb{O} & (-p_{l-1}\cdot B_{l-1k+1}\cdot p_{k+1}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} (q_{l-1}-p_{l-1}\cdot B_{l-1l-1}\cdot z_{l-1}) & (z_l) \\ (p_l) & (q_l - z_{l+1}\cdot B_{l+1l+1}\cdot p_{l+1}) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{<\tilde{\omega}_{k,l}>} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_{l-1} \\ x_l \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{<\Delta X>} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1} - p_{k-1}\cdot(\sum_{j=1}^{k-2} B_{k-2j}\cdot y_j) \\ y_k - z_{k+1}\cdot(\sum_{j=k+1}^{l-2} B_{k+1j}\cdot y_j) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{l-1} - p_{l-1}\cdot(\sum_{j=k+1}^{l-2} B_{l-2j}\cdot y_j) \\ y_l - z_{l+1}\cdot(\sum_{j=l+1}^{m} B_{l+1j}\cdot y_j) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{<\Delta Y>} \quad (3.4)$$

, где в (3,3) и (3,4) для $[\{B_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}$ – последней строки, $\{B_{k-2j}\}_{j=1}^{k-2}$ – последнего столбца подматрицы $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$; $\{B_{ik+1}\}_{i=k+1}^{l-2}$ – первого столбца, $\{B_{il-2}\}_{i=k+1}^{l-2}$ – последнего столбца, $\{B_{k+1j}\}_{j=k+1}^{l-2}$ – первой строки, $\{B_{l-2j}\}_{j=k+1}^{l-2}$ – последней строки подматрицы $B_{k+1}^{l-2} = [C_{k+1}^{l-2}]^{-1}$; $\{B_{il+1}\}_{i=l+1}^{m}$ – первого столбца, $\{B_{l+1j}\}_{j=l+1}^{m}$ – первой строки подматрицы $B_{l+1}^{m} = [C_{l+1}^{m}]^{-1}$ при использовании $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3) имеет место одно из представлений вида (I.I7)÷(I.I9).

<u>Доказательство</u>. Генератор различных представлений решения X типа (3.3)÷(3.4) получаем из формального равенства $X = (B = C^{-1})\cdot Y$ после подстановки в него явного вида представления I.4 для $B = C^{-1}$ типа $B = \tilde{B} + \Delta B$. Невырожденность матрицы $<\tilde{\omega}_{k,l}>$ следует из представления I.3 мультипликативного типа для $C(1.1)$ с учётом $\det(C) \neq 0$. Справедливость же генератора (3.3)÷(3.4) проверяется непосредственно подстановкой X (3.3)÷(3.4) в уравнение $C\cdot X = Y$. При этом следует воспользоваться основными равенствами

$$B_1^{k-2}\cdot C_1^{k-2} = E_1^{k-2} = C_1^{k-2}\cdot B_1^{k-2}, \quad B_{k+1}^{l-2}\cdot C_{k+1}^{l-2} = E_{k+1}^{l-2} = C_{k+1}^{l-2}\cdot B_{k+1}^{l-2} \text{ и } B_{l+1}^{m}\cdot C_{l+1}^{m} = E_{l+1}^{m} = C_{l+1}^{m}\cdot B_{l+1}^{m}$$

для B_{ij} – элементов-блоков подматриц $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^{l-2} = [C_{k+1}^{l-2}]^{-1}$ и $B_{l+1}^{m} = [C_{l+1}^{m}]^{-1}$ соответственно.
Теорема доказана.

Имеет место следующая
<u>Теорема 3.3</u>. Пусть C – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I), минимальный исчерпывающий набор $\{C_\mu^\rho\}$ которой <u>состоит из любого конечного числа</u> подматриц C_μ^ρ. Тогда генератор

x) Здесь также справедливо Замечание 3.I.

различных представлений решения систем линейных уравнений $C\cdot X = Y$ имеет вид

<u>Представление 3.3</u> (типа $X = \mathring{X} + (B\cdot\Delta X = \langle B\rangle\cdot\langle\Delta X\rangle)$)

$$
\underbrace{\begin{bmatrix} X_1\\ X_2\\ \vdots\\ X_{k-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k-1}\\ X_k\end{bmatrix}\\ X_{k+1}\\ X_{k+2}\\ \vdots\\ X_{k'-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k'-1}\\ X_{k'}\end{bmatrix}\\ X_{k'+1}\\ X_{k'+2}\\ \vdots\\ X_{k''-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k''-1}\\ X_{k''}\end{bmatrix}\\ X_{k''+1}\\ X_{k''+2}\\ \vdots\\ X_m\end{bmatrix}}_{X}
=
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} B_1^{k-2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_{k-2}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k-1}\\ \mathbf{0}_k\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} B_{k+1}^{k'-2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_{k+1}\\ y_{k+2}\\ \vdots\\ y_{k'-2}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k'-1}\\ \mathbf{0}_{k'}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} B_{k'+1}^{k''-2}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_{k'+1}\\ y_{k'+2}\\ \vdots\\ y_{k''-2}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k''-1}\\ \mathbf{0}_{k''}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix} B_{k''+1}^{m}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y_{k''+1}\\ y_{k''+2}\\ \vdots\\ y_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\mathring{X}}
+\Bigg\{
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\mathbf{0}_1 & & \\ & \mathbf{0}_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \mathbf{0}_{k-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(-B_{1,k-2}\cdot z_{k-1})\\ \vdots\\ (-B_{k-2,k-2}\cdot z_{k-1})\end{matrix} & & & & & & & \\
& \begin{bmatrix}E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & & & & & & \\
& & \begin{matrix}(-B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1})\\ \vdots\\ (-B_{k'-2,k+1}\cdot p_{k+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k+1} & \\ & \ddots \\ & & \mathbf{0}_{k'-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(-B_{k+1,k'-2}\cdot z_{k'-1})\\ \vdots\\ (-B_{k'-2,k'-2}\cdot z_{k'-1})\end{matrix} & & & & \\
& & & & \begin{bmatrix}E_{k'-1} & \\ & E_{k'}\end{bmatrix} & & & & \\
& & & & & \begin{matrix}(-B_{k'+1,k'+1}\cdot p_{k'+1})\\ \vdots\\ (-B_{k''-2,k'+1}\cdot p_{k'+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k'+1} & \\ & \ddots \\ & & \mathbf{0}_{k''-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(-B_{k'+1,k''-2}\cdot z_{k''-1})\\ \vdots\\ (-B_{k''-2,k''-2}\cdot z_{k''-1})\end{matrix} & \\
& & & & & & & \begin{bmatrix}E_{k''-1} & \\ & E_{k''}\end{bmatrix} & \\
& & & & & & & & \begin{matrix}(-B_{k''+1,k''+1}\cdot p_{k''+1})\\ \vdots\\ (-B_{m,k''+1}\cdot p_{k''+1})\end{matrix}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k''+1} & \\ & \ddots \\ & & \mathbf{0}_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{B_1}\times
$$

$$
\times\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{0}_1\\ \mathbf{0}_2\\ \vdots\\ \mathbf{0}_{k-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k-1}\\ X_k\end{bmatrix}\\ \mathbf{0}_{k+1}\\ \mathbf{0}_{k+2}\\ \vdots\\ \mathbf{0}_{k'-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k'-1}\\ X_{k'}\end{bmatrix}\\ \mathbf{0}_{k'+1}\\ \vdots\\ \mathbf{0}_{k''-2}\\ \begin{bmatrix}X_{k''-1}\\ X_{k''}\end{bmatrix}\\ \mathbf{0}_{k''+1}\\ \vdots\\ \mathbf{0}_m\end{bmatrix}}_{\Delta X}
\equiv
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}(-B_{1,k-2}\cdot z_{k-1}) & \mathbf{0}_1\\ \vdots & \vdots\\ (-B_{k-2,k-2}\cdot z_{k-1}) & \mathbf{0}_{k-2}\end{bmatrix} & & \\
\begin{bmatrix}E_{k-1} & \\ & E_k\end{bmatrix} & & \\
\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k+1} & (-B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1})\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{0}_{k'-2} & (-B_{k'-2,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(-B_{k+1,k'-2}\cdot z_{k'-1}) & \mathbf{0}_{k+1}\\ \vdots & \vdots\\ (-B_{k'-2,k'-2}\cdot z_{k'-1}) & \mathbf{0}_{k'-2}\end{bmatrix} & \\
& \begin{bmatrix}E_{k'-1} & \\ & E_{k'}\end{bmatrix} & \\
& \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k'+1} & (-B_{k'+1,k'+1}\cdot p_{k'+1})\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{0}_{k''-2} & (-B_{k''-2,k'+1}\cdot p_{k'+1})\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(-B_{k'+1,k''-2}\cdot z_{k''-1}) & \mathbf{0}_{k'+1}\\ \vdots & \vdots\\ (-B_{k''-2,k''-2}\cdot z_{k''-1}) & \mathbf{0}_{k''-2}\end{bmatrix}\\
& & \begin{bmatrix}E_{k''-1} & \\ & E_{k''}\end{bmatrix}\\
& & \begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k''+1} & (-B_{k''+1,k''+1}\cdot p_{k''+1})\\ \vdots & \vdots\\ \mathbf{0}_m & (-B_{m,k''+1}\cdot p_{k''+1})\end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\langle B_1\rangle}
\times
\underbrace{\begin{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{k-1}\\ X_k\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}X_{k'-1}\\ X_{k'}\end{bmatrix}\\ \begin{bmatrix}X_{k''-1}\\ X_{k''}\end{bmatrix}\end{bmatrix}}_{\langle\Delta X\rangle}
\Bigg\}. \qquad (3.5)
$$

При этом если выделение исчерпывающих подматриц $\mathbb{C}_1^{k-2}$, $\mathbb{C}_{k+1}^{k'-2}$, $\mathbb{C}_{k'+1}^{k''-2}$ и $\mathbb{C}_{k''+1}^{m}$ было осуществлено с использованием обобщённых матричных процессов $\{\Lambda\}$(I.2) и $\{G\}$(I.3), то для B_{ij} –элементов-блоков соответствующих обратных подматриц $B_1^{k-2}=[\mathbb{C}_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^{k'-2}=[\mathbb{C}_{k+1}^{k'-2}]^{-1}$, $B_{k'+1}^{k''-2}=[\mathbb{C}_{k'+1}^{k''-2}]^{-1}$ и $B_{k''+1}^{m}=[\mathbb{C}_{k''+1}^{m}]^{-1}$ имеет место одно из прямых факторизованных представлений вида I.I'+I.6' или вида (I.I6), если соответствующие матрицы $\{\Lambda\}$ или $\{G\}$ хорошо обусловлены[x]. Здесь

$[X_{k-1},X_k]^T$, $[X_{k'-1},X_{k'}]^T$ и $[X_{k''-1},X_{k''}]^T$– компоненты решения X, в свою очередь, могут быть найдены любым (в том числе и рассмотренными выше) методом из следующей индуцированной совместной блочно-трёхдиагональной системы уравнений:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [Q_{kk}] & [\mathbb{R}_{k+1k'}] & \\ [\mathbb{P}_{k'k+1}] & [Q_{k'k'}] & [\mathbb{R}_{k'+1k''}] \\ & [\mathbb{P}_{k''k'+1}] & [Q_{k''k''}] \end{bmatrix}}_{\langle\widetilde{\omega}\rangle_{k,k',k''}} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{k-1} \\ X_k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{k'-1} \\ X_{k'} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} X_{k''-1} \\ X_{k''} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\langle\Delta X\rangle} = \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{k-1}-p_{k-1}\cdot(\sum_{j=1}^{k-2} B_{k-2j}\cdot y_j) \\ y_k-z_{k+1}\cdot(\sum_{j=k+1}^{k'-2} B_{k+1j}\cdot y_j) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{k'-1}-p_{k'-1}\cdot(\sum_{j=k+1}^{k'-2} B_{k'-2j}\cdot y_j) \\ y_{k'}-z_{k'+1}\cdot(\sum_{j=k'+1}^{k''-2} B_{k'+1j}\cdot y_j) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y_{k''-1}-p_{k''-1}\cdot(\sum_{j=k'+1}^{k''-2} B_{k''-2j}\cdot y_j) \\ y_{k''}-z_{k''+1}\cdot(\sum_{j=k''+1}^{m} B_{k''+1j}\cdot y_j) \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\langle\Delta Y\rangle} \tag{3.6}$$

, где

$$\left\{\begin{array}{l} Q_{kk}=\begin{bmatrix} (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2k-2}\cdot z_{k-1}) & (z_k) \\ (p_k) & (q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1k+1}\cdot p_{k+1}) \end{bmatrix}, Q_{k'k'}=\begin{bmatrix} (q_{k'-1}-p_{k'-1}\cdot B_{k'-2k'-2}\cdot z_{k'-1}) & (z_{k'}) \\ (p_{k'}) & (q_{k'}-z_{k'+1}\cdot B_{k'+1k'+1}\cdot p_{k'+1}) \end{bmatrix}, Q_{k''k''}=\begin{bmatrix} (q_{k''-1}-p_{k''-1}\cdot B_{k''-2k''-2}\cdot z_{k''-1}) & (z_{k''}) \\ (p_{k''}) & (q_{k''}-z_{k''+1}\cdot B_{k''+1k''+1}\cdot p_{k''+1}) \end{bmatrix}, \\ \mathbb{R}_{k+1k'}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (-z_{k+1}\cdot B_{k+1k'-2}\cdot z_{k'-1}) & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{R}_{k'+1k''}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (-z_{k'+1}\cdot B_{k'+1k''-2}\cdot z_{k''-1}) & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{P}_{k'k+1}=\begin{bmatrix} 0 & (-p_{k'-1}\cdot B_{k'-2k+1}\cdot p_{k+1}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \mathbb{P}_{k''k'+1}=\begin{bmatrix} 0 & (-p_{k''-1}\cdot B_{k''-2k'+1}\cdot p_{k'+1}) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}\right. \tag{3.7}$$

В (3.5)+(3.7) $[\,k'=\ell_{i-1}$, $k''=\ell_i$, где $(\ell_{i-1}+3<\ell_i$ или $(\ell_{i-1}+3=\ell_i)$, $1\le i\le n-1\,]$ и для соответствующих $B_{\gamma\rho}$ –столбцов (строк) обратных подматриц $B_\mu^\rho=[\mathbb{C}_\mu^\rho]^{-1}$ при использовании $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3) имеет место одно из представлений вида (I.I7)+(I.I9).

Доказательство. Здесь также генератор различных представлений решения X типа (3.5)+(3.7) получаем из формального равенства $X=(B=\mathbb{C}^{-1})\cdot Y$ после подстановки в него явного вида представления 3.3 из /4$_9$)/ для $B=\mathbb{C}^{-1}$ типа $B=\tilde{B}+\Delta B$. Невырожденность матрицы $\langle\widetilde{\omega}\rangle_{k,k',k''}$ следует из представления 2.3 из /4$_9$)/ для $\mathbb{C}(1.1)$ мультипликативного

---

x) Здесь также справедливо Замечание 3.I.

типа с учетом $\det(\mathbb{C}) \neq 0$. Справедливость же генератора (3.5)+(3.7) проверяется непосредственно подстановкой X в уравнение $\mathbb{C}\cdot X = Y$. При этом следует учесть основные моменты сказанного выше в доказательстве теоремы 3.2. Теорема доказана.

<u>Лемма 3.I.</u> Генераторы представлений 3.I÷3.3 решения системы $\mathbb{C}\cdot X = Y$ где $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) обеспечивают как $\min\limits_{X} \|\mathbb{C}\cdot X - Y\|$ – минимум нормы невязки, так и $\min\limits_{X} \|X\|$ – минимум нормы самого решения при любом $\{\mathbb{C}_{\mu}^{\rho}\}$ – конечном минимальном наборе исчерпывающих подматриц $\mathbb{C}_{\mu}^{\rho}$.

<u>Доказательство</u> осуществляется методом полной математической индукции. В целях экономии места мы остановимся лишь на его первом шаге, а остальные этапы доказательства проводятся аналогично. Итак, покажем, что утверждения леммы верны в случае, когда $\{\mathbb{C}_{\mu}^{\rho}\}$ – минимальной исчерпывающий набор состоит из двух подматриц $\mathbb{C}_{1}^{k+1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^{m}$, т.е. воспользуемся генератором (3.I)+(3.2). Имеем

$$\min_{\tilde{X}} \|\mathbb{C}\cdot X - Y\| = \min_{\tilde{X}} \|\mathbb{C}\cdot(\mathring{\tilde{X}} + \langle B_1\rangle\cdot\langle\Delta\tilde{X}\rangle) - Y\| = \min_{\tilde{X}} \|(\mathbb{C}\cdot\mathring{\tilde{X}} +$$
$$+ \mathbb{C}\cdot\langle B_1\rangle\cdot\langle\Delta\tilde{X}\rangle) - Y\| = \min_{\tilde{X}} \|(\mathbb{C}\cdot\mathring{\tilde{X}} - Y) + \mathbb{C}\cdot\langle B_1\rangle\cdot\langle\Delta\tilde{X}\rangle\| =$$
$$= \min_{\langle\Delta\tilde{X}\rangle} \|\mathbb{C}\cdot\langle B_1\rangle\cdot\langle\Delta\tilde{X}\rangle - \langle\Delta\tilde{Y}\rangle\| = \|\omega_k\cdot(\omega_k^{-1}\cdot\langle\Delta\tilde{Y}\rangle) - \langle\Delta\tilde{Y}\rangle\|.$$

Теоретически последний минимум равен нулю в силу совместности (3.2). Минимум же нормы решения $\tilde{X} = (\mathring{\tilde{X}} + \langle B_1\rangle\cdot\langle\Delta\tilde{X}\rangle)$ (3.I) обеспечивается как хорошей обусловленностью матриц $\{\mathbb{C}_{\mu}^{\rho}\}$ – минимального исчерпывающего набора, так и возможностью выбора минимального по норме решения совместной системы (3.2). При этом если матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и следовательно ω_k в (3.2) плохо обусловлены, то $\langle\Delta\tilde{X}\rangle$, и следовательно, $\tilde{X}$ находятся в смысле минимального по норме псевдорешения /I0/.

<u>Замечание 3.2.</u> Отметим, наконец, что рассмотренные выше методы решения систем уравнений $\mathbb{C}\cdot X = Y$ являются также эффективным математическим инструментом /6/ численного решения на ЭВМ как задачи нахождения собственных $(\mathbb{C} - \lambda E)\mathcal{U}^{(1)} = 0$ и корневых $(\mathbb{C} - \lambda E)\cdot\mathcal{U}^{(j)} = \mathcal{U}^{(j-1)}$ векторов матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), отвечающих собственному значению λ, так и нахождения самого λ.

Заключение

В настоящей работе построены генераторы прямых методов декомпозиционного типа решения систем линейных уравнений с блочно-трёхдиагональными матрицами $\mathbb{C}$ (I.I) общего вида. Даны эффективные алгоритмы декомпозиции и построения единственных операторов связи между декомпозиционными подпространствами.

Литература

1. Лэсдон Л.С. Оптимизация больших систем (перевод с анг. под редакцией А.А.Первозванного), "Наука", М., 1975.
2. Ортега Дж. Введение в параллельные и векторные методы решения линейных систем (перевод с анг. под редакцией Х.Д.Икрамова), "Мир", М., 1991.
3. Блиадзе И.Д., Меладзе Г.В. Итерационные методы декомпозиции для решения систем уравнений с блочно-трёхдиагональной матрицей. "ЖВМ и МФ". 1989. №6, 803-812.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринты ОИЯИ: Р11-87-533. Дубна, 1987; Р11-87-623. Дубна,1987; Р11-88-599. Дубна,1988; Р11-88-786. Дубна, 1988; Р11-88-922. Дубна, 1988; Р11-89-203. Дубна, 1989; Р11-89-340. Дубна 1989; Р11-93-248 . Дубна 1993; Р11-93-265 . Дубна 1993.
5. Emelyanenko G.A. Oh the methods of calculation with spars matrices. JINR, E11-83-71, Dubna, 1983; Cahiers Math. Montpellier, 1983. vol. 28, p. 87-94.

   Емельяненко Г.А. О свойствах систем линейных уравнений с неособенными трёхдиагональными, ленточными и квазитрёхдиагональными матрицами. Сообщение ОИЯИ, Р11-85-489, Дубна, 1985.
6. Емельяненко Г.А. Блочно-трёхдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск 1992; ОИЯИ 11-92-4. Дубна 1992.
7. Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси 1990.
8. Хорн П., Джонсон Ч. Матричный анализ (перевод с анг. под редакцией Х.Д.Икрамова), "Мир", М., 1989.
9. Годунов С.К. Решение систем линейных уравнений, "Наука", Новосибирск 1980.
10. Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру, "Наука", Новосибирск, 1991.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1993 года.