объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-93-265

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов

ГЕНЕРАТОРЫ МАТРИЧНО-ФАКТОРИЗОВАННЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ И ИМ ОБРАТНЫХ МАТРИЦ

Направлено в «Siberian Journal of Computer Mathematics»

1993

Введение. В работах /I÷3/ были построены, изучены и частично систематизированы различные множества представлений разных типов для блочно-трёхдиагональных матриц $\mathbb{C}$ общего вида (I.I) и им обратных матриц $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ как в отсутствие у $\mathbb{C}(1.1)$ нулевых блочно-угловых миноров, так и при наличии их различных комбинаций. При этом наиболее полно были решены указанные задачи лишь при отсутствии нулевых ведущих блочно-угловых миноров. Поэтому в настоящей работе ставится и решается задача построения генераторов матрично-факторизованных представлений разных типов для $\mathbb{C}(1.1)$ и $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ и их систематизации при наличии всевозможных комбинаций у $\mathbb{C}(1.1)$ нулевых ведущих блочно-угловых миноров.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C}=\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \quad \text{где} \tag{I.I}$$

$\{q_j\}_{j=1}^{m}$ – диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а

$\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ – под (над) диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{j-1}$ и $q_j\}_{j=2}^{m}$.

Напомним, что (как и в /I÷3/) под ведущими $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{m}$ – верхними и $\{\Delta_j^m\}_{j=1}^{m}$ – нижними блочно-угловыми минорами $\mathbb{C}(1.1)$ понимаются определители ведущих усечённых (т.е. уменьшенной размерности) подматриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

В случае обращения в нуль ведущих верхних либо нижних (а также одновременно верхних и нижних) блочно-угловых миноров невырожденных матриц $\mathbb{C}(1.1)$ в работах /I÷3/ нами были введены обобщённые матричные (процессы)-последовательности вида:

$$\begin{cases} \text{Если } det(\Lambda_j)\neq 0 \text{ для всех } 2\le j\le m+1, \text{то } \Lambda_{j+1}=q_j-p_j\cdot\Lambda_j^{-1}\cdot r_j, \\ \Lambda_2=q_1,\ det(q_1)\neq 0,\ j=2,3,\dots,m. \\ \text{Если } det(\Lambda_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (3\le j\le m-1), \text{то } \Lambda_{j+1}=?, \text{но } \Lambda_{j+2}=q_{j+1}, \\ \text{где } det(q_{j+1})\neq 0. \end{cases} \tag{I.2}$$

$$
\begin{cases}
\text{Если } det(G_z)\neq 0 \text{ для всех } 0\le z\le m-1 \text{, то } G_{z-1}=q_z-r_{z+1}\cdot G_z^{-1}\cdot P_{z+1}\,, \\
G_{m-1}=q_m\,,\ det(q_m)\neq 0\,,\ z=m-1,\dots,1\,. \\
\text{Если } det(G_z)=0 \text{ для любого } z \text{ из } (2\le z\le m-2)\text{, то } G_{z-1}=\,?\ \text{, но } G_{z-2}=q_{z-1}\,, \\
\text{где } det(G_{z-2})\neq 0.
\end{cases}
\tag{I.3}
$$

На основе этих определений в работах /см. $I_{2)}$, $I_{3)}$/ при условиях

I. $$
\begin{cases}
\text{Если } \{[\Delta_1^{k-1}=0] \ \underline{\text{либо}}\ [\Delta_k^{m}=0]\} \text{ – равны нулю только по одному минору} \\
\text{каждого типа, то } \{[det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1) \text{, но} \\
\{det(\Lambda_z)\neq 0\}_{z=2}^{k-1},\ \{det(\Lambda_z)\neq 0\}_{z=k+2}^{m+1}] \ \underline{\text{либо}}\ [det(G_{k-1})=0 \text{ для любого } k \\
\text{из } (3\le k\le m-1)\text{, но } \{det(G_z)\neq 0\}_{z=k}^{m-1},\ \{det(G_z)\neq 0\}_{z=0}^{k-3}]\}
\end{cases}
$$

были получены следующие единственные матрично-факторизованные представления $\mathbb{C}(1.1)$:

<u>Представление I.I</u>(при условии $I_{I)}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\ E_2 \\
\ddots \\
(-\beta_{k-1})\ E_{k-1} \\
\mathbb{O}_k\ E_k \\
\mathbb{O}_{k+1}\ E_{k+1} \\
(-\beta_{k+2})\ E_{k+2} \\
\ddots \\
(-\beta_m)\ E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
\ddots \\
E_{k-1} \\
E_k\ B_{k+1}\dots B_m \\
E_{k+1} \\
E_{k+2} \\
\ddots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix}\Lambda_k & r_k \\ P_k & (q_k-\theta_k)\end{bmatrix} \\
q_{k+1} \\
\Lambda_{k+3} \\
\ddots \\
\Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
E_2 \\
\ddots \\
E_{k-1} \\
E_k \\
A_{k+1}\ E_{k+1} \\
A_{k+2}\ E_{k+2} \\
\ddots\qquad\ddots \\
A_m\qquad E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1\ (-c_2) \\
\ddots \\
E_{k-2}\ (-c_{k-1}) \\
E_{k-1}\ \mathbb{O}_k \\
E_k\ \mathbb{O}_{k+1} \\
E_{k+1}\ (-c_{k+2}) \\
\ddots \\
E_{m-1}\ (-c_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda)=\mathbb{C}
\tag{I.4}
$$
, где

$$
\begin{cases}
B_j=r_{j+1}\cdot\prod_{z=k+2}^{j} c_z\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}\,,\ j=k+1,k+2,\dots,m;\ A_i=\Lambda_{i+1}^{-1}\cdot\prod_{z=k+2}^{i}\beta_z\cdot P_{k+1}\,,\ i=k+1,k+2,\dots,m; \\
\theta_k=\sum_{z=k+1}^{m}(B_z\cdot\Lambda_{z+1}\cdot A_z),\ c_{z+1}=-(\Lambda_{z+1}^{-1}\cdot r_{z+1}),\ \beta_{z+1}=-(P_{z+1}\cdot\Lambda_{z+1}^{-1}),\ 1\le z\le k-1;\ k+2\le z\le m-1. \\
\text{При этом } (q_k-\theta_k)=G_{k-1} \text{ ,если } \{det(G_z)\neq 0\}_{z=k}^{m-1}.
\end{cases}
\tag{I.5}
$$

<u>Представление I.2</u>(при условии $I_{2)}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1\ (-\hat\beta_2) \\
\ddots \\
E_{k-3}\ (-\hat\beta_{k-2}) \\
E_{k-2}\ \mathbb{O}_{k-1} \\
E_{k-1}\ \mathbb{O}_k \\
E_k\ (-\hat\beta_{k+1}) \\
\ddots \\
E_{m-1}\ (-\hat\beta_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
\ddots \\
E_{k-3} \\
E_{k-2} \\
\hat A_1\dots\hat A_{k-2}\ E_{k-1} \\
E_{k+1} \\
\ddots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 \\
\ddots \\
G_{k-4} \\
q_{k-2} \\
\begin{bmatrix}(q_{k-1}-\hat\theta_{k-1}) & r_k \\ P_k & G_{k+1}\end{bmatrix} \\
G_k \\
\ddots \\
G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1\ \hat B_1 \\
\ddots\quad\ddots \\
E_{k-3}\ \hat B_{k-3} \\
E_{k-2}\ \hat B_{k-2} \\
E_{k-1} \\
E_k \\
E_{k+1} \\
\ddots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat c_2)\ E_2 \\
\ddots \\
(-\hat c_{k-2})\ E_{k-2} \\
\mathbb{O}_{k-1}\ E_{k-1} \\
\mathbb{O}_k\ E_k \\
(-\hat c_{k+1})\ E_{k+1} \\
\ddots \\
(-\hat c_m)\ E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(G)=\mathbb{C}
\tag{I.6}
$$
, где

$$\begin{cases} \hat{A}_j = P_{k-1}\cdot \prod\limits_{s=j+1}^{k-2} \hat{c}_s \cdot G_{j-1}^{-1}, \; j=1,2,\dots,k-2; \quad \hat{B}_i = G_{i-1}^{-1}\cdot\prod\limits_{s=i+1}^{k-2}\hat{\beta}_s\cdot z_{k-1}, \; i=1,2,\dots,k-2; \\ \hat{\Theta}_{k-1} = \sum\limits_{s=1}^{k-2}(\hat{A}_s\cdot G_{s-1}\cdot \hat{B}_s), \; \hat{c}_{s+1} = -(G_s^{-1}\cdot P_{s+1}), \; \hat{\beta}_{s+1} = -(z_{s+1}\cdot G_s^{-1}), \; 1\le s\le k-3; \; k+1\le s\le m-1. \\ \text{При этом } \; (q_{k-1} - \hat{\Theta}_{k-1}) = \Lambda_k \; \text{, если } \; \{det(\Lambda_s)\neq 0\}_{s=2}^{k-1}. \end{cases} \qquad (I.7)$$

В соответствии с матричными процессами $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3) были рассмотрены также следующие совместные (учитывающие информацию о нулевых ведущих блочно-угловых минорах $\mathbb{C}(i.i)$ обоих типов одновременно) условия:

$$\text{II.}\begin{cases} \text{Если } \{[\Delta_1^{k-1}=0] \text{ и } [\Delta_k^{m}=0]\} \text{ -равны нулю одновременно только по од-} \\ \text{ному минору обоих типов, то } \{[det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1), \\ \text{но } \{det(\Lambda_s)\neq 0\}_{s=2}^{k-1}, \; \{det(\Lambda_s)\neq 0\}_{s=k+2}^{m+1}] \text{ и } [det(G_{k-1})=0 \text{ для того} \\ \text{же } k \text{, но } \{det(G_s)\neq 0\}_{s=k}^{m-1}, \{det(G_s)\neq 0\}_{s=0}^{k-2}]\}. \end{cases}$$

В работе /I$_{3)}$/ при условии II было получено множество матрично-факторизованных представлений матриц $\mathbb{C}(i.i)$:

<u>Представления I.3</u>(при условии II)

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&&&&& \\ & E_2 &&&&&& \\ && \ddots &&&&& \\ &&& E_{k-2} &&&& \\ z_1 & z_2 & \dots & z_{k-2} & E_{k-1} &&& \\ &&&&& E_k & F_{k+1} \dots & F_m \\ &&&&&& E_{k+1} & \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1^{k-2} && \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & \\ && \mathbb{C}_{k+1}^{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&& \hat{F}_1 &&& \\ & E_2 &&& \hat{F}_2 &&& \\ && \ddots && \vdots &&& \\ &&& E_{k-2} & \hat{F}_{k-2} &&& \\ &&&& E_{k-1} &&& \\ &&&&& E_k && \\ &&&&& \hat{z}_{k+1} & E_{k+1} & \\ &&&&& \hat{z}_{k+2} && E_{k+2} \\ &&&&& \vdots && \ddots \\ &&&&& \hat{z}_m && E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G)=\mathbb{C} \qquad (I.8)$$

, где

$$\begin{cases} \{z_j = -\prod\limits_{s=j+1}^{k-1}\beta_s\}_{j=1}^{k-2}, \; \{\hat{z}_i = -\prod\limits_{s=k+1}^{i}\hat{c}_s\}_{i=k+1}^{m}, \; \{F_j = z_{k+1}\cdot\prod\limits_{s=k+2}^{j} c_s\cdot B_{jj}(\Lambda,G)\}_{j=k+1}^{m}, \; \{\hat{F}_i = B_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod\limits_{s=i+1}^{k-2}\hat{\beta}_s\cdot z_{k-1}\}_{i=1}^{k-2}, \\ \beta_{s+1} = -(P_{s+1}\cdot\Lambda_{s+1}^{-1}), \; c_{s+1} = -(\Lambda_{s+1}^{-1}\cdot z_{s+1}), \; 1\le s\le k-2; \; k+1\le s\le m; \; \hat{\beta}_{s+1} = -(z_{s+1}\cdot G_s^{-1}), \; \hat{c}_{s+1} = -(G_s^{-1}\cdot P_{s+1}), \\ 1\le s\le k-3; \; k\le s\le m \text{ ; а последовательности матриц } \{\Lambda\} \text{ и } \{G\} \text{ -определе-} \\ \text{ны в соответствии с (I.2)÷(I.3).} \end{cases} \qquad (I.9)$$

Здесь $[\mathbb{C}_1^{k-2}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^{m}]$ - ведущие усечённые (т.е. уменьшенной размерности) блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида (I.I), для которых имеют место /I$_{3)}$/ представления вида

$$\begin{bmatrix} E_1 &&&& \\ (-\beta_2)E_2 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && (-\beta_{k-3})E_{k-3} && \\ &&& (-\beta_{k-2})E_{k-2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}-z_2\cdot\hat{c}_2](z_2) &&& \\ & \ddots && \\ && [B_{k-3k-3}^{-1}-z_{k-2}\cdot\hat{c}_{k-2}](z_{k-2}) & \\ &&& [B_{k-1k-1}^{-1}] \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2}(\Lambda,G) = \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}](z_2) &&& \\ & [B_{22}^{-1}-\beta_2\cdot z_2](z_3) && \\ && \ddots & \\ && [B_{k-3k-3}^{-1}-\beta_{k-3}\cdot z_{k-3}](z_{k-2}) & \\ &&& [B_{k-2k-2}^{-1}-\beta_{k-2}\cdot z_{k-2}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 &&&& \\ (-\hat{c}_2)E_2 &&&& \\ & \ddots &&& \\ && (-\hat{c}_{k-3})E_{k-3} && \\ &&& (-\hat{c}_{k-2})E_{k-2} & \end{bmatrix}, \qquad (I.10)$$

$$
\begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ (-\beta_{k+1})E_{k+2} & \ddots & & \\ & -- & & \\ & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} [B^{-1}_{k+1k+1}-z_{k+2}\cdot\hat{c}_{k+2}] & (z_{k+2}) & & \\ & --- & --- & \\ & & [B^{-1}_{m-1m-1}-z_m\cdot\hat{c}_m] & (z_m) \\ & & & [B^{-1}_{mm}] \end{bmatrix}
= \mathbb{C}^{m}_{k+1}(\Lambda,G) =
\begin{bmatrix} [B^{-1}_{k+1k+1}] & (z_{k+2}) & & \\ & [B^{-1}_{k+2k+2}-\beta_{k+2}\cdot z_{k+2}] & (z_{k+3}) & \\ & --- & --- & \\ & & [B^{-1}_{m-1m-1}-\beta_{m-1}\cdot z_{m-1}] & (z_m) \\ & & & [B^{-1}_{mm}-\beta_m\cdot z_m] \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ (-\hat{c})E_{k+2} & & \\ & -- & \\ & (-\hat{c}_m) & E_m \end{bmatrix}. \qquad (I.11)
$$

А также

<u>Представления I.4</u>(при условии П)

$$
\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & \\ \hat{\xi}_1 & \cdots & \hat{\xi}_{k-2} & E_{k-1} & & & \\ & & & & E_k\ \hat{\tau}_{k+1} \cdots \hat{\tau}_m & & \\ & & & & & E_{k+1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbb{C}^{k-2}_1 & & \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & \\ & & \mathbb{C}^{m}_{k+1} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \tau_1 & & & & \\ & E_2 & & \tau_2 & & & & \\ & & \ddots & -- & & & & \\ & & E_{k-2} & \tau_{k-2} & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & & \\ & & & & E_k & & & \\ & & & & \xi_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & \xi_{k+2} & & E_{k+2} & \\ & & & & \xi_m & & & E_m \end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda,G) = \mathbb{C} \qquad (I.12)
$$

, где

$$
\left\{ \hat{\tau}_j = -\prod_{z=k+1}^{j} \hat{\beta}_z \right\}_{j=k+1}^{m},\ \left\{ \tau_i = -\prod_{z=i+1}^{k-1} c_z \right\}_{i=1}^{k-2},\ \left\{ \hat{\xi}_j = P_{k-1}\cdot\prod_{z=j+1}^{k-2} \hat{c}_z \cdot B_{jj}(\Lambda,G) \right\}_{j=1}^{k-2},\ \left\{ \xi_i = B_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod_{z=k+2}^{i} \beta_z \cdot P_{k+1} \right\}_{i=k+2}^{m} \qquad (I.13)
$$

а соответствующие структурные матрицы $[\beta,\hat{\beta};c,\hat{c}]$ и последовательности матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ –определены в (I.9).

Здесь также $[\mathbb{C}^{k-2}_1$ и $\mathbb{C}^{m}_{k+1}]$ –ведущие усечённые блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида (I.I), для которых имеют место/I3)/ представления вида

$$
\begin{bmatrix} [B^{-1}_{11}-\hat{\beta}_2\cdot P_2] & & & \\ (P_2) & [B^{-1}_{22}-\hat{\beta}_3\cdot P_3] & & \\ & --- & --- & \\ & (P_{k-3}) & [B^{-1}_{k-3k-3}-\hat{\beta}_{k-2}\cdot P_{k-2}] & \\ & & (P_{k-2}) & [B^{-1}_{k-2k-2}] \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & \\ & E_2 & (-c_3) & \\ & & -- & \\ & & E_{k-3} & (-c_{k-2}) \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix}
= \mathbb{C}^{k-2}_1(\Lambda,G) =
\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\beta}_2) & & \\ & E_2 & (-\hat{\beta}_3) & \\ & & -- & \\ & & E_{k-3} & (-\hat{\beta}_{k-2}) \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} [B^{-1}_{11}] & & & \\ (P_2) & [B^{-1}_{22}-P_2\cdot c_2] & & \\ & --- & --- & \\ & (P_{k-3}) & [B^{-1}_{k-3k-3}-P_{k-3}\cdot c_{k-3}] & \\ & & (P_{k-2}) & [B^{-1}_{k-2k-2}-P_{k-2}\cdot c_{k-2}] \end{bmatrix}, \qquad (I.14)
$$

$$
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{k+1,k+1}-\hat{\beta}_{k+1,k+2}\cdot\rho_{k+2}] & & & \\
 & (\rho_{k+2})[B^{-1}_{k+2,k+2}-\hat{\beta}_{k+2,k+3}\cdot\rho_{k+3}] & & \\
 & & \ddots & \\
 & & (\rho_{m-1})[B^{-1}_{m-1,m-1}-\hat{\beta}_{m-1,m}\cdot\rho_m] & \\
 & & & (\rho_m)[B^{-1}_{mm}]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E(-c_{k+1,k+2}) & & & \\
 & E(-c_{k+2,k+3}) & & \\
 & & \ddots & \\
 & & E(-c_{m-1,m}) & \\
 & & & E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}^m_{k+1}(\Lambda,G)=
\begin{bmatrix}
E(-\hat{\beta}_{k+1,k+2}) & & & \\
 & E(-\hat{\beta}_{k+2,k+3}) & & \\
 & & \ddots & \\
 & & E(-\hat{\beta}_{m-1,m}) & \\
 & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{k+1,k+1}] & & & \\
 & (\rho_{k+2})[B^{-1}_{k+2,k+2}-\rho_{k+2}\cdot c_{k+2}] & & \\
 & & \ddots & \\
 & & (\rho_{m-1})[B^{-1}_{m-1,m-1}-\rho_{m-1}\cdot c_{m-1}] & \\
 & & & (\rho_m)[B^{-1}_{mm}-\rho_m\cdot c_m]
\end{bmatrix}. \qquad (I.15)
$$

Кроме того, в работе /I_4/ факторизации I.1 (при условии I_1) и факторизации I.2 (при условии I_2) были представлены в виде:

Представление I.5 (при условии I_1)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & & \\
 & E_2 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & E_{k-2} & & & & & \\
Z_1 & \dots & Z_{k-2} & & E_{k-1} & & & & \\
 & & & & & E_k & F_{k+1} & \dots & F_m \\
 & & & & & & E_{k+1} & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbb{C}^{k-2}_1 & & \\
 & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ \rho_k & (q_k-\theta_k) \end{bmatrix} & \\
 & & \mathbb{C}^m_{k+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & \tau_1 & & & & \\
 & E_2 & & & \tau_2 & & & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & E_{k-2} & \tau_{k-2} & & & & \\
 & & & & E_{k-1} & & & & \\
 & & & & & E_k & & & \\
 & & & & & \xi_{k+1} & E_{k+1} & & \\
 & & & & & \xi_{k+2} & & E_{k+2} & \\
 & & & & & \vdots & & & \ddots \\
 & & & & & \xi_m & & & E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda)=\mathbb{C} \qquad (I.16)
$$

, где

$$
\begin{cases}
\left\{Z_j=\rho_{k-1}\cdot B_{k-2,k-2}(\Lambda)\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{k-2}\beta_s\right\}_{j=1}^{k-2},\ \left\{F_j=z_{k+1}\cdot\prod\limits_{s=k+2}^{j}c_s\cdot B_{jj}(\Lambda)\right\}_{j=k+1}^{m},\ \left\{\tau_i=\prod\limits_{s=i+1}^{k-2}c_s\cdot B_{k-2,k-2}(\Lambda)\cdot z_{k-1}\right\}_{i=1}^{k-2},\ \left\{\xi_i=B_{ii}(\Lambda)\cdot\prod\limits_{s=k+2}^{i}\beta_s\cdot\rho_{k+1}\right\}_{i=k+1}^{m}, \\
\theta_k=z_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1}(\Lambda)\cdot\rho_{k+1} \quad \text{. При этом } (q_k-\theta_k)=G_{k-1} \text{ , если } \{\det(G_s)\neq 0\}_{s=k} \text{ , а} \\
\text{соответствующие структурные матрицы } [\beta,c] \text{ определены в (I.5).}
\end{cases} \qquad (I.17)
$$

Представление I.6 (при условии I_2)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & & \\
 & E_2 & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & \\
 & & & E_{k-2} & & & & & \\
\hat{\xi}_1 & \dots & \hat{\xi}_{k-2} & & E_{k-1} & & & & \\
 & & & & & E_k & \hat{\tau}_{k+1} & \dots & \hat{\tau}_m \\
 & & & & & & E_{k+1} & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbb{C}^{k-2}_1 & & \\
 & \begin{bmatrix} (q_{k-1}-\hat{\theta}_{k-1}) & z_k \\ \rho_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & \\
 & & \mathbb{C}^m_{k+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & \hat{F}_1 & & & & \\
 & E_2 & & & \hat{F}_2 & & & & \\
 & & \ddots & & \vdots & & & & \\
 & & & E_{k-2} & \hat{F}_{k-1} & & & & \\
 & & & & E_{k-1} & & & & \\
 & & & & & E_k & & & \\
 & & & & & \hat{Z}_{k+1} & E_{k+1} & & \\
 & & & & & \hat{Z}_{k+2} & & E_{k+2} & \\
 & & & & & \vdots & & & \ddots \\
 & & & & & \hat{Z}_m & & & E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(G)=\mathbb{C} \qquad (I.18)
$$

, где

$$\begin{cases} \left\{ \hat{\xi}_j = p_{k-1} \cdot \prod_{j=j+1}^{k-2} \hat{c}_j \cdot B_{jj}(G) \right\}_{j=1}^{k-2}, \left\{ \hat{\zeta}_j = z_{k+1} \cdot B_{k+1\,k+1}(G) \cdot \prod_{j=k+2}^{j} \hat{\beta}_j \right\}_{j=k+1}^{m}, \left\{ \hat{f}_i = B_{ii}(G) \cdot \prod_{j=i+1}^{k-2} \hat{\beta}_j \cdot z_{k-1} \right\}_{i=1}^{k-2}, \left\{ \hat{z}_i = \prod_{j=k+2}^{i} \hat{c}_j \cdot B_{k+1\,k+1}(G) \cdot p_{k+1} \right\}_{i=k+1}^{m}, \qquad (I.19) \\ \hat{\theta}_{k-1} = p_{k-1} \cdot B_{k-2\,k-2}(G) \cdot z_{k-1} \end{cases}$$

. При этом $(q_{k-1} - \hat{\theta}_{k-1}) = \Lambda_k$, если $\{det(\Lambda_j) \neq 0\}_{j=2}^{k-1}$, а соответствующие структурные матрицы $[\hat{\beta}, \hat{c}]$ определены в (I.6).

Здесь также $\mathbb{C}_1^{k-2}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^{m}$ есть ведущие усечённые блочно-трёхдиагональные матрицы общего вида (I.I), для которых имеют место известные представления

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & \\ & -- & & \\ & & (-\beta_{k-2})E_{k-2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & \\ & \Lambda_3 & & \\ & & -- & \\ & & & \Lambda_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & \\ & E_2(-c_3) & & \\ & & -- & \\ & & & E_{k-3}(-c_{k-2}) \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2}(\Lambda),$$

$$\begin{bmatrix} E_1(-\hat{\beta}_2) & & & \\ & E_2(-\hat{\beta}_3) & & \\ & & -- & \\ & & & E_{k-3}(-\hat{\beta}_{k-2}) \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & & \\ & G_1 & & \\ & & -- & \\ & & & G_{k-4} \\ & & & G_{k-3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\hat{c}_2)E_2 & & & \\ & -- & & \\ & (-\hat{c}_{k-3})E_{k-3} & & \\ & & (-\hat{c}_{k-2})E_{k-2} & \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2}(G), \qquad (I.20)$$

$$\begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ (-\beta_{k+2})E_{k+2} & & & \\ & -- & & \\ & & (-\beta_m)E_m & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k+2} & & & \\ & \Lambda_{k+3} & & \\ & & -- & \\ & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1}(-c_{k+2}) & & & \\ & E_{k+2}(-c_{k+3}) & & \\ & & -- & \\ & & & E_{m-1}(-c_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}_{k+1}^{m}(\Lambda),$$

$$\begin{bmatrix} E_{k+1}(-\hat{\beta}_{k+2}) & & & \\ & E_{k+2}(-\hat{\beta}_{k+3}) & & \\ & & -- & \\ & & & E_{m-1}(-\hat{\beta}_m) \\ & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_k & & & \\ & G_{k+1} & & \\ & & -- & \\ & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ (-\hat{c}_{k+2})E_{k+2} & & & \\ & -- & & \\ & & (-\hat{c}_m)E_m & \end{bmatrix} = \mathbb{C}_{k+1}^{m}(G). \qquad (I.2I)$$

Здесь в (I.8)÷(I.I9) диагональные B_{jj} -элементы-блоки $B = \mathbb{C}^{-1}$ определены /I4),I8)/ в соответствующих представлениях в виде:

$$B_{jj} = \begin{cases} B_{jj}(\Lambda, G) = (\Lambda_{j+1} + G_{j-1} - q_j)^{-1},\ 1 \le j \le k-2;\ B_{jj}(\Lambda, G) = (\Lambda_{j+1} + G_{j-1} - q_j)^{-1},\ k+1 \le j \le m; \\ \begin{cases} B_{jj}(\Lambda) = \sum_{\mu=j}^{k-2} \prod_{i=j+1}^{\mu} c_i \cdot \Lambda_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod_{i=j+1}^{\mu} \beta_i \longleftrightarrow \Lambda_{j+1}^{-1} + c_{j+1} \cdot B_{j+1\,j+1}(\Lambda) \cdot \beta_{j+1},\ B_{k-2\,k-2}(\Lambda) = \Lambda_{k-1}^{-1},\ j = k-3, \ldots, 1; \qquad (I.22) \\ B_{jj}(\Lambda) = \sum_{\mu=j}^{m} \prod_{i=j+1}^{\mu} c_i \cdot \Lambda_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod_{i=j+1}^{\mu} \beta_i \longleftrightarrow \Lambda_{j+1}^{-1} + c_{j+1} \cdot B_{j+1\,j+1}(\Lambda) \cdot \beta_{j+1},\ B_{mm}(\Lambda) = \Lambda_{m+1}^{-1},\ j = m-1, \ldots, k+1; \end{cases} \\ \begin{cases} B_{jj}(G) = \sum_{\mu=k+1}^{j} \prod_{i=\mu+1}^{j} \hat{c}_i \cdot G_{\mu-1}^{-1} \cdot \prod_{i=\mu+1}^{j} \hat{\beta}_i \longleftrightarrow G_{j-1}^{-1} + \hat{c}_j \cdot B_{j-1\,j-1}(G) \cdot \hat{\beta}_j,\ B_{k+1\,k+1}(G) = G_k^{-1},\ j = k+2, k+3, \ldots, m; \\ B_{jj}(G) = \sum_{\mu=1}^{j} \prod_{i=\mu+1}^{j} \hat{c}_i \cdot G_{\mu-1}^{-1} \cdot \prod_{i=\mu+1}^{j} \hat{\beta}_i \longleftrightarrow G_{j-1}^{-1} + \hat{c}_j \cdot B_{j-1\,j-1}(G) \cdot \hat{\beta}_j,\ B_{11}(G) = G_0^{-1},\ j = 2, 3, \ldots, k-2. \end{cases} \end{cases}$$

Отметим также, что каждые из четырёх различных нетрадиционных представлений (I.I0)÷(I.II) и (I.I4)÷(I.I5) усечённых подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^{m}$ сводятся к двум различным известным представлениям (I.20) и (I.2I) только при использовании (I.22)$_{I)}$, т.е. аддитивной скобки

$$B_{jj}(\Lambda, G) = (\Lambda_{j+1} + G_{j-1} - q_j)^{-1}.$$

2. <u>Структурно-инвариантные [x] представления мультипликативного типа блочно-трёхдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$(1.1) при наличии нулевых ведущих блочно-угловых миноров</u>

Выше, во введении настоящей работы, мы привели явный вид множества различных матрично-факторизованных представлений блочно-трёхдиагональных матриц вида $\mathbb{C}$(1.1) при наличии у них <u>лишь</u> по одному разного типа (или обоих типов) нулевых блочно-угловых миноров. Это параметрические по сути представления, параметрами в которых служат матрицы из матричных последовательностей $\{\Lambda\}$(I.2) и $\{G\}$ (I.3). Если же число ведущих нулевых блочно-угловых миноров у $\mathbb{C}$(1.1) оказывается два и более, то решение проблемы представлений $\mathbb{C}$(1.1) и их систематизации при указанной выше параметризации становится практически затруднительным. Поэтому становится очевидной необходимость введения более общей (структурно-инвариантной) параметризации факторизованных представлений $\mathbb{C}$(1.1), которая позволила бы более просто справиться с решением указанной проблемы. Полученные в этом параграфе результаты и дают по сути ответы на поставленные выше вопросы.

Итак, имеет место следующая

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{p_j, z_j\}_{j=2}^{m}$ и соответствующими квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$, в общем случае разных размерностей. Пусть также для $\{\Delta_1^j\}$, $\{\Delta_j^m\}$ –ведущих блочно-угловых миноров $\mathbb{C}$(1.1) выполняется одно из условий $I_{I)}$, $I_{2)}$, II. Тогда для $\mathbb{C}$(1.1) имеет место следующее единственное структурно-инвариантное матрично-факторизованное представление

---

x) <u>Замечание 2.I</u>. Здесь и далее под структурной инвариантностью представлений мы понимаем, во-первых, формальное совпадение структуры матричных сомножителей представления 2.I и представлений I.3÷I.6. Во-вторых, представление 2.I может служить генератором всевозможных (в том числе и I.3÷I.6) представлений $\mathbb{C}$(1.1) при условиях $I_{I)}$; $I_{2)}$; II, поскольку в отличие от представлений I.3÷I.6 оно построено (как на параметрах) на элементах последней строки и последнего столбца матрицы $\mathbb{B}_1^{k-1} = [\mathbb{C}_1^{k-1}]^{-1}$ и первой строки и первого столбца матрицы $\mathbb{B}_{k+1}^{m} = [\mathbb{C}_{k+1}^{m}]^{-1}$ без указания способов их вычисления (представления).

Представление 2.I

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} & & & \\
(P_{k-1}\cdot B_{k-2,1}) \ \ldots \ (P_{k-1}\cdot B_{k-2,k-2}) & E_{k-1} & & \\
 & & E_k \ (r_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1}) \ \ldots \ (r_{k+1}\cdot B_{k+1,m}) & \\
 & & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ & \ldots & \\ & & E_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & - \\ & & p_{k-2} & q_{k-2} \end{bmatrix} = C_1^{k-2} & & \\
 & \begin{bmatrix} (q_{k-1} - p_{k-1}\cdot B_{k-2,k-2}\cdot r_{k-1}) & (r_k) \\ (p_k) & (q_k - r_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1}) \end{bmatrix} = \omega_k & \\
 & & C_{k+1}^{m} = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\Omega_k} \times \tag{2.I}
$$

$$
\times
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix}
\begin{matrix} (B_{1,k-2}\cdot r_{k-1}) \\ (B_{2,k-2}\cdot r_{k-1}) \\ - \ - \\ (B_{k-2,k-2}\cdot r_{k-1}) \end{matrix} & & & \\
 & E_{k-1} & & \\
 & & E_k & \\
 & & \begin{matrix} (B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1}) \\ (B_{k+2,k+1}\cdot p_{k+1}) \\ - \ - \\ (B_{m,k+1}\cdot p_{k+1}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ & E_{k+2} & \\ & & \ldots \\ & & & E_m \end{bmatrix}
\end{bmatrix} = C .
$$

При этом для C_1^{k-2} и C_{k+1}^{m} -ведущих усечённых блочно-трёхдиагональных подматриц имеют место (при соответствующих условиях) одно из представлений $C_1^{k-2}(\Lambda), C_{k+1}^{m}(\Lambda)$; $C_1^{k-2}(G), C_{k+1}^{m}(G)$; $C_1^{k-2}(\Lambda,G)$, $C_{k+1}^{m}(\Lambda,G)$ вида (I.20)÷÷(I.2I),(I.I0)÷(I.II),(I.I4)÷(I.I5). А для $\{B_{k-2,j}\}_{j=1}^{k-2}$-(k-2) -строки, $\{B_{i,k-2}\}_{i=1}^{k-2}$-(k-2) -столбца обратной матрицы $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$ и $\{B_{i,k+1}\}_{i=k+1}^{m}$-(k+1) --столбца, $\{B_{k+1,j}\}_{j=k+1}^{m}$-(k+1) -строки обратной матрицы $B_{k+1}^{m} = [C_{k+1}^{m}]^{-1}$ имеют место следующие представления:

При условии $I_{I)}$

$$
\begin{cases}
B_{k-2,j}(\Lambda) = B_{k-2,k-2}(\Lambda)\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{k-2}\beta_s , \quad B_{i,k-2}(\Lambda) = \prod\limits_{s=i+1}^{k-2} c_s\cdot B_{k-2,k-2}(\Lambda) , \quad B_{i,k+1}(\Lambda) = B_{ii}(\Lambda)\cdot\prod\limits_{s=k+2}^{i}\beta_s , \quad B_{k+1,j}(\Lambda) = \prod\limits_{s=k+2}^{j} c_s\cdot B_{jj}(\Lambda) , \\
\text{здесь} \quad (q_{k-1} - p_{k-1}\cdot B_{k-2,k-2}(\Lambda)\cdot r_{k-1}) = \Lambda_k , \quad (q_k - r_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1}(\Lambda)\cdot p_{k+1}) = (q_k - \theta_k) .
\end{cases} \tag{2.2}
$$

x) Замечание 2.2. $\{B_{k-2,j}\}_{j=1}^{k-2}$, $\{B_{i,k-2}\}_{i=1}^{k-2}$, $\{B_{i,k+1}\}_{i=k+1}^{m}$, $\{B_{k+1,j}\}_{j=k+1}^{m}$ могут быть получены и любым другим, из известных в алгебре, способом.

<u>При условии $I_{2)}$</u>

$$\begin{cases} B_{k-2\,j}(G)=\prod_{s=j+1}^{k-2}\hat{c}_s\cdot B_{jj}(G),\ B_{i\,k-2}(G)=B_{ii}(G)\cdot\prod_{s=i+1}^{k-2}\hat{\beta}_s,\ B_{i\,k+1}(G)=\prod_{s=k+2}^{i}\hat{c}_s\cdot B_{k+1\,k+1}(G),\ B_{k+1\,j}(G)=B_{k+1\,k+1}(G)\cdot\prod_{s=k+2}^{j}\hat{\beta}_s, \\ \text{здесь}\quad (q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1}(G)\cdot p_{k+1})=G_{k-1},\ (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}(G)\cdot z_{k-1})=(q_{k-1}-\hat{\theta}_{k-1}). \end{cases} \quad (2.3)$$

<u>При условии II</u>

$$\begin{cases} B_{k-2\,k-2}(\Lambda,G)\cdot\prod_{s=j+1}^{k-2}\beta_s=B_{k-2\,j}(\Lambda,G)=\prod_{s=j+1}^{k-2}\hat{c}_s\cdot B_{jj}(\Lambda,G),\ \prod_{s=i+1}^{k-2}c_s\cdot B_{k-2\,k-2}(\Lambda,G)=B_{i\,k-2}(\Lambda,G)=B_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod_{s=i+1}^{k-2}\hat{\beta}_s, \\ B_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod_{s=k+2}^{i}\beta_s=B_{i\,k+1}(\Lambda,G)=\prod_{s=k+2}^{i}\hat{c}_s\cdot B_{k+1\,k+1}(\Lambda,G),\ \prod_{s=k+2}^{j}c_s\cdot B_{jj}(\Lambda,G)=B_{k+1\,j}(\Lambda,G)=B_{k+1\,k+1}(\Lambda,G)\cdot\prod_{s=k+2}^{j}\hat{\beta}_s, \\ \text{здесь}\ (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}(\Lambda,G)\cdot z_{k-1})=\Lambda_k,\ (q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1}(\Lambda,G)\cdot p_{k+1})=G_{k-1}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Здесь в (2.I)÷(2.4) (при соответствующих условиях) матрицы $[\beta,\hat{\beta};c,\hat{c}]$ и B_{ss} определены в (I.7),(I.8) и (I.22).

<u>Доказательство</u>. Справедливость представления 2.I проверяется путём перемножения его факторизирующих матриц. При этом следует воспользоваться основными равенствами $B_1^{k-2}\cdot C_1^{k-2}=E_1^{k-2}=C_1^{k-2}\cdot B_1^{k-2}$ и $B_{k+1}^{m}\cdot C_{k+1}^{m}=E_{k+1}^{m}=C_{k+1}^{m}\cdot B_{k+1}^{m}$ для усечённых подматриц C_1^{k-2}, C_{k+1}^{m} и им обратных $B_1^{k-2}=[C_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^{m}=[C_{k+1}^{m}]^{-1}$. Отметим также, что при переходе от представления 2.I к соответствующим представлениям I.3÷I.6 следует учесть определения матричных последовательностей $\{\Lambda\}$ (I.2), $\{G\}$ (I.3) и матриц B_{ss} (I.22). Справедливость же представлений (2.2)÷(2.4) является /см. $I_{4)}$/ прямым следствием коммутационных свойств B_{ij} -элементов-блоков обратных усечённых подматриц $B_1^{k-1}=[C_1^{k-2}]^{-1}$ и $B_{k+1}^{m}=[C_{k+1}^{m}]^{-1}$ соответственно. Теорема доказана.

Далее рассматриваются представления типа 2.I для $C(1.1)$ при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

III. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_k^{m}=0$ и $\Delta_l^{m}=0]\}$ –равны нулю только по два отдалённых минора каждого типа, то

$$\begin{cases} [\det(\Lambda_k)=0 \text{ и } \det(\Lambda_l)=0 \text{, для любого } k \text{ фиксированного и любого } l \text{ из} \\ (k+3\le l\le m-1)\text{, но } \{\det(\Lambda_s)\ne 0\}_{s=1}^{k-1},\ \{\det(\Lambda_s)\ne 0\}_{s=k+1}^{l-1} \text{ и } \{\det(\Lambda_s)\ne 0\}_{s=l+1}^{m+1}] \\ \underline{\text{либо}}\ [\det(G_{k-1})=0 \text{ и } \det(G_{l-1})=0 \text{, для любого } l \text{ фиксированного и} \\ k \text{ из } (3\le k<l-3)\text{, но } \{\det(G_s)\ne 0\}_{s=l}^{m-1},\ \{\det(G_s)\ne 0\}_{s=k}^{l-3} \text{ и } \{\det(G_s)\ne 0\}_{s=0}^{k-3}]. \end{cases}$$

IV. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{k+2}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_k^{m}=0$ и $\Delta_{k+3}^{m}=0]\}$ –равны нулю только по два соседних минора каждого типа, то

$$\begin{cases} [\det(\Lambda_k)=0 \text{ и } \det(\Lambda_{k+3})=0 \text{, для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-4)\text{, но } \{\det(\Lambda_s)\ne 0\}_{s=2}^{k-1}, \\ \det(\Lambda_{k+2}=q_{k+1})\ne 0,\ \{\det(\Lambda_s)\ne 0\}_{s=k+5}^{m+1}]\ \underline{\text{либо}}\ [\det(G_{k-1})=0 \text{ и } \det(G_{k+2})=0, \\ \text{для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-4)\text{, но } \{\det(G_s)=0\}_{s=k+3}^{m-1},\ \det(G_k=q_{k+1})\ne 0,\ \{\det(G_s)\ne 0\}_{s=0}^{k-3}]. \end{cases}$$

У. Если $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 = \Delta_1^{\ell-1}]$ и $[\Delta_k^m = 0 = \Delta_\ell^m]\}$ -равны нулю одновременно только по два отдалённых минора обоих типов, то

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0=det(\Lambda_\ell) \text{ ,для любого } k \text{ фиксированного и любого } \ell \text{ из} \\ (k+3<\ell\leq m-1), \text{но } \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1},\ \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k+2}^{\ell-1} \text{ и } \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=\ell+2}^{m+1}] \text{ и} \\ [det(G_{k-1})=0=det(G_{\ell-1}) \text{ для тех же } k \text{ и } \ell \text{ ,но } \{det(G_j)\neq 0\}_{j=\ell}^{m-1}, \\ \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k}^{\ell-3} \text{ и } \{det(G_j)\neq 0\}_{j=0}^{k-3}]. \end{cases}$$

УI. Если $\{[\Delta_1^{k-1} = 0 = \Delta_1^{k+2}]$ и $[\Delta_k^m = 0 = \Delta_{k+3}^m]\}$ -равны нулю только по два соседних минора обоих типов, то

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0=det(\Lambda_{k+3}) \text{ ,для любого } k \text{ из } (3\leq k\leq k-4) \text{ ,но } \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1}, \\ det(\Lambda_{k+2}=q_{k+1})\neq 0,\ \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k+5}^{m+1}] \text{ и } [det(G_{k-1})=0=det(G_{k+2}), \\ \text{для того же } k \text{ ,но } \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k+3}^{m-1},\ det(G_k=q_{k+1})\neq 0, \\ \{det(G_j)\neq 0\}_{j=0}^{k-3}]. \end{cases}$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2. Пусть $\mathbb{C}$ -невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{p_j, z_j\}_{j=2}^m$ и соответствующими квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^m$, в общем случае разных размерностей. Пусть также для $\{\Delta_1^j\}$, $\{\Delta_j^m\}$ -ведущих блочно-угловых миноров $\mathbb{C}(1.1)$ выполняется одно из условий $Ш_{I)}$, $Ш_{2)}$; $IУ_{I)}$, $IУ_{2)}$; У, УI. Тогда для $\mathbb{C}(1.1)$ имеет место следующее единственное структурно-инвариантное матрично-факторизованное представление[x)]

Представление 2.2

$$\left[\begin{array}{cccccc} \begin{bmatrix} E_1 & & \\ & E_2 & \\ & & \ddots \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} & & & & & \\ (p\cdot B)_{k-1,k-2,1}\dots(p\cdot B)_{k-1,k-2,k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (z\cdot B)_{k+1,k+1,k+1}\dots(z\cdot B)_{k+1,k+1,\ell-2} & & & \\ & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_{\ell-2} \end{bmatrix} & & & \\ & & (p\cdot B)_{\ell-1,\ell-2,k+1}\dots(p\cdot B)_{\ell-1,\ell-2,\ell-2} & \begin{bmatrix} E_{\ell-1} & \\ & E_\ell \end{bmatrix} & (z\cdot B)_{\ell+1,\ell+1,\ell+1}\dots(z\cdot B)_{\ell+1,\ell+1,m} & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{\ell+1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_m \end{bmatrix} & \end{array}\right] \underbrace{\left[\begin{array}{ccccc} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1^{k-2} \end{bmatrix} & & & & \\ & \begin{bmatrix} (q-p\cdot B\cdot z)_{k-1,k-1,k-2,k-2,k-1} & (z)_k \\ (p)_k & (q-z\cdot B\cdot p)_{k,k+1,k+1,k+1,k+1} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (-z\cdot B\cdot z)_{k+1,k+1,\ell-2,\ell-1} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \\ & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{k+1}^{\ell-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \\ & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & (-p\cdot B\cdot p)_{\ell-1,\ell-2,k+1} \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} (q-p\cdot B\cdot z)_{\ell-1,\ell-1,\ell-2,\ell-2,\ell-1} & (z)_\ell \\ (p)_\ell & (q-z\cdot B\cdot p)_{\ell,\ell+1,\ell+1,\ell+1,\ell+1} \end{bmatrix} & \\ & & & & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{\ell+1}^m \end{bmatrix} \end{array}\right]}_{\mathbb{F}_{k,\ell}} = \omega_{k,\ell} \times$$

x) См. стр. II

$$
\times\left[\begin{array}{ccccc}
\begin{bmatrix}E_1&&&\\&E_2&&\\&&\ddots&\\&&&E_{k-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(B_{1k-2}\cdot r_{k-1})\\(B_{2k-2}\cdot r_{k-1})\\ \vdots \\(B_{k-2k-2}\cdot r_{k-1})\end{matrix} & & & \\
 & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & & & \\
 & \begin{matrix}(B_{k+1k+1}\cdot p_{k+1})\\(B_{k+2k+1}\cdot p_{k+1})\\ \vdots \\(B_{l-2k+1}\cdot p_{k+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}E_{k+1}&&&\\&E_{k+2}&&\\&&\ddots&\\&&&E_{l-2}\end{bmatrix} & \begin{matrix}(B_{k+1l-2}\cdot r_{l-1})\\(B_{k+2l-2}\cdot r_{l-1})\\ \vdots \\(B_{l-2l-2}\cdot r_{l-1})\end{matrix} & \\
 & & & \begin{bmatrix}E_{l-1}&\\&E_l\end{bmatrix} & \\
 & & & \begin{matrix}(B_{l+1l+1}\cdot p_{l+1})\\ \vdots \\(B_{ml+1}\cdot p_{l+1})\end{matrix} & \begin{bmatrix}E_{l+1}&&\\&\ddots&\\&&E_m\end{bmatrix}
\end{array}\right]=\mathbb{C} \qquad (2.5)
$$

При этом для $\mathbb{C}_1^{k-2}$, $\mathbb{C}_{k+1}^{l-2}$, и $\mathbb{C}_{l+1}^{m}$ –ведущих усечённых блочно-трёхдиагональных подматриц общего вида (I.I) при соответствующих условиях имеет место одно из представлений вида (I.20)÷(I.2I),(I.I0)÷(I.II) и (I.I4)÷(I.I5). А для $\{B_{k-2j}\}_{j=1}^{k-2}$ –$(k-2)$–строки, $\{B_{ik-2}\}_{i=1}^{k-2}$ – $(k-2)$ – –столбца обратной матрицы $B_1^{k-2}=[\mathbb{C}_1^{k-2}]^{-1}$; $\{B_{l-2j}\}_{j=k+1}^{l-2}$ –$(l-2)$ –строки, $\{B_{il-2}\}_{i=k+1}^{l-2}$ – $(l-2)$ –столбца, и $\{B_{k+1j}\}_{j=k+1}^{l-2}$ –$(k+1)$–строки, $\{B_{ik+1}\}_{i=k+1}^{l-2}$ –$(k+1)$ –столбца обратной матрицы $B_{k+1}^{l-2}=[\mathbb{C}_{k+1}^{l-2}]^{-1}$; $\{B_{l+1j}\}_{j=l+1}^{m}$ –$(l+1)$ –строки, $\{B_{il+1}\}_{i=l+1}^{m}$ –$(l+1)$– –столбца обратной матрицы $B_{l+1}^{m}=[\mathbb{C}_{l+1}^{m}]^{-1}$ имеют место представления [x]:

<u>При условии</u> Ш$_{1)}$

$$
\begin{cases}
B_{l-2j}(\Lambda)=B_{l-2l-2}(\Lambda)\cdot\prod\limits_{z=j+1}^{l-2}\beta_z,\ B_{il-2}(\Lambda)=\prod\limits_{z=i+1}^{l-2}c_z\cdot B_{l-2l-2}(\Lambda),\ B_{l+1j}(\Lambda)=\prod\limits_{z=l+2}^{j}c_z\cdot B_{jj}(\Lambda),\ B_{il+1}(\Lambda)=B_{ii}(\Lambda)\cdot\prod\limits_{z=l+2}^{i}\beta_z, \\
\{B_{k-2j}(\Lambda)\}_{j=1}^{k-2},\ \{B_{ik-2}(\Lambda)\}_{i=1}^{k-2},\{B_{k+1j}(\Lambda)\}_{j=k+1}^{l-2},\{B_{ik+1}(\Lambda)\}_{i=k+1}^{l-2} \text{– представлены в виде (2.2);} \\
(q_{l-1}-p_{l-1}\cdot B_{l-1l-1}(\Lambda)\cdot r_{l-1})=\Lambda_l\ ,\ (q_l-r_{l+1}\cdot B_{l+1l+1}(\Lambda)\cdot p_{l+1})=(q_l-\theta_l).
\end{cases} \qquad (2.6)
$$

<u>При условии</u> Ш$_{2)}$

$$
\begin{cases}
B_{l-2j}(G)=\prod\limits_{z=j+1}^{l-2}\hat{c}_z\cdot B_{jj}(G),\ B_{il-2}(G)=B_{ii}(G)\cdot\prod\limits_{z=i+1}^{k-2}\hat{\beta}_z,\ B_{l+1j}(G)=B_{l+1l+1}(G)\cdot\prod\limits_{z=l+2}^{j}\hat{\beta}_z,\ B_{il+1}(G)=\prod\limits_{z=l+2}^{i}\hat{c}_z\cdot B_{l+1l+1}(G), \\
\{B_{k-2j}(G)\}_{j=1}^{k-2},\{B_{ik-2}(G)\}_{i=1}^{k-2},\{B_{k+1j}(G)\}_{j=k+1}^{l-2},\{B_{ik+1}(G)\}_{i=k+1}^{l-2} \text{– представлены} \\
\text{в виде (2.3);}\quad (q_{l-1}-p_{l-1}\cdot B_{l-1l-1}(G)\cdot r_{l-1})=(q_{l-1}-\hat{\theta}_{l-1}),(q_l-r_{l+1}\cdot B_{l+1l+1}(G)\cdot p_{l+1})=G_{l-1}.
\end{cases} \qquad (2.7)
$$

---

[x] Здесь мы не приводим полученные представления типа 2.2 для $\mathbb{C}(1.1)$ при условиях IУ;УI в силу ограниченности объёма публикации и очевидного следствия их из представления 2.2. И в этой теореме справедливо также Замечание 2.2.

При условии У

$$\begin{cases} B_{l-2\,l-2}(\Lambda,G)\cdot\prod\limits_{z=j+1}^{l-2}\beta_z = B_{l-2\,j}(\Lambda,G)=\prod\limits_{z=j+1}^{l-2}\hat{C}_z\cdot B_{jj}(\Lambda,G)\,,\ \prod\limits_{z=i+1}^{l-2} C_z\cdot B_{l-2\,l-2}(\Lambda,G)=B_{i\,l-2}(\Lambda,G)=B_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod\limits_{z=i+1}^{k-2}\hat{\beta}_z\,, \\ \prod\limits_{z=l+2}^{j} C_z\cdot B_{jj}(\Lambda,G)=B_{l+1\,j}(\Lambda,G)=B_{l+1\,l+1}(\Lambda,G)\cdot\prod\limits_{z=l+2}^{j}\hat{\beta}_z\,,\ B_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod\limits_{z=l+2}^{i}\beta_z=B_{i\,l+1}(\Lambda,G)=\prod\limits_{z=l+2}^{i}\hat{C}_z\cdot B_{l+1\,l+1}(\Lambda,G)\,, \\ \{B_{k-2\,j}(\Lambda,G)\}_{j=1}^{k-2},\ \{B_{i\,k-2}(\Lambda,G)\}_{i=1}^{k-2},\ \{B_{k+1\,j}(\Lambda,G)\}_{j=k+1}^{l-2},\ \{B_{i\,k+1}(\Lambda,G)\}_{i=k+1}^{l-2} \text{ –представлены в} \end{cases} \qquad (2.8)$$

виде (2.4);

Доказательство. Справедливость представления 2.2 проверяется путём перемножения его факторизирующих матриц. При этом следует воспользоваться основными равенствами $B_1^{k-2}\cdot C_1^{k-2}=E_1^{k-2}=B_1^{k-2}\cdot C_1^{k-2}$, $B_{k+1}^{l-2}\cdot C_{k+1}^{l-2}=E_{k+1}^{l-2}=C_{k+1}^{l-2}\cdot B_{k+1}^{l-2}$ и $B_{l+1}^{m}\cdot C_{l+1}^{m}=E_{l+1}^{m}=C_{l+1}^{m}\cdot B_{l+1}^{m}$ для усечённых подматриц C_1^{k-2}, C_{k+1}^{l-2}, C_{l+1}^{m} и им обратных подматриц $B_1^{k-2}=[C_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^{l-2}=[C_{k+1}^{l-2}]^{-1}$, $B_{l+1}^{m}=[C_{l+1}^{m}]^{-1}$ соответственно. Здесь также отметим, что при переходе от представления 2.2 к соответствующим представлениям /I$_3$)/ следует учесть определения матричных последовательностей $\{\Lambda\}$ (I.2), $\{G\}$ (I.3) и матриц B_{zz} (I.22). Справедливость представлений (2.6)÷(2.8) вновь является прямым следствием /см.I$_4$)/ коммутационных свойств B_{ij} –элементов-блоков обратных усечённых подматриц B_1^{k-2}, B_{k+1}^{l-2} и B_{l+1}^{m} соответственно. Справедливость представлений (2.6)÷(2.8) установлена.

Далее рассматриваются матрично-факторизованные представления типа 2.2 для $C(1.1)$ при следующих комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

УП. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ либо $[\Delta_k^{m}=0$ и $\Delta_{l_{i-1}}^{m}=0]\}$ – равно нулю любое конечное число отдалённых миноров каждого типа, то

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\Lambda_{l_i})=0 \text{ для любых целых } l_1, l_2, \dots, l_n \text{ таких, что} \\ (k<l_1<l_i) \text{ и } (l_{i-1}+3<l_i) \text{, где } i=1,2,\dots,n-1] \text{ либо} \\ [det(G_{k-1})=0 \text{ и } det(G_{l_i-1})=0 \text{ для любых целых } l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 \text{ таких, что} \\ (k>l_n>l_{i-1}) \text{ и } (l_i-3>l_{i-1}) \text{, где } i=n-1, n-2, \dots, 1]. \end{cases}$$

УШ. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ либо $[\Delta_k^{m}=0$ и $\Delta_{l_{i-1}}^{m}=0]\}$ – равно нулю любое конечное число соседних миноров каждого типа, то

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\Lambda_{l_i})=0 \text{ для всех целых } l_1, l_2, \dots, l_n \text{ таких, что} \\ (k<l_1<l_i) \text{ и } (l_{i-1}+3=l_i) \text{, где } i=1,2,\dots,n-1] \text{ либо} \end{cases}$$

$$\begin{cases}[det(G_{k-1})=0 \text{ и } det(G_{\ell_{i-1}})=0 & \text{для всех целых } \ell_n, \ell_{n-1}, \ldots, \ell_1 \text{ таких, что}\\ (k>\ell_n>\ell_{i-1}) \text{ и } (\ell_i-3=\ell_{i-1}) & \text{, где } i=n-1, n-2, \ldots, 1].\end{cases}$$

IX. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{\ell_{i-1}}]$ и $[\Delta_k^m=0=\Delta_{\ell_{i-1}}^m]\}$ – равно нулю одновременно любое конечное число отдалённых миноров обоих типов, то

$$\begin{cases}[\text{условия УП}_I), \text{но } \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1}, \ \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k+2}^{k'-1}, \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k'+2}^{k''-1},\\ \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k''+2}^{m+1}] \ \underline{\text{и}}\\ [det(G_{k''-1})=0, \ det(G_{k'-1})=0 \text{ и } det(G)_{k-1}=0, \text{но } \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k''}^{m-1},\\ \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k'}^{k''-3}, \ \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k}^{k'-3}, \{det(G_j)\neq 0\}_{j=0}^{k-3},\\ \text{где } \ k=\ell_{i-1}, \ k''=\ell_i \ (\ell_{i-1}+3<\ell_i), \ i=1,2,\ldots, n-2, n-1].\end{cases}$$

X. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{\ell_{i-1}}]$ и $[\Delta_k^m=0=\Delta_{\ell_{i-1}}^m]\}$ – равно нулю одновременно любое конечное число соседних миноров обоих типов, то

$$\begin{cases}[\text{условия УШ}_I), \text{ но } \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1}, \ det(\Lambda_{k+2}=q_{k+1})\neq 0, \ det(\Lambda_{k'+2})\neq 0,\\ \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k''+2}^{m+1}] \ \underline{\text{и}}\\ [det(G_{k''-1})=0, \ det(G_{k'-1})=0 \text{ и } det(G_{k-1})=0, \text{но } \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k''}^{m-1},\\ det(G_{k'})\neq 0, \ det(G_k)\neq 0, \ \{det(G_j)\neq 0\}_{j=0}^{k-3},\\ \text{где } \ k'=\ell_{i-1}, \ k''=\ell_i \ (\ell_{i-1}+3=\ell_i), \ i=1,2,\ldots,n-2,n-1].\end{cases}$$

Итак, имеет место следующая

Теорема 2.3. Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{p_j, r_j\}_{j=2}^m$ и соответствующими квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^m$, в общем случае разных размерностей. Пусть также для $\{\Delta_1^j\}$; $\{\Delta_j^m\}$ – ведущих блочно-угловых миноров $\mathbb{C}(1.1)$ выполняется одно из условий УП, УШ, IX, X. Тогда для $\mathbb{C}(1.1)$ имеет место следующее единственное структурно-инвариантное матрично-факторизованное представление [x)]

---

x) Здесь также мы не приводим полученные представления типа 2.3 для $\mathbb{C}(1.1)$ при условиях УШ; X в силу ограниченности объёма публикации и очевидного следствия их из представления 2.3.

Представление 2.3

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} & & & & & & & \\
(p_{k-1}\cdot B_{k-2,1})\dots(p_{k-1}\cdot B_{k-2,k-2}) & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (z_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1})\dots(z_{k+1}\cdot B_{k+1,k'-2}) & & & & & \\
 & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_{k'-3} & \\ & & & E_{k'-2} \end{bmatrix} & & & & & \\
 & & (p_{k'-1}\cdot B_{k'-2,k+1})\dots(p_{k'-1}\cdot B_{k'-2,k'-2}) & \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ & E_{k'} \end{bmatrix} & (z_{k'+1}\cdot B_{k'+1,k'+1})\dots(z_{k'+1}\cdot B_{k'+1,k''-2}) & & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} E_{k'+1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & E_{k''-3} & \\ & & & E_{k''-2} \end{bmatrix} & & & \\
 & & & & (p_{k''-1}\cdot B_{k''-2,k'+1})\dots(p_{k''-1}\cdot B_{k''-2,k''-2}) & \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ & E_{k''} \end{bmatrix} & (z_{k''+1}\cdot B_{k''+1,k''+1})\dots(z_{k''+1}\cdot B_{k''+1,m}) & \\
 & & & & & & \begin{bmatrix} E_{k''+1} & & & \\ & E_{k''+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m \end{bmatrix} &
\end{bmatrix} \times
$$

$$
\times \underbrace{\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} \mathbb{C}_1^{k-2} \end{bmatrix} & & \\
 & \begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} (q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-1,k-1}\cdot z_{k-1}) & (z_k) \\ (p_k) & (q_k - z_{k+1}\cdot B_{k+1,k+1}\cdot p_{k+1}) \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (-z_{k+1}\cdot B_{k+1,k'-2}\cdot z_{k'-1}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} & & \\
\mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{k+2}^{k'-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & & \\
\begin{bmatrix} \mathbb{O} & (-p_{k'-1}\cdot B_{k'-2,k+1}\cdot p_{k+1}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} (q_{k'-1}-p_{k'-1}\cdot B_{k'-2,k'-2}\cdot z_{k'-1}) & (z_{k'}) \\ (p_{k'}) & (q_{k'} - z_{k'+1}\cdot B_{k'+1,k'+1}\cdot p_{k'+1}) \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & \mathbb{O} \\ (-z_{k'+1}\cdot B_{k'+1,k''-2}\cdot z_{k''-1}) & \mathbb{O} \end{bmatrix} \\
 & & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{k'+2}^{k''-2} \end{bmatrix} & \mathbb{O} \\
 & & \begin{bmatrix} \mathbb{O} & (-p_{k''-1}\cdot B_{k''-2,k'+1}\cdot p_{k'+1}) \\ \mathbb{O} & \mathbb{O} \end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix} (q_{k''-1}-p_{k''-1}\cdot B_{k''-2,k''-2}\cdot z_{k''-1}) & (z_{k''}) \\ (p_{k''}) & (q_{k''} - z_{k''+1}\cdot B_{k''+1,k''+1}\cdot p_{k''+1}) \end{bmatrix}
\end{bmatrix} & \\
 & & \begin{bmatrix} \mathbb{C}_{k''+1}^{m} \end{bmatrix}
\end{bmatrix}}_{\Phi_{k,k',k''}} = \omega_{k,k',k''}
$$

$$
\times\left[\begin{array}{ccccccc}
\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (B_{1k-2}\cdot z_{k-1}) \\ (B_{2k-2}\cdot z_{k-1}) \\ \vdots \\ (B_{k-2k-2}\cdot z_{k-1}) \end{matrix} & & & & & & \\
& \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & & & & & \\
& \begin{matrix} (B_{k+1k+1}\cdot p_{k+1}) \\ \vdots \\ (B_{k'-2k+1}\cdot p_{k+1}) \end{matrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_{k'-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (B_{k+1k'-2}\cdot z_{k'-1}) \\ \vdots \\ (B_{k'-2k'-2}\cdot z_{k'-1}) \end{matrix} & & & & & \\
& & \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ & E_{k'} \end{bmatrix} & & & & \\
& & \begin{matrix} (B_{k'+1k'+1}\cdot p_{k'+1}) \\ \vdots \\ (B_{k''-2k'+1}\cdot p_{k'+1}) \end{matrix} \begin{bmatrix} E_{k'+1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_{k''-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} (B_{k'+1k''-2}\cdot z_{k''-1}) \\ \vdots \\ (B_{k''-2k''-2}\cdot z_{k''-1}) \end{matrix} & & & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ & E_{k''} \end{bmatrix} & & & \\
& & & \begin{matrix} (B_{k''+1k''+1}\cdot p_{k''+1}) \\ \vdots \\ (B_{mk''+1}\, p_{k''+1}) \end{matrix} \begin{bmatrix} E_{k''+1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_m \end{bmatrix} & & &
\end{array}\right] = \mathbb{C} \quad (2.9)
$$

При этом для $[\mathbb{C}_1^{k-2}, \mathbb{C}_{k+2}^{k'-2}, \mathbb{C}_{k'+2}^{k''-2}, \mathbb{C}_{k+1}^{m}]$-ведущих усечённых блочно-трёхдиагональных подматриц общего вида (I.I) при соответствующих условиях $УП_{1)}$, $УП_{2)}$, IX имеет место одно из представлений вида (I.20)÷(I.2I), (I.I0)÷(I.II) и (I.I4)÷(I.I5). Здесь также $B_{\gamma\mu}$ -столбцы (строки) соответствующих обратных подматриц $B_\gamma^\mu = [\mathbb{C}_\gamma^\mu]^{-1}$ при условиях $УП_{1)}$, $УП_{2)}$, IX могут быть представлены в виде[x)] (2.6)÷(2.8).

<u>Доказательство</u>. Справедливость представления 2.3 при соответствующих условиях вновь проверяется путём перемножения его факторизирующих матриц с учётом сказанного выше в доказательствах теорем 2.I и 2.2. Справедливость представления 2.3 установлена.

Таким образом, мы закончили здесь изучение всевозможных представлений мультипликативного типа для блочно-трёхдиагональных матриц $\mathbb{C}(1.1)$ общего вида при различных комбинациях у них нулевых ведущих блочно-угловых миноров. На связи полученных здесь представлений с эквивалентными им представлениями аддитивно-мультипликативного типа мы кратко остановимся в следующей работе, которая будет посвящена применению полученных выше результатов к решению на ЭВМ систем линейных уравнений с матрицами вида $\mathbb{C}(1.1)$. В этой же работе мы остановимся ниже на изучении структуры аддитивно-мультипликативных представлений (сопряжённых с полученными выше мультипликативными представлениями $\mathbb{C}(1.1)$) матриц $(B = \mathbb{C}^{-1})$ обратных к $\mathbb{C}(1.1)$.

x) В этой теореме справедливо также Замечание 2.2.

3. <u>Структурно-инвариантные представления аддитивно-мультипликативного типа для матриц обратных к блочно-трёхдиагональным общего вида $\mathbb{C}(1.1)$ при наличии нулевых ведущих блочно-угловых миноров</u>

В предыдущем параграфе нами были построены генераторы множества всевозможных представлений мультипликативного типа блочно-трёхдиагональных матриц $\mathbb{C}(1.1)$ общего вида при наличии у них различных комбинаций нулевых ведущих блочно-угловых миноров.

В настоящем параграфе подобная задача решается для им обратных матриц при тех же условиях на миноры. При этом из соображений дальнейшего практического использования полученных в этой работе теоретических результатов для решения систем уравнений $\mathbb{C}X = Y$ нами построены новые представления для $B = \mathbb{C}^{-1}$ аддитивно-мультипликативного типа и найдены их генераторы.

Итак, имеет место следующая

<u>Теорема 3.I</u>. Пусть $\mathbb{C}$ -невырожденная блочно-трёхдиагональная общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ и соответствующими квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$, в общем случае разных размерностей. Пусть также для $\{\Delta_1^j\}$, $\{\Delta_j^m\}$-ведущих блочно-угловых миноров $\mathbb{C}(1.1)$ выполняется одно из условий $I_1)$, $I_2)$, П. Тогда для $B = \mathbb{C}^{-1}$ имеет место следующее единственное структурно-инвариантное аддитивно-мультипликативное представление

<u>Представление 3.I</u>(типа $B = \tilde{B} + \Delta B$)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & - \\ & p_{k-3} & q_{k-3} & r_{k-2} \\ & & p_{k-2} & q_{k-2} \end{bmatrix}^{-1} = B_1^{k-2} & & \\ & \begin{bmatrix} 0_{k-1} & \\ & 0_k \end{bmatrix} & \\ & & B_{k+1}^{m} = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & - \\ & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix}}_{\tilde{B}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0_1 & & & \\ & 0_2 & & \\ & & -- & \\ & & & 0_{k-2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} (-B_{1k-2} \cdot r_{k-1}) \\ (-B_{2k-2} \cdot r_{k-1}) \\ -- \\ (-B_{k-2k-2} \cdot r_{k-1}) \end{matrix} & \\ & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & \\ & \begin{matrix} (-B_{k+1k+1} \cdot p_{k+1}) \\ (-B_{k+2k+1} \cdot p_{k+1}) \\ --- \\ (-B_{mk+1} \cdot p_{k+1}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0_{k+1} & & & \\ & 0_{k+2} & & \\ & & -- & \\ & & & 0_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\tilde{C}} \times$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{k-1} \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-2k-2} \cdot r_{k-1}) & (r_k) \\ (p_k) & (q_k - r_{k+1} \cdot B_{k+1k+1} \cdot p_{k+1}) \end{bmatrix}^{-1} = \omega_k^{-1} & \\ & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & & & \\ & E_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}_k} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} O_1 & & & \\ & O_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_{k-2} \end{bmatrix} & & & \\ (-p \cdot B)_{k-1k-21} \ldots (-p \cdot B)_{k-1k-2k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (-r \cdot B)_{k+1k+1k+1} \ldots (-r \cdot B)_{k+1k+1m} \\ & & \begin{bmatrix} O_{k+1} & & & \\ & O_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & O_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_3} = (\tilde{B} + \Delta B) = B \qquad (3.I)$$

При этом для $[B_1^{k-2}]_{ij}$, $[B_{k+1}^m]_{ij}$ –элементов–блоков обратных ведущих усечённых подматриц $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^m = [C_{k+1}^m]^{-1}$ справедливы при соответствующих условиях I$_{I)}$, I$_{2)}$, Ш любые[x)] из полученных нами в /I$_{4)}$,2,3/ различных прямых факторизованных представлений.
Здесь неизвестные $\{[\tilde{B}_{k-1k-1}(\Lambda)$, $\tilde{B}_{k-1k}(\Lambda)$, $\tilde{B}_{kk-1}(\Lambda)$, $\tilde{B}_{kk}(\Lambda)$, при условии I$_{I)}$; $[\tilde{B}_{k-1k-1}(G)$, $\tilde{B}_{k-1k}(G)$, $\tilde{B}_{kk-1}(G)$, $\tilde{B}_{kk}(G)$, при условии I$_{2)}$]; $[\tilde{B}_{k-1k-1}(\Lambda, G)$, $\tilde{B}_{k-1k}(\Lambda, G)$, $\tilde{B}_{kk-1}(\Lambda, G)$, $\tilde{B}_{kk}(\Lambda, G)$, при условии П$]\}$–элементы блоки матриц ω_k^{-1} могут быть найдены любым методом с учётом следующих основных матричных уравнений:

$$\begin{bmatrix} (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-2k-2} \cdot r_{k-1}) & (r_k) \\ (p_k) & (q_k - r_{k+1} \cdot B_{k+1k+1} \cdot p_{k+1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{B}_{k-1k-1} & \tilde{B}_{k-1k} \\ \tilde{B}_{k-1k} & \tilde{B}_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{k-1k-1} & \\ & E_{kk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{B}_{k-1k-1} & \tilde{B}_{k-1k} \\ \tilde{B}_{k-1k} & \tilde{B}_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (q_{k-1} - p_{k-1} \cdot B_{k-2k-2} \cdot r_{k-1}) & (r_k) \\ (p_k) & (q_k - r_{k+1} \cdot B_{k+1k+1} \cdot p_{k+1}) \end{bmatrix}. \qquad (3.2)$$

<u>Доказательство</u>. Матрично-факторизованное представление 3.I для $B = C^{-1}$ получаем из соответствующих представлений 2.I для $C(1.1)$. Для этого представление 2.I формально запишем в виде $C = C_1 \cdot \mathcal{F}_k \cdot C_3$, где $C_1, \mathcal{F}_k, C_3$ –факторизирующие матрицы в представлении 2.I. Учитывая невырожденность матриц $C_1, \mathcal{F}_k, C_3$, формально имеем $B = C_3^{-1} \cdot \mathcal{F}_k^{-1} \cdot C_1^{-1}$, где $C_3^{-1}, \mathcal{F}_k^{-1}, C_1^{-1}$–соответствующие обратные матрицы. Теперь, выполнив перемножения матриц $C_3^{-1} \cdot \mathcal{F}_k^{-1} \cdot C_1^{-1}$, получим явный вид $B = C^{-1}$ (см. представление 2.I, полученное нами в /I$_{4)}$/. Далее, из явного вида $B = C^{-1}$ и с учётом структуры матриц C_1, $\mathcal{F}_k$, C_3, получаем аддитивно-мультипликативное представление типа $B = \tilde{B} + \Delta B$ т.е. представление 3.I. Проверка справедливости полученного представления 3.I осуществляется далее на основе равенств $C \cdot B = E = C \cdot B$. Теорема доказана.

[x)] <u>Замечание 3.2</u>. $B_1^{k-2} = [C_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^m = [C_{k+1}^m]^{-1}$ могут быть получены также и любым другим известным в алгебре способом.

Замечание 3.I. Отметим также, что обратный переход от аддитивно-мультипликативного представления 3.I для $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ к сопряжённому мультипликативному представлению $\mathcal{B}=\tilde{\mathcal{C}}_3^{-1}\cdot\hat{\varsigma}_3^{-1}\cdot\tilde{\mathcal{C}}_1^{-1}$ осуществляется следующим образом: Матрица $\tilde{\mathcal{B}}$ в(3.I) заменяется нулевой матрицей, указанные нулевые блоки в матрицах $\tilde{\mathcal{C}}_1$ и $\tilde{\mathcal{C}}_3$ заменяется единичными матрицами, верхний единичный блок в матрице $\hat{\varsigma}_k$ заменяется на блок $\mathcal{B}_1^{k-2}$, а нижний единичный блок на блок $\mathcal{B}_{k+1}^{m}$. Аналогичные переходы можно выполнить и в аддитивно-мультипликативных представлениях, рассматриваемых ниже в теоремах 3.2 и 3.3.

Далее рассматривается аналогичное матрично-факторизованное представление типа 3.I для $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ при комбинациях однотипных (или обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров $\mathcal{C}\,(1.1)$.

Имеет место следующая

Теорема 3.2. Пусть $\mathcal{C}$ -невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ и соответствующими квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$, в общем случае разных размерностей. Пусть также для $\{\Lambda_1^j\}$, $\{\Delta_j^m\}$ -ведущих блочно-угловых миноров $\mathcal{C}(1.1)$ выполняется одно из условий Ш$_{I)}$,Ш$_{2)}$;IУ$_{I)}$; IУ$_{2)}$;У;УI. Тогда для $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ имеет место следующее единственное структурно-инвариантное аддитивно-мультипликативное представление[x)]:

Представление 3.2(типа $\mathcal{B}=\tilde{\mathcal{B}}+\Delta\mathcal{B}$)

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & - \\ & & p_{k-2} & q_{k-2} \end{bmatrix}^{-1} = \mathcal{B}_1^{k-2} & & & & \\
& \begin{bmatrix} 0_{k-1} & \\ & 0_k \end{bmatrix} & & & \\
& & \mathcal{B}_{k+1}^{l-2} = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_{l-2} & q_{l-2} \end{bmatrix}^{-1} & & \\
& & & \begin{bmatrix} 0_{l-1} & \\ & 0_l \end{bmatrix} & \\
& & & & \mathcal{B}_{l+1}^{m} = \begin{bmatrix} q_{l+1} & r_{l+2} & & \\ p_{l+2} & q_{l+2} & r_{l+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}^{-1}
\end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0_1 & & \\ & 0_2 & \\ & -- & \\ & & 0_{k-2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} (-\mathcal{B}_{1\,k-2}\cdot r_{k-1}) \\ -\,- \\ (-\mathcal{B}_{k-2\,k-2}\cdot r_{k-1}) \end{matrix} & & & & \\
& \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & & & & \\
& \begin{matrix} (-\mathcal{B}_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1}) \\ -\,- \\ (-\mathcal{B}_{l-2\,k+1}\cdot p_{k+1}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0_{k+1} & & \\ & 0_{k+2} & \\ & -- & \\ & & 0_{l-2} \end{bmatrix} & \begin{matrix} (-\mathcal{B}_{k+1\,l-2}\cdot r_{l-1}) \\ -\,- \\ (-\mathcal{B}_{l-2\,l-2}\cdot r_{l-1}) \end{matrix} & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ & E_l \end{bmatrix} & & \\
& & & \begin{matrix} (-\mathcal{B}_{l+1\,l+1}\cdot p_{l+1}) \\ -\,-\,- \\ (-\mathcal{B}_{m\,l+1}\cdot p_{l+1}) \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0_{l+1} & \\ & -- \\ & 0_m \end{bmatrix} &
\end{bmatrix}
\times
$$

x) Здесь и далее мы не приводим полученные представления типа 3.2 для $\mathcal{B}=\mathcal{C}^{-1}$ при условиях IУ,УI,УШ,X в силу ограниченности объёма публикации.

$$
\times\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}E_1&&&\\&E_2&&\\&&\ddots&\\&&&E_{k-2}\end{bmatrix} & & \\
& \left[\begin{matrix}
\begin{bmatrix}(q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1})&(z_k)\\(p_k)&(q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}\\(-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,l-2}\cdot z_{l-1})&\mathbb{O}\end{bmatrix}\\
\mathbb{O} & \begin{bmatrix}E_{k+1}&&&\\&E_{k+2}&&\\&&\ddots&\\&&&E_{l-2}\end{bmatrix} & \mathbb{O}\\
\begin{bmatrix}\mathbb{O}&(-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\\mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \mathbb{O} & \begin{bmatrix}(q_{l-1}-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,l-2}\cdot z_{l-1})&(z_l)\\(p_l)&(q_l-z_{l+1}\cdot B_{l+1\,l+1}\cdot p_{l+1})\end{bmatrix}
\end{matrix}\right]^{-1}=\tilde{\omega}^{-1}_{k,l} & \\
& & \begin{bmatrix}E_{l+1}&&&\\&E_{l+2}&&\\&&\ddots&\\&&&E_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\mathbb{O}_1&&&\\&\mathbb{O}_2&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbb{O}_{k-2}\end{bmatrix} & & & & \\
(-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,1})\ldots(-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}) & \begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & (-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1})\ldots(-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,l-2}) & & \\
& & \begin{bmatrix}\mathbb{O}_{k+1}&&&\\&\mathbb{O}_{k+2}&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbb{O}_{l-2}\end{bmatrix} & & \\
& & (-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,k+1})\ldots(-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,l-2}) & \begin{bmatrix}E_{l-1}&\\&E_l\end{bmatrix} & (-z_{l+1}\cdot B_{l+1\,l+1})\ldots(-z_{l+1}\cdot B_{l+1\,m})\\
& & & & \begin{bmatrix}\mathbb{O}_{l+1}&&&\\&\mathbb{O}_{l+2}&&\\&&\ddots&\\&&&\mathbb{O}_m\end{bmatrix}
\end{bmatrix}=B \tag{3.3}
$$

При этом для $\{[B_1^{k-2}]_{ij}$, $[B_{k+1}^{l-2}]_{ij}$, $[B_{l+1}^{m}]_{ij}\}$ –элементов-блоков обратных ведущих усечённых подматриц $B_1^{k-2}=[\mathbb{C}_1^{k-2}]^{-1}$, $B_{k+1}^{l-2}=[\mathbb{C}_{k+1}^{l-2}]^{-1}$, $B_{l+1}^{m}=[\mathbb{C}_{l+1}^{m}]^{-1}$ справедливы при соответствующих условиях Ш$_{1)}$, Ш$_{2)}$, У любые[x)] из полученных нами /I$_{4)}$, 2, 3/ различных прямых факторизованных представлений. Здесь неизвестные $\{[\tilde{B}_{k-1\,k-1}$, $\tilde{B}_{k-1\,k}$, $\tilde{B}_{k\,k-1}$, $\tilde{B}_{kk}$; $\tilde{B}_{k-1\,l-1}$, $\tilde{B}_{k-1\,l}$, $\tilde{B}_{k\,l-1}$, $\tilde{B}_{kl}$; $\tilde{B}_{l-1\,k}$, $\tilde{B}_{l\,k-1}$, $\tilde{B}_{lk}$, $\tilde{B}_{l-1\,k-1}$; $\tilde{B}_{l-1\,l-1}$, $\tilde{B}_{l-1\,l}$, $\tilde{B}_{l\,l-1}$, $\tilde{B}_{ll}]$ –функции от $\{\Lambda\}$ при условии Ш$_{1)}$; функции от $\{G\}$ при условии Ш$_{2)}$ или как функции от $\{\Lambda, G\}$ при условии У $\}$ –элементы-блоки матриц $\tilde{\omega}^{-1}_{k,l}$ могут быть найдены любым методом с учётом следующих основных матричных уравнений:

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}(q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1})&(z_k)\\(p_k)&(q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}\\(-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,l-2}\cdot z_{l-1})&\mathbb{O}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbb{O}&(-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\\mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(q_{l-1}-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,l-2}\cdot z_{l-1})&(z_l)\\(p_l)&(q_l-z_{l+1}\cdot B_{l+1\,l+1}\cdot p_{l+1})\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\tilde{B}_{k-1\,k-1}&\tilde{B}_{k-1\,k}\\\tilde{B}_{k\,k-1}&\tilde{B}_{kk}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\tilde{B}_{k-1\,l-1}&\tilde{B}_{k-1\,l}\\\tilde{B}_{k\,l-1}&\tilde{B}_{kl}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\tilde{B}_{l-1\,k-1}&\tilde{B}_{l-1\,k}\\\tilde{B}_{l\,k-1}&\tilde{B}_{lk}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\tilde{B}_{l-1\,l-1}&\tilde{B}_{l-1\,l}\\\tilde{B}_{l\,l-1}&\tilde{B}_{ll}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}=
\tag{3.4}
$$

$$
=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}E_{k-1}&\\&E_k\end{bmatrix} & \\
& \begin{bmatrix}E_{l-1}&\\&E_l\end{bmatrix}
\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}\tilde{B}_{k-1\,k-1}&\tilde{B}_{k-1\,k}\\\tilde{B}_{k\,k-1}&\tilde{B}_{kk}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\tilde{B}_{k-1\,l-1}&\tilde{B}_{k-1\,l}\\\tilde{B}_{k\,l-1}&\tilde{B}_{kl}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\tilde{B}_{l-1\,k-1}&\tilde{B}_{l-1\,k}\\\tilde{B}_{l\,k-1}&\tilde{B}_{lk}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\tilde{B}_{l-1\,l-1}&\tilde{B}_{l-1\,l}\\\tilde{B}_{l\,l-1}&\tilde{B}_{ll}\end{bmatrix}
\end{bmatrix}\cdot
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}(q_{k-1}-p_{k-1}\cdot B_{k-2\,k-2}\cdot z_{k-1})&(z_k)\\(p_k)&(q_k-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,k+1}\cdot p_{k+1})\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}\mathbb{O}&\mathbb{O}\\(-z_{k+1}\cdot B_{k+1\,l-2}\cdot z_{l-1})&\mathbb{O}\end{bmatrix}\\
\begin{bmatrix}\mathbb{O}&(-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,k+1}\cdot p_{k+1})\\\mathbb{O}&\mathbb{O}\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}(q_{l-1}-p_{l-1}\cdot B_{l-2\,l-2}\cdot z_{l-1})&(z_l)\\(p_l)&(q_l-z_{l+1}\cdot B_{l+1\,l+1}\cdot p_{l+1})\end{bmatrix}
\end{bmatrix}.
$$

---

x) В этой теореме справедливо также Замечание 3.2.

Доказательство. Представление типа 3.2 получаем из соответствующих факторизаций 2.2 для $\mathbb{C}(1.1)$. При этом следует воспользоваться основными моментами доказательства теоремы 3.I. Проверка справедливости полученного представления 3.2 осуществляется на основе равенств $\mathbb{C}\cdot\mathbb{B} = E = \mathbb{B}\cdot\mathbb{C}$.

В следующей Теореме рассматривается матрично-факторизованное представление типа 3.2 для $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ при комбинациях конечного числа однотипных (или конечного числа обоих типов) нулевых ведущих блочно-угловых миноров у $\mathbb{C}(1.1)$.

Имеет место следующая

Теорема 3.3. Пусть $\mathbb{C}$ –невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ и соответствующими квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$, в общем случае разных размерностей. Пусть также для $\{\Delta_1^j\}$, $\{\Delta_j^m\}$ –ведущих блочно-угловых миноров $\mathbb{C}(1.1)$ выполняется одно из условий УП,УШ,IX,X. Тогда для $\mathbb{B} = \mathbb{C}^{-1}$ имеет место следующее единственное структурно-инвариантное аддитивно-мультипликативное представление:

Представление 3.3(типа $\mathbb{B} = \tilde{\mathbb{B}} + \Delta\mathbb{B}$)

$$
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & - & - & - \\ & & p_{k-2} & q_{k-2} \end{bmatrix}^{-1} = \mathbb{B}_1^{k-2} & & & & & \\
& \begin{bmatrix} 0_{k-1} & \\ & 0_k \end{bmatrix} & & & & \\
& & \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} & & \\ p_{k+2} & q_{k+2} & r_{k+3} & \\ & - & - & \\ & & p_{k'-2} & q_{k'-2} \end{bmatrix}^{-1} = \mathbb{B}_{k+1}^{k'-2} & & & \\
& & & \begin{bmatrix} 0_{k'-1} & \\ & 0_{k'} \end{bmatrix} & & \\
& & & & \begin{bmatrix} q_{k'+1} & r_{k'+2} & & \\ p_{k'+2} & q_{k'+2} & r_{k'+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_{k''-2} & q_{k''-2} \end{bmatrix}^{-1} = \mathbb{B}_{k'+1}^{k''-2} & \\
& & & & & \begin{bmatrix} 0_{k''-1} & \\ & 0_{k''} \end{bmatrix} \\
& & & & & \mathbb{B}_{k''+1}^{m} = \begin{bmatrix} q_{k''+1} & r_{k''+2} & & \\ p_{k''+2} & q_{k''+3} & r_{k''+3} & \\ & - & - & - \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix}^{-1}
\end{bmatrix} +
$$

$$
+\left\{\left[\begin{array}{l}
\begin{bmatrix}\Phi_1 & & & \\ & \Phi_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Phi_{K-2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(-B_{1K-2}\cdot S_{K-1})\\(-B_{2K-2}\cdot S_{K-1})\\ \vdots \\(-B_{K-2K-2}\cdot S_{K-1})\end{pmatrix} \\
\qquad\begin{bmatrix}E_{K-1} & \\ & E_K\end{bmatrix} \\
\qquad\qquad\begin{pmatrix}(-B_{K+1K+1}\cdot P_{K+1})\\(-B_{K+2K+1}\cdot P_{K+1})\\ \vdots \\(-B_{K'-2K+1}\cdot P_{K+1})\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{K+1} & & \\ & \Phi_{K+2} & \\ & & \ddots \\ & & & \Phi_{K'-2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(-B_{K+1K'-2}\cdot S_{K'-1})\\(-B_{K+2K'-2}\cdot S_{K'-1})\\ \vdots \\(-B_{K'-2K'-2}\cdot S_{K'-1})\end{pmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\begin{bmatrix}E_{K'-1} & \\ & E_{K'}\end{bmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{pmatrix}(-B_{K'+1K'+1}\cdot P_{K'+1})\\(-B_{K'+2K'+1}\cdot P_{K'+1})\\ \vdots \\(-B_{K''-2K'+1}\cdot P_{K'+1})\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{K'+1} & & \\ & \Phi_{K'+2} & \\ & & \ddots \\ & & & \Phi_{K''-2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}(-B_{K'+1K''-2}\cdot S_{K''-1})\\(-B_{K'+2K''-2}\cdot S_{K''-1})\\ \vdots \\(-B_{K''-2K''-2}\cdot S_{K''-1})\end{pmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{bmatrix}E_{K''-1} & \\ & E_{K''}\end{bmatrix} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\begin{pmatrix}(-B_{K''+1K''+1}\cdot P_{K''+1})\\(-B_{K''+2K''+1}\cdot P_{K''+1})\\ \vdots \\(-B_{mK''+1}\cdot P_{K''+1})\end{pmatrix}\begin{bmatrix}\Phi_{K''+1} & & \\ & \Phi_{K''+2} & \\ & & \ddots \\ & & & \Phi_{m}\end{bmatrix}
\end{array}\right] \times\right.
$$

$$
\times\left[\begin{array}{l}
\begin{bmatrix}E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_{K-2}\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}(q_{K-1}-P_{K-1}\cdot B_{K-1K-1}\cdot S_{K-1})(S_K)\\(P_K)(q_K-S_{K+1}\cdot B_{K+1K+1}\cdot P_{K+1})\end{bmatrix} \quad \Phi \quad \begin{bmatrix}\Phi & \Phi\\(-S_{K+1}\cdot B_{K+1K'-2}\cdot S_{K'-1}) & \Phi\end{bmatrix} \\
\qquad \Phi \quad \begin{bmatrix}E_{K+1} & & \\ & E_{K+2} & \\ & & \ddots \\ & & & E_{K'-2}\end{bmatrix} \quad \Phi \\
\begin{bmatrix}\Phi & (-P_{K'-1}\cdot B_{K'-2K+1}\cdot P_{K+1})\\ \Phi & \Phi\end{bmatrix} \quad \Phi \begin{bmatrix}(q_{K'-1}-P_{K'-1}\cdot B_{K'-1K'-1}\cdot S_{K'-1})(S_{K'})\\(P_{K'})(q_{K'}-S_{K'+1}\cdot B_{K'+1K'+1}\cdot P_{K'+1})\end{bmatrix}\Phi \begin{bmatrix}\Phi & \Phi\\(-S_{K'+1}\cdot B_{K'+1K''-2}\cdot S_{K''-1}) & \Phi\end{bmatrix} \\
\qquad\qquad \Phi \quad \begin{bmatrix}E_{K'+1} & & \\ & E_{K'+2} & \\ & & \ddots \\ & & & E_{K''-2}\end{bmatrix} \quad \Phi \\
\qquad\qquad \begin{bmatrix}\Phi & (-P_{K''-1}\cdot B_{K''-2K'+1}\cdot P_{K'+1})\\ \Phi & \Phi\end{bmatrix} \quad \Phi \begin{bmatrix}(q_{K''-1}-P_{K''-1}\cdot B_{K''-1K''-1}\cdot S_{K''-1})(S_{K''})\\(P_{K''})(q_{K''}-S_{K''+1}\cdot B_{K''+1K''+1}\cdot P_{K''+1})\end{bmatrix}
\end{array}\right]^{-1} \begin{bmatrix}E_{K''+1} & & \\ & \ddots & \\ & & E_m\end{bmatrix} = \tilde{\omega}^{-1}_{K,K',K''} \times
$$

$$
\times\left[\begin{array}{ccccccc}
\begin{bmatrix} \mathbb{O}_1 & & & \\ & \mathbb{O}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{O}_{k-2} \end{bmatrix} & & & & & & \\
(-P\cdot B)_{k-1\,k+1} \cdots (-P\cdot B)_{k-1\,k'-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ & E_k \end{bmatrix} & (-Z\cdot B)_{k+1\,k+1} \cdots (-Z\cdot B)_{k+1\,k'-2} & & & & \\
& & \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{k+1} & & & \\ & \mathbb{O}_{k+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{O}_{k'-2} \end{bmatrix} & & & & \\
& & (-P'\cdot B')_{k'-1\,k+1} \cdots (-P'\cdot B')_{k'-1\,k'-2} & \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ & E_{k'} \end{bmatrix} & (-Z'\cdot B')_{k'+1\,k'+1} \cdots (-Z'\cdot B')_{k'+1\,k''-2} & & \\
& & & & \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{k'+1} & & & \\ & \mathbb{O}_{k'+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{O}_{k''-2} \end{bmatrix} & & \\
& & & & (-P''\cdot B'')_{k''-1\,k'+1} \cdots (-P''\cdot B'')_{k''-1\,k''-2} & \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ & E_{k''} \end{bmatrix} & (-Z''\cdot B'')_{k''+1\,k''+1} \cdots (-Z''\cdot B'')_{k''+1\,m} \\
& & & & & & \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{k''+1} & & & \\ & \mathbb{O}_{k''+2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbb{O}_{m} \end{bmatrix}
\end{array}\right] = B \qquad (3.5)
$$

При этом для $\{[B_1^{k-2}]_{ij}\,,\ [B_{k'-2}^{k+1}]_{ij}\,,\ [B_{k''-2}^{k'+1}]_{ij}\,,\ [B_{k''+1}^{m}]_{ij}\}$ –элементов–блоков обратных ведущих усечённых подматриц $\{\ B_1^{k-2}=[C_1^{k-2}]^{-1};\ B_{k'-2}^{k+1}=[C_{k'-2}^{k+1}]^{-1},$ $B_{k''-2}^{k'+1}=[C_{k''-2}^{k'+1}]^{-1}\,,\quad B_{k''+1}^{m}=[C_{k''+1}^{m}]^{-1}$ справедливы при соответствующих условиях $УП_{I)}, УП_{2)}$, IX любые[x)] из полученных нами /$I_{4)}$,2,3/ различных прямых факторизованных представлений. Здесь неизвестные $\{\ [\tilde{B}_{\nu\mu}]$ – –функции от $\{\Lambda\}$ при условии $УП_{I)}$; функции от $\{G\}$ при условии $УП_{2)}$ или как функции от $\{\Lambda, G\}$ при условии IX$\}$ –элементы–блоки матриц $\tilde{\omega}^{-1}_{k,k',k''}$ могут быть найдены любым (в том числе и рассмотренными выше) методом с учётом следующих основных матричных уравнений:

$$
\begin{bmatrix} [Q_{kk}] & [R_{k+1\,k'}] & \\ [P_{k'\,k+1}] & [Q_{k'k'}] & [R_{k'+1\,k''}] \\ & [P_{k''\,k'+1}] & [Q_{k''k''}] \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} [\tilde{B}_{kk}] & [\tilde{B}_{k+1\,k'}] & [\tilde{B}_{k+1\,k''}] \\ [\tilde{B}_{k'\,k+1}] & [\tilde{B}_{k'k'}] & [\tilde{B}_{k'+1\,k''}] \\ [\tilde{B}_{k''\,k+1}] & [\tilde{B}_{k''\,k'+1}] & [B_{k''k''}] \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} [E_{kk}] & & \\ & [E_{k'k'}] & \\ & & [E_{k''k''}] \end{bmatrix}
= \qquad (3.6)
$$

$$
=\begin{bmatrix} [\tilde{B}_{kk}] & [\tilde{B}_{k+1\,k'}] & [\tilde{B}_{k+1\,k''}] \\ [\tilde{B}_{k'\,k+1}] & [\tilde{B}_{k'k'}] & [\tilde{B}_{k'+1\,k''}] \\ [\tilde{B}_{k''\,k+1}] & [\tilde{B}_{k''\,k'+1}] & [\tilde{B}_{k''k''}] \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} [Q_{kk}] & [R_{k+1\,k'}] & \\ [P_{k'\,k+1}] & [Q_{k'k'}] & [R_{k'+1\,k''}] \\ & [P_{k''\,k'+1}] & [Q_{k''k''}] \end{bmatrix},
$$

---

x) И в этой теореме справедливо также Замечание 3.2.

явный вид известных [$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{P}$] –матриц-блоков в (3.6) определён в (3.5).

<u>Доказательство</u>. Представление типа 3.3 получаем из соответствующих факторизаций 3.3 для $\mathbb{C}(1.1)$. При этом вновь следует воспользоваться основными моментами доказательства теоремы 3.2. Проверка справедливости представления 3.3 также осуществляется на основе равенств $\mathbb{C}\cdot\mathbb{B} = E = \mathbb{B}\cdot\mathbb{C}$. Теорема доказана.

<u>Замечание 3.3</u> (Лемма 3.I). Если $\mathbb{C}$ –невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) и для её $\{\Delta_1^{s}\}$; $\{\Delta_s^{m}\}$ –ведущих блочно-угловых миноров выполняется одно из условий теорем 2.I; 3.I; 2.2; 3.2; 2.3; 3.3, то характерные /см. I$_{7)}$, 2/ матрицы ($\omega_k=\tilde{\omega}_k$) , $\omega_{k,\ell}(\tilde{\omega}_{k,\ell})$, $\omega_{k,k',k''}(\tilde{\omega}_{k,k',k''})$ являются, при соответствующих условиях, невырожденными.

<u>Доказательство</u>. Невырожденность характерных матриц $\omega_k, \omega_{k,\ell}, \omega_{k,k',k''}$ является прямым следствием невырожденности $\mathbb{C}(1.1)$, поскольку $det(\mathbb{C}) = det(\mathfrak{F}_s)$, где $\mathfrak{F}_s$ –индуцированные /см. I$_{7)}$, 2/ матрицы в соответствующих представлениях 2.I, 2.2, 2.3 для $\mathbb{C}(1.1)$. Невырожденность же характерных матриц ($\tilde{\omega}_k = \omega_k$) , $\tilde{\omega}_{k,\ell}$, $\tilde{\omega}_{k,k',k''}$ (также при $det(\mathbb{C}) \neq 0$) вытекает из следующих факторизаций индуцированных матриц $\mathfrak{F}_s$ при соответствующих условиях:

<u>Представление</u> $\mathfrak{F}_s$ (при условиях I$_{I)}$, I$_{2)}$, П)

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{C}_1^{k-1}] & & \\ & [\mathbb{E}_k] & \\ & & [\mathbb{C}_{k+1}^{m}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{E}_1^{k-1}] & & \\ & [\tilde{\omega}_k] & \\ & & [\mathbb{E}_{k+1}^{m}] \end{bmatrix} = \mathfrak{F}_k = \begin{bmatrix} [\mathbb{E}_1^{k-1}] & & \\ & [\tilde{\omega}_k] & \\ & & [\mathbb{E}_{k+1}^{m}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{C}_1^{k-1}] & & \\ & [\mathbb{E}_k] & \\ & & [\mathbb{C}_{k+1}^{m}] \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

<u>Представление</u> $\mathfrak{F}_{k,\ell}$ (при условиях Ш$_{I)}$, Ш$_{2)}$, У)

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{C}_1^{k-1}] & & & & \\ & [\mathbb{E}_k] & & & \\ & & [\mathbb{C}_{k+1}^{\ell-1}] & & \\ & & & [\mathbb{E}_\ell] & \\ & & & & [\mathbb{C}_{\ell+1}^{m}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{E}_1^{k-1}] & & \\ & \tilde{\omega}_{k,\ell} = \begin{bmatrix} [\mathbb{Q}_{kk}] & 0 & [\mathbb{R}_{k+1,\ell}] \\ 0 & [\mathbb{E}_{k+1}^{\ell-1}] & 0 \\ [\mathbb{P}_{\ell,k+1}] & 0 & [\mathbb{Q}_{\ell\ell}] \end{bmatrix} & \\ & & [\mathbb{E}_{\ell+1}^{m}] \end{bmatrix} = \mathfrak{F}_{k,\ell} = \begin{bmatrix} [\mathbb{E}_1^{k-1}] & & \\ & \begin{bmatrix} [\mathbb{Q}_{kk}] & 0 & [\mathbb{R}_{k+1,\ell}] \\ 0 & [\mathbb{E}_{k+1}^{\ell-1}] & 0 \\ [\mathbb{P}_{\ell,k+1}] & 0 & [\mathbb{Q}_{\ell\ell}] \end{bmatrix} = \tilde{\omega}_{k,\ell} & \\ & & [\;\;] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{C}_1^{k-1}] & & & & \\ & [\mathbb{E}_k] & & & \\ & & [\mathbb{C}_{k+1}^{\ell-1}] & & \\ & & & [\mathbb{E}_\ell] & \\ & & & & [\mathbb{C}_{\ell+1}^{m}] \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

<u>Представление</u> $\mathfrak{F}_{k,k',k''}$ (при условиях УП$_{I)}$, УП$_{2)}$, IX)

$$\begin{bmatrix} [\mathbb{C}_1^{k-2}] &&&&&& \\ & [\mathbb{E}_k] &&&&& \\ && [\mathbb{C}_{k+1}^{k'-2}] &&&& \\ &&& [\mathbb{E}_{k'}] &&& \\ &&&& [\mathbb{C}_{k'+1}^{k''-2}] && \\ &&&&& [\mathbb{E}_{k''}] & \\ &&&&&& [\mathbb{C}_{k''+1}^{m}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{E}_1^{k-2}] && \\ & \omega_{k,k',k''} = \begin{bmatrix} [Q_{kk}] & \mathbb{O} & [\mathbb{R}_{k+1k''}] && \\ \mathbb{O} & [\mathbb{E}_{k+1}^{k'-2}] & \mathbb{O} && \\ [\mathbb{P}_{k'k+1}] & \mathbb{O} & [Q_{k'k'}] & \mathbb{O} & [\mathbb{R}_{k'+1k''}] \\ && \mathbb{O} & [\mathbb{E}_{k'+1}^{k''-2}] & \mathbb{O} \\ && [\mathbb{P}_{k''k'+1}] & \mathbb{O} & [Q_{k''k''}] \end{bmatrix} & \\ && [\mathbb{E}_{k''+1}^{m}] \end{bmatrix} = \mathfrak{F}_{k,k',k''} = \begin{bmatrix} [\mathbb{E}_1^{k-2}] && \\ & \omega_{k,k',k''} = \begin{bmatrix} [Q_{kk}] & \mathbb{O} & [\mathbb{R}_{k+1k''}] && \\ \mathbb{O} & [\mathbb{E}_{k+1}^{k'-2}] & \mathbb{O} && \\ [\mathbb{P}_{k'k+1}] & \mathbb{O} & [Q_{k'k'}] & \mathbb{O} & [\mathbb{R}_{k'+1k''}] \\ && \mathbb{O} & [\mathbb{E}_{k'+1}^{k''-2}] & \mathbb{O} \\ && [\mathbb{P}_{k''k'+1}] & \mathbb{O} & [Q_{k''k''}] \end{bmatrix} & \\ && [\mathbb{E}_{k''+1}^{m}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbb{C}_1^{k-2}] &&&&&& \\ & [\mathbb{E}_k] &&&&& \\ && [\mathbb{C}_{k+1}^{k'-2}] &&&& \\ &&& [\mathbb{E}_{k'}] &&& \\ &&&& [\mathbb{C}_{k'+1}^{k''-2}] && \\ &&&&& [\mathbb{E}_{k''}] & \\ &&&&&& [\mathbb{C}_{k''+1}^{m}] \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Здесь явный вид $[\,Q\;, \mathbb{R}\;, \mathbb{P}\,]$ -матриц-блоков в (3.8)+(3.9) определён в (2.5) и (2.9) соответственно. Справедливость утверждения леммы 3.I установлена.

<u>Замечание 3.4</u>. Как следует из теоремы 2.3, если у матрицы $\mathbb{C}(1.1)$ более двух нулевых ведущих блочно-угловых минора, то невырожденные характерные матрицы ω_3 (см., например,(3.9)) обретают общий блочно-трёхдиагональный вид. При этом к ним (в свою очередь) применимы (см., например, /I$_{7)}$, 2/) все полученные выше результаты для $\mathbb{C}(1.1)$. Процесс полной факторизации $\mathbb{C}(1.1)$ конечен, как следует из теоремы 5/I$_{7)}$/, и осуществим всего за два шага.

<u>Замечание 3.5</u>. При получении представлений для матриц $\mathbb{C}(1.1)$ и $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ в этой работе мы исходили из возможных комбинаций вырожденности различных её усечённых подматриц. Однако формальный вид полученных представлений сохраняется, если заменить указанные условия вырожденности на условия плохой обусловленности соответствующих подматриц. На обосновании этого утверждения мы более подробно остановимся в следующей работе.

<u>Заключение</u>

В настоящей работе построены генераторы множества матрично-факторизованных представлений мультипликативного типа для блочно-трёхдиагональных матриц $\mathbb{C}$ общего вида (I.I) и аддитивно-мультипликативного типа для $(\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1})$ -им обратных матриц как при наличии различных комбинаций у них нулевых ведущих блочно-угловых миноров, так и при отсутствии последних.

Литература

1. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринты ОИЯИ: Р11-87-533. Дубна 1987; Р11-89-203. Дубна 1989; Р11-88-922. Дубна 1988; Р11-93-248. Дубна 1993; Р11-93-249. Дубна 1993; Р11-93-250. Дубна 1993; Р11-89-340. Дубна 1989. Р11-88-786. Дубна 1988.
2. Емельяненко Г.А. Блочно-трёхдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск 1992; ОИЯИ 11-92-4. Дубна 1992.
3. Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
13 июля 1993 года.