93-250

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-93-250

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов

ЕСТЕСТВЕННО-ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФАКТОРИЗАЦИИ БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА ПРИ НАЛИЧИИ НУЛЕВЫХ МИНОРОВ ОБОИХ ТИПОВ

1993

I. <u>Введение</u>. В настоящей работе изучаются проблемы построения естественно-элементарных /I÷3/ матрично-факторизованных представлений блочно-трёхдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}\,(1.1)$ на основе квазиобобщённых /4/ матричных процессов при наличии нулевых ведущих блочно-угловых миноров[x)] обоих типов.

Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad \text{(I.I)}$$

где

$\{q_j\}_{j=1}^{m}$ -диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а $\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ -под(над) диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{j-1} \quad q_j\}_{j=2}^{m}$.

Отметим, что в случае обращения в нуль ведущих верхних либо нижних блочно-угловых миноров невырожденных матриц $\mathbb{C}\,(1.1)$ в работе /4/ нами были введены квазиобобщённые матричные процессы -последовательности вида:

$$\begin{cases} \underline{\text{Если}}\ \ det(\Lambda_j) \neq 0 \ \text{ для всех } \ 2 \le j \le m+1, \ \underline{\text{то}}\ \Lambda_{j+1} = q_j - p_j \cdot \Lambda_j^{-1} \cdot r_j, \\ \Lambda_2 = q_1,\ det(q_1) \neq 0,\ j = 2, 3, \dots, m. \\ \begin{cases} \underline{\text{Если}}\ \ det(\Lambda_\mu) = 0 \ \text{ для любого } \mu \text{ из } (3 \le \mu \le m-1),\ \underline{\text{то}}\ \Lambda_{j+1} = q_j - p_j \cdot \Lambda_j^{-1} \cdot r_j, \\ \Lambda_2 = q_1, \quad j = 2, 3, \dots \mu-2, \mu-1; \\ \bar{\Lambda}_{\mu+1} = \begin{bmatrix} \Lambda_\mu & r_\mu \\ p_\mu & q_\mu \end{bmatrix},\ \Lambda_{\mu+2} = q_{\mu+1} - \bar{p}_{\mu+1} \bar{\Lambda}_{\mu+1}^{-1} \bar{r}_{\mu+1}, \text{где}^{xx)}\ \bar{p}_{\mu+1} = [0_{\mu+1,\mu-1}, p_{\mu+1}],\ \bar{r}_{\mu+1} = [0_{\mu-1,\mu+1}, r_{\mu+1}]^T, \\ det(\bar{\Lambda}_{\mu+1}) \neq 0 \ \ \underline{\text{и}}\ \ \bar{\Lambda}_{j+1} = q_j - p_j \cdot \bar{\Lambda}_j^{-1} \cdot r_j,\ j = \mu+2, \mu+3, \dots, m. \end{cases} \end{cases} \qquad \text{(I.2)}$$

---

x) Под ведущими $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{m}$-верхними и $\{\Delta_j^m\}_{j=1}^{m}$-нижними блочно-угловыми минорами $\mathbb{C}\,(1.1)$, как и в /I÷5/, понимаются определители ведущих усечённых подматриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

xx) Здесь и всюду далее 0_{ij} -тождественные нулевые прямоугольные матрицы, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_i, q_j\}$; T -знак транспонирования.

$$
\begin{cases}
\underline{\text{Если}}\ \ det(G_j)\neq 0\ \text{ для всех }\ 0\le j\le m-1,\ \underline{\text{то}}\ G_{j-1}=q_j-r_{j+1}\cdot G_j^{-1}\cdot p_{j+1},\\
G_{m-1}=q_m,\ det(q_m)\neq 0,\ j=m-1,\dots,1.\\
\begin{cases}
\underline{\text{Если}}\ \ det(G_\mu)=0\ \text{ для любого }\ \mu\ \text{ из }\ (2\le\mu\le m-2),\ \underline{\text{то}}\ G_{j-1}=q_j-r_{j+1}\cdot G_j^{-1}\cdot p_{j+1},\ G_{m-1}=q_m,\\
j=m-1,\dots,\mu-1;\\
\bar G_{\mu-1}=\begin{bmatrix} q_\mu & r_{\mu+1}\\ p_{\mu+1} & G_\mu\end{bmatrix},\ \bar G_{\mu-2}=q_{\mu-1}-\bar r_\mu\cdot\bar G_{\mu-1}^{-1}\cdot\bar p_\mu,\ \text{где}\ \bar r_\mu=[r_\mu,0_{\mu-1\,\mu+1}],\ \bar p_\mu=[p_\mu,0_{\mu+1\,\mu-1}]^T,\\
det(\bar G_{\mu-1})\neq 0\ \ \underline{\text{и}}\ \ \bar G_{j-1}=r_{j+1}\cdot\bar G_j^{-1}\cdot p_{j+1},\ j=\mu-2,\mu-3,\dots,1.
\end{cases}
\end{cases}
\qquad (I.3)
$$

На основе этих определений при условиях

I. $\begin{cases}\text{Если } \{[\Delta_1^{k-1}=0]\ \ \underline{\text{либо}}\ \ [\Delta_{k+1}^{m}=0]\}\text{ –равны нулю только по одному ми-}\\ \text{нору каждого типа, то } \{[det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1)\text{, но}\\ \{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1},\ \{det(\bar\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k+1}^{m+1}]\\ \underline{\text{либо}}\ \ [det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2)\text{, но } \{det(G_j)\neq 0\}_{j=k+1}^{m-1},\\ \{det(\bar G_j)\neq 0\}_{j=0}^{k}]\}\end{cases}$

были получены следующие матрично-факторизованные представления $\mathbb{C}$:

<u>Представление</u> I.I (при условии $I_{I)}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
 & - - - \\
 & (-\beta_{k-2})E_{k-2} \\
 & & (-\beta_{k-1})\begin{bmatrix}E_{k-1} & \\ 0_{kk-1} & E_k\end{bmatrix} \\
 & & & (-\bar\beta_{k+1})E_{k+1} \\
 & & & & (-\bar\beta_{k+2})E_{k+2} \\
 & & & & - - - \\
 & & & & & (-\bar\beta_m)E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
 & \Lambda_3 \\
 & & - - \\
 & & & \Lambda_{k-1} \\
 & & & & \begin{bmatrix}\Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{bmatrix} \\
 & & & & & \bar\Lambda_{k+2} \\
 & & & & & & \bar\Lambda_{k+3} \\
 & & & & & & & - - \\
 & & & & & & & & \bar\Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
 - - \\
 E_{k-2}(-c_{k-1}) \\
 & \begin{bmatrix}E_{k-1} & 0_{k-1k}\\ & E_k\end{bmatrix}(-\bar c_{k+1}) \\
 & & E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) \\
 & & - - \\
 & & E_{m-1}(-\bar c_m) \\
 & & & E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,\bar\Lambda)=\mathbb{C}
\qquad (I.4)
$$

, где

$$
\begin{cases}
\{\beta_{j+1}=-(p_{j+1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}),\ c_{j+1}=-(\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot r_{j+1})\}_{j=1}^{k-2},\ \{\bar\beta_{j+1}=-(p_{j+1}\cdot\bar\Lambda_{j+1}^{-1}),\ \bar c_{j+1}=-(\bar\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot r_{j+1})\}_{j=k+1}^{m-1},\\
[\bar\beta_{k+1}]=-[0_{k+1\,k-1},p_{k+1}]\cdot\begin{bmatrix}\Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{bmatrix}^{-1},\ [\bar c_{k+1}]=-\begin{bmatrix}\Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0_{k-1\,k+1}\\ r_{k+1}\end{bmatrix}.
\end{cases}
\qquad (I.5)
$$

При этом[x)] $det\begin{pmatrix}\Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0$. Последовательности матриц $\{\Lambda,\bar\Lambda\}$ –полностью определены в соответствии с (I.2).

[x)] Утверждения $det\begin{pmatrix}\Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0$ либо $det\begin{pmatrix}q_k & r_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{pmatrix}\neq 0$ являются прямым следствием леммы I0/$I_{2)}$/ о необращении в нуль одновременно двух последовательных однотипных ведущих блочных угловых миноров невырожденных матриц $\mathbb{C}$ (1.1).

Представление I.2 (при условии I_2)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\beta})_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & E_{k-2} & (-\hat{\bar{\beta}})_{k-1} & & & & \\ & & & E_{k-1} & [-\hat{\bar{\beta}}]_k & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_k & 0_{k\,k+1} \\ & E_{k+1} \end{bmatrix} & (\hat{\beta})_{k+2} & & \\ & & & & & E_{k+2} & (-\hat{\beta})_{k+3} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & E_{m-1} & (-\hat{\beta})_m \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & \bar{G}_{k-3} & & & & \\ & & & \bar{G}_{k-2} & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & & \\ & & & & & G_{k+1} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & G_{m-2} \\ & & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat{\bar{c}})_2 & E_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & (-\hat{\bar{c}})_{k-1} & E_{k-1} & & & \\ & & & [-\hat{\bar{c}}]_k & \begin{bmatrix} E_k & \\ 0_{k+1\,k} & E_{k+1} \end{bmatrix} & & \\ & & & & (-\hat{c})_{k+2} & E_{k+2} & \\ & & & & & (-\hat{c})_{k+3} & E_{k+3} \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & (-\hat{c})_m & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G,\bar{G}) = \mathbb{C} \tag{I.6}$$

, где

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \hat{c}_{j+1} = -(G_j^{-1} \cdot p_{j+1}),\ \hat{\beta}_{j+1} = -(r_{j+1} \cdot G_j^{-1}) \right\}_{j=m-1}^{k+1},\ \left\{ \hat{\bar{c}}_{j+1} = -(\bar{G}_j^{-1} \cdot p_{j+1}),\ \hat{\bar{\beta}}_{j+1} = -(r_{j+1} \cdot \bar{G}_j^{-1}) \right\}_{j=k-2}^{1}, \\ [\hat{\bar{\beta}}_k] = -[r_k, 0_{k-1\,k+1}] \cdot \begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1}, \quad [\hat{\bar{c}}_k] = -\begin{bmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_k \\ 0_{k+1\,k-1} \end{bmatrix}. \end{array} \right. \tag{I.7}$$

При этом $det\begin{pmatrix} q_k & r_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{pmatrix} \neq 0$. Последовательности матриц $\{G, \bar{G}\}$ полностью определены в соответствии с (I.3).

Далее в /4/ были получены [x)] матрично-факторизованные представления блочно-трёхдиагональных матриц $\mathbb{C}(1.1)$ при следующих комбинациях нулевых ведущих верхних <u>либо</u> нижних блочно-угловых миноров:

II. Если $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{l-1} = 0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m} = 0$ и $\Delta_{l+1}^{m} = 0]\}$ – равны нулю только по два отдалённых минора каждого типа, то

$$\left\{ \begin{array}{l} [det(\Lambda_k) = 0 \text{ и } det(\bar{\Lambda}_l) = 0 \text{ для любого } k \text{ фиксированного и любого } l \\ \text{из } (k+3 < l \leq m-1),\ \text{но } \{det(\Lambda_j) \neq 0\}_{j=1}^{k-1},\ \{det(\bar{\Lambda}_j) \neq 0\}_{j=k+1}^{l-1}, \\ \quad \{det(\bar{\bar{\Lambda}}_j) \neq 0\}_{j=l+1}^{m+1}]\ \underline{\text{либо}} \\ [det(G_k) = 0 \text{ и } det(G_l) = 0 \text{ для любого } k \text{ фиксированного и любого} \\ l \text{ из } (1 \leq l < k-3),\ \text{но } \{det(G_j) \neq 0\}_{j=k-1}^{m-1},\ \{det(\bar{G}_j) \neq 0\}_{j=l-1}^{k+1}, \\ \quad \{det(\bar{\bar{G}}_j) \neq 0\}_{j=0}^{l+1}]. \end{array} \right.$$

III. Если $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ и $\Delta_1^{k+1} = 0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m} = 0$ и $\Delta_{k+2}^{m} = 0]\}$ – равны нулю только по два соседних минора каждого типа, то

---

x) Здесь ограничимся лишь комбинацией нулевых миноров, при которых получены соответствующие представления $\mathbb{C}(1.1)$ в /4/.

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\bar{\Lambda})_{k+3}=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-4)\text{, но} \\ \{det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k-1} \text{ и } \{det(\bar{\Lambda}_j)\ne 0\}_{j=k+4}^{m+1}] \text{ \underline{либо}} \\ [det(G_k)=0 \text{ и } det(G_{k-3})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (5\le k\le m-2)\text{, но} \\ \{det(G_j)\ne 0\}_{j=k+1}^{m-1} \text{ и } \{det(\bar{G}_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-4}]. \end{cases}$$

IУ. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_i-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m}=0$ и $\Delta_{l_j+1}^{m}=0]\}$ – равно нулю любое конечное число отдалённых миноров каждого типа, то

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\bar{\Lambda}_{l_i})=0 \text{ для любых целых } l_1, l_2, \dots, l_n \text{ таких,} \\ \text{что } (k< l_1 < l_i) \text{ и } (l_{i-1}+3 < l_i) \text{, где } i=1,2,\dots,n-1] \text{ \underline{либо}} \\ [det(G_k)=0 \text{ и } det(\bar{G}_{l_j})=0 \text{ для любых целых } l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 \text{ таких,} \\ \text{что } (k> l_n > l_j) \text{ и } (l_{j+1}-3 > l_j) \text{, где } j=n-1,n-2,\dots,1]. \end{cases}$$

У. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_i-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m}=0$ и $\Delta_{l_j+1}^{m}=0]\}$ – равно нулю любое конечное число соседних миноров каждого типа, то

$$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\bar{\Lambda}_{l_i})=0 \text{ для всех целых } l_1, l_2, \dots, l_n \text{ таких, что} \\ (k< l_1 < l_i) \text{ и } (l_{i-1}+3 = l_i) \text{, где } i=1,2,\dots,n-1] \text{ \underline{либо}} \\ [det(G_k)=0 \text{ и } det(\bar{G}_{l_j})=0 \text{ для всех целых } l_n, l_{n-1}, \dots, l_1 \text{ таких,} \\ \text{что } (k> l_n > l_j) \text{ и } (l_{j+1}-3 = l_j) \text{, где } j=n-1,n-2,\dots,1]. \end{cases}$$

2. <u>Квазиобобщённые матричные процессы и естественно-элементарные матрично-факторизованные представления блочно-трёхдиагональных матриц общего вида при наличии нулевых миноров обоих типов</u>

В работе /4/ нами были получены матрично-факторизованные представления блочно-трёхдиагональных матриц общего вида $C(1.1)$ при различных комбинациях <u>однотипных</u> (верхних либо нижних) нулевых ведущих блочно-угловых миноров.

В этом же параграфе настоящей работы будут построены новые матрично-факторизованные представления $C(1.1)$ (и изучены их свойства) при различных комбинациях нулевых ведущих блочно-угловых миноров <u>обоих</u> типов (верхних и нижних), т.е. при следующих условиях:

Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ <u>и</u> $\Delta_k^{m}=0]\}$ – равны нулю одновременно только по одному минору обоих типов, то

УI. $$\begin{cases} [det(\Lambda_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-1)\text{, но } \{det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k-1}, \\ \{det(\bar{\Lambda}_j)\ne 0\}_{j=k+1}^{m+1}] \text{ \underline{и}} \\ [det(G_{k-1})=0 \text{ для того же } k \text{, но } \{det(G_j)\ne 0\}_{j=k}^{m-1}, \{det(\bar{G}_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-2}]. \end{cases}$$

Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{l-1}]$ <u>и</u> $[\Delta_k^{m}=0=\Delta_l^{m}]\}$ – равны нулю одновременно только по два отдалённых минора обоих типов, то

УП. $\left\{\begin{array}{l} [\det(\Lambda_k)=0 \text{ и } \det(\bar\Lambda_\ell)=0 \text{ для любого } k \text{ фиксированного и любого } \ell \text{ из } (k+3<\ell\le m), \\ \text{но } \{\det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k-1},\ \{\det(\bar\Lambda_j)\ne 0\}_{j=k+1}^{\ell-1},\ \{\det(\bar{\bar\Lambda}_j)\ne 0\}_{j=\ell+1}^{m+1}] \ \underline{\text{и}} \\ [\det(\bar G_{k-1})=0 \text{ и } \det(G_{\ell-1})=0 \text{ для тех же } k \text{ и } \ell, \text{но } \{\det(G_j)\ne 0\}_{j=\ell}^{m-1}, \\ \{\det(\bar G_j)\ne 0\}_{j=k}^{\ell-2},\ \{\det(\bar{\bar G}_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-2}]. \end{array}\right.$

Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0=\Delta_1^{k+2}]$ <u>и</u> $[\Delta_k^m=0=\Delta_{k+1}^m]\}$ –равны нулю одновременно только по два соседних минора обоих типов, то

УШ. $\left\{\begin{array}{l} [\det(\Lambda_k)=0 \text{ и } \det(\bar\Lambda_{k+3})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-4), \text{ но} \\ \{\det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-1},\ \{\det(\bar{\bar\Lambda}_j)\ne 0\}_{j=k+4}^{m+1}] \\ \underline{\text{и}}\ [\det(\bar G_{k-1})=0 \text{ и } \det(G_{k+2})=0 \text{ для того же } k, \text{ но } \{\det(G_j)\ne 0\}_{j=k+3}^{m-1}, \\ \{\det(\bar G_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-2}]. \end{array}\right.$

По сути часть из приводимых ниже представлений $\mathbb{C}(1.1)$ учитывает явным образом информацию об элементах ($\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$) –матрицы,обратной к $\mathbb{C}(1.1)$,при наличии у неё нулевых ведущих блочно-угловых миноров. Поэтому эти представления являются естественным обобщением ранее полученных нами аналогичных представлений для $\mathbb{C}(1.1)$, в частности, когда ни один из указанных миноров не обращается в нуль.

Итак, имеет место следующая

<u>Теорема 2.I</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{r_j,p_j\}_{j=2}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также равны нулю одновременно только по одному ведущему блочно-угловому минору обоих типов у $\mathbb{C}(1.1)$, т.е. для последовательностей матриц $\{\Lambda,\bar\Lambda\}$ (I.2) и $\{G,\bar G\}$ (I.3) выполняется условия УI. Тогда для $\mathbb{C}(1.1)$ имеют место следующие единственные матрично-факторизованные представления:

<u>Представление 2.I</u> (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta)_2 & E_2 \\ & \ddots & \ddots \\ && (-\beta)_{k-2} & E_{k-2} \\ &&& (-\beta)_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} & (-\hat\beta)_{k+1} \\ &&&&& E_{k+1} & (-\hat\beta)_{k+2} \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&&& E_{m-1} & (-\hat\beta)_m \\ &&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ & \Lambda_3 \\ && \ddots \\ &&& \Lambda_{k-1} \\ &&&& \begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & G_{k+1} \end{bmatrix} \\ &&&&& G_k \\ &&&&&& \ddots \\ &&&&&&& G_{m-2} \\ &&&&&&&& G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-C)_2 \\ & \ddots & \ddots \\ && E_{k-3} & (-C)_{k-2} \\ &&& E_{k-2} & (-C)_{k-1} \\ &&&& \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\ &&&& (-\hat C)_{k+1} & E_{k+1} \\ &&&&& (-\hat C)_{k+2} & E_{k+2} \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&&& (-\hat C)_m & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G)=\mathbb{C} \tag{2.I}$$

, где

$$\begin{cases} \{\beta_{j+1}=-(p_{j+1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}),\ c_{j+1}=-(\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\}_{j=1}^{k-2},\ \Lambda_{j+1}=q_j-p_j\cdot\Lambda_j^{-1}\cdot z_j,\ \Lambda_1=q_1,\ j=1,2,\dots,k-2, \\ \{\hat\beta_{j+1}=-(z_{j+1}\cdot G_j^{-1}),\ \hat c_{j+1}=-(G_j^{-1}\cdot p_{j+1})\}_{j=k}^{m-1},\ G_{j-1}=q_j-z_{j+1}G_j^{-1}p_{j+1},\ G_{m-1}=q_m,\ j=m-1,\dots,k+1.\end{cases} \quad (2.2)$$

Либо эквивалентное ему

Представление 2.2 (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (-\beta)_2 & E_2 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & (-\beta)_{k-2} & E_{k-2} & & & & \\ & & & (-\beta)_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} & (-\hat\beta)_{k+1} & & \\ & & & & & E_{k+1} & (-\hat\beta)_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & E_{m-1} & (-\hat\beta)_m \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}(z_2\hat c_2=\hat\beta_2 p_2)] & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & [B_{k-3,k-3}^{-1}-(z_{k-2}\cdot\hat c_{k-2}=\hat\beta_{k-2}\cdot p_{k-2})] & & & & \\ & & & [B_{k-2,k-2}^{-1}-(\bar z_{k-1}\cdot[\hat c]_{k-1}=[\hat\beta]_{k-1}\cdot p_{k-1})] & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & & \\ & & & & & [B_{k+1,k+1}^{-1}-([\beta]_{k+1}\bar z_{k+1}=\bar p_{k+1}[c]_{k+1})] & \\ & & & & & & [B_{k+2,k+2}^{-1}-(\beta_{k+2}\cdot z_{k+2}=p_{k+2}\cdot c_{k+2})] \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & [B_{mm}^{-1}-(\beta_m\cdot z_m=p_m\cdot c_m)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c)_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & E_{k-3} & (-c)_{k-2} & & & \\ & & & E_{k-2} & (-c)_{k-1} & & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} & & \\ & & & & (-\hat c)_{k+1} & E_{k+1} & \\ & & & & & (-\hat c)_{k+2} & E_{k+2} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & (-\hat c)_m & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G). \quad (2.3)$$

А также эквивалентные представлениям I.2 и I.3 соответственно

Представление 2.3 (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\beta)_2 & E_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & (-\beta)_{k-2} & E_{k-2} & & & \\ & & & (-\beta)_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} & & \\ & & & & [-\bar\beta]_{k+1} & E_{k+1} & \\ & & & & & (-\hat\beta)_{k+2} & E_{k+2} \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & (-\hat\beta)_m & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}-(z_2\cdot\hat c_2=\hat\beta_2\cdot p_2)] & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & [B_{k-3,k-3}^{-1}-(z_{k-2}\cdot\hat c_{k-2}=\hat\beta_{k-2}\cdot p_{k-2})] & & & \\ & & & [B_{k-2,k-2}^{-1}-(\bar z_{k-1}\cdot[\hat c]_{k-1}=[\hat\beta]_{k-1}\cdot\bar p_{k-1})] & & \\ & & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} & \\ & & & & & [B_{k+1,k+1}^{-1}-(z_{k+2}\cdot\hat c_{k+2}=\hat\beta_{k+2}\cdot p_{k+2})] \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & [B_{m-1,m-1}^{-1}-(z_m\cdot\hat c_m=\hat\beta_m\cdot p_m)] \\ & & & & & [B_{mm}^{-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c)_2 & & & & \\ & E_2 & (-c)_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & E_{k-2} & (-c)_{k-1} & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} & [-\bar c]_{k+1} \\ & & & & & E_{k+1} & (-\bar c)_{k+2} \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & E_{m-1} & (-\bar c)_m \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G), \quad (2.4)$$

Представление 2.4 (при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta)_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & E_{k-3} & (-\hat\beta)_{k-2} & & & \\ & & & E_{k-2} & [-\bar\beta]_{k-1} & & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} & (-\hat\beta)_{k+1} & \\ & & & & & E_{k+1} & (-\hat\beta)_{k+2} \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & E_{m-1} & (-\hat\beta)_m \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}] & & & & & & \\ & [B_{22}^{-1}-(\beta_2\cdot z_2=p_2\cdot c_2)] & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & [B_{k-2,k-2}^{-1}-(\beta_{k-2}\cdot z_{k-2}=p_{k-2}\cdot c_{k-2})] & & & \\ & & & & \begin{bmatrix} q_{k-1} & z_k \\ p_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & & \\ & & & & & [B_{k+1,k+1}^{-1}-([\beta]_{k+1}\bar z_{k+1}=\bar p_{k+1}[c]_{k+1})] & \\ & & & & & & [B_{k+2,k+2}^{-1}-(\beta_{k+2}\cdot z_{k+2}=p_{k+2}\cdot c_{k+2})] \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & [B_{mm}^{-1}-(\beta_m\cdot z_m=p_m\cdot\bar c_m)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-c)_2 & E_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & \\ & & (-c)_{k-2} & E_{k-2} & & \\ & & & E[-\bar c]_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} & \\ & & & & (-\hat c)_{k+1} & E_{k+1} \\ & & & & & \ddots \\ & & & & (-\hat c)_m & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda,G). \quad (2.5)$$

Здесь, в (2.4) и (2.5), структурные матрицы $\{\beta_j, c_j\}_{j=2}^{k-1}$, $\{\bar\beta_j, [\bar\beta_{k+1}], \bar c_j, [\bar c_{k+1}]\}_{j=k+2}^{m}$, $\{\hat\beta_j, \hat c_j\}_{j=k+1}^{m}$, $\{\hat{\bar\beta}_j, [\hat{\bar\beta}]_{k-1}, \hat{\bar c}_j, [\hat{\bar c}]_{k-1}\}_{j=2}^{k-2}$ –определены в (I.5), (I.7) соответственно.

<u>При этом</u> матрицы B_{jj}^{-1}, в соответствии с $\{\Lambda, \bar\Lambda\}$ (I.2) и $\{G, \bar G\}$ (I.3), могут быть представлены любым из следующих способов:

$$B_{jj}^{-1} = \begin{cases} B_{jj}^{-1}(\Lambda, \bar G) = (\Lambda_{j+1} + \bar G_{j-1} - q_j), \; 1 \le j \le k-2; \; B_{jj}^{-1}(\bar\Lambda, G) = (\bar\Lambda_{j+1} + G_{j-1} - q_j), \; k+1 \le j \le m, \\ \begin{cases} B_{jj}^{-1}(\Lambda) = [\sum\limits_{\mu=j}^{k-2} \prod\limits_{i=j+1}^{\mu} c_i \cdot \Lambda_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod\limits_{i=j+1}^{\mu} \beta_i]^{-1} \longleftrightarrow [\Lambda_{j+1}^{-1} + c_{j+1} \cdot B_{j+1\,j+1}(\Lambda) \cdot \beta_{j+1}]^{-1}, \; B_{k-2\,k-2}^{-1}(\Lambda) = \Lambda_{k-1}, \; j = k-3, \dots, 1, \\ B_{jj}^{-1}(\bar\Lambda) = [\sum\limits_{\mu=j}^{m} \prod\limits_{i=j+1}^{\mu} \bar c_i \cdot \bar\Lambda_{\mu+1}^{-1} \cdot \prod\limits_{i=j+1}^{\mu} \bar\beta_i]^{-1} \longleftrightarrow [\bar\Lambda_{j+1}^{-1} + \bar c_{j+1} \cdot B_{j+1\,j+1}(\Lambda) \cdot \bar\beta_{j+1}]^{-1}, \; B_{mm}^{-1}(\bar\Lambda) = \bar\Lambda_{m+1}, \; j = m-1, \dots, k+1; \end{cases} \\ \begin{cases} B_{jj}^{-1}(G) = [\sum\limits_{\mu=k+1}^{j} \prod\limits_{i=\mu+1}^{j} \hat c_i \cdot G_{\mu-1}^{-1} \cdot \prod\limits_{i=\mu+1}^{j} \hat\beta_i]^{-1} \longleftrightarrow [G_{j-1}^{-1} + \hat c_j \cdot B_{j-1\,j-1}(G) \cdot \hat\beta_j]^{-1}, \; B_{k+1\,k+1}^{-1}(G) = G_k, \; j = k+2, \dots, m, \\ B_{jj}^{-1}(\bar G) = [\sum\limits_{\mu=1}^{j} \prod\limits_{i=\mu+1}^{j} \hat{\bar c}_i \cdot \bar G_{\mu-1}^{-1} \cdot \prod\limits_{i=\mu+1}^{j} \hat{\bar\beta}_i]^{-1} \longleftrightarrow [\bar G_{j-1}^{-1} + \hat{\bar c}_j \cdot B_{j-1\,j-1}(\bar G) \cdot \hat{\bar\beta}_j]^{-1}, \; B_{11}^{-1}(\bar G) = \bar G_0, \; j = 2, 3, \dots, k-2. \end{cases} \end{cases} \quad (2.6)$$

<u>Доказательство</u>. Сначала отметим, что если учесть для матриц B_{jj}^{-1} их выражения в виде $(2.6)_{I)}$, то из представления 2.2 получим представление 2.I, а из представления 2.3 и 2.4 получим представления I.I и I.2 соответственно. Справедливость представлений 2.I÷2.4, с учётом сказанного выше, проверяется путём перемножения факторизирующих матриц в (2.I)÷(2.5). При этом следуют учесть определения последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar\Lambda\}$ (I.2) и $\{G, \bar G\}$ (I.3) и определения матриц B_{jj}^{-1} $(2.6)_{I)}$. Различные представления для матриц B_{jj}^{-1} в виде (2.6) здесь нами постулированы (аналогично /5/ исходя из знания свойств обратных матриц $B = C^{-1}$. Справедливость представлений 2.I÷2.4 установлена.

<u>Следствие 2.I</u> (Теоремы 2.I). Если выполняются условия теоремы 2.I, то представления 2.2÷2.4 (и следовательно, представления 2.I; I.I; I.2 соответственно) могут быть записаны в виде

<u>Представления 2.2</u>$'$(2.I$'$)(при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k-2} & & & & & \\ \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_{k-2} & E_{k-1} & & & & \\ & & & & & E_k & \hat\xi_{k+1} & \dots & \hat\xi_m \\ & & & & & & E_{k+1} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overset{k-2}{C_1}(\Lambda) & & \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & G_{k-1} \end{bmatrix} & \\ & & \overset{m}{C}_{k+1}(G) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & \tau_1 & & & & & & \\ & E_2 & \tau_2 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & E_{k-2} & \tau_{k-2} & & & \\ & & & & E_{k-1} & & & \\ & & & & & E_k & & \\ & & & & & \hat\tau_{k+1} & E_{k+1} & \\ & & & & & & \hat\tau_{k+2} \;\; E_{k+2} & \\ & & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & & \hat\tau_m & E_m \end{bmatrix} = C(\Lambda, G),$$

$$\overset{k-2}{C_1}(\Lambda) = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (\beta)E_{22} & & & \\ & \ddots & & \\ & & (\beta)E_{k-2\,k-2} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1} - (z_2 \cdot \hat c_2 = \hat\beta_2 \cdot p_2)] & & \\ & \ddots & \\ & [B_{k-3\,k-3}^{-1} - (z_{k-2} \cdot \hat{\bar c}_{k-2} = \hat{\bar\beta}_{k-2} \cdot P_{k-2})] & \\ & & [B_{k-2\,k-2}^{-1} - (\bar z_{k-1} \cdot [\hat{\bar c}]_{k-1} = [\hat{\bar\beta}]_{k-1} \cdot \bar P_{k-1})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(-c)_{12} & & \\ & \ddots & \\ & E(-c)_{k-3\,k-2} & \\ & & E_{k-2} \end{bmatrix}$$

$$\overset{m}{C}_{k+1}(G) = \begin{bmatrix} E(-\hat\beta)_{k+1\,k+2} & & \\ & \ddots & \\ & & E(-\hat\beta)_{m-1\,m} \\ & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{k+1\,k+1}^{-1} - ([\bar\beta]_{k+1} \cdot \bar z_{k+1} = \bar P_{k+1} \cdot [\bar c]_{k+1})] & & \\ & [B_{k+2\,k+2}^{-1} - (\bar\beta_{k+2} \cdot z_{k+2} = p_{k+2} \cdot \bar c_{k+2})] & \\ & & \ddots \\ & & [B_{mm}^{-1} - (\bar\beta_m \cdot z_m = p_m \cdot \bar c_m)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ (\hat c)E_{k+2\,k+2} & & \\ & \ddots & \\ & (\hat c)E_{mm} & \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Представления 2.3′(I.I′)(при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k-2} & & & & & \\ \xi_1 & \ldots & \xi_{k-2} & & E_{k-1} & & & & \\ & & & & & E_k & & & \\ & & & & & [-\bar{\beta}]_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & & & (-\beta)_{k+2} & E_{k+2} & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & (-\beta)_m & E_m \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (\beta)_2 & E_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & (\beta)_{k-2} & E_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}\cdot(\hat{c}_2\hat{C}_2=\hat{\beta}_2 P_2)] & & \\ & [B_{k-3\,k-3}^{-1}\cdot(\hat{c}_{k-2}\hat{C}_{k-2}=\hat{\beta}_{k-2}P_{k-2})] & \\ & & [B_{k-2\,k-2}^{-1}\cdot(\hat{c}_{k-1}[\hat{C}]_{k-1}=[\hat{\beta}]_{k-1}\hat{P}_{k-1})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c)_2 & & \\ & \ddots & & \\ & & E_{k-3} & (-c)_{k-2} \\ & & & E_{k-2} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2}(\Lambda) \right.$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & q_k \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{bmatrix} [B_{k+1\,k+1}^{-1}\cdot(\hat{z}_{k+2}\hat{C}_{k+2}=\hat{\beta}_{k+2}P_{k+2})] & & \\ & [B_{m-1\,m-1}^{-1}\cdot(\hat{z}_m\hat{C}_m=\hat{\beta}_m P_m)] & \\ & & [B_{mm}^{-1}] \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} E_1 & \tau_1 & & & & & & \\ & E_2 & \tau_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & E_{k-2} & \tau_{k-2} & & & \\ & & & & E_{k-1} & & & \\ & & & & & E_k & [-\bar{c}]_{k+1} & \\ & & & & & & E_{k+1} & (-\bar{c})_{k+2} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_{m-1} & (-\bar{c})_m \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.8)$$

Представления 2.4′(I.2′)(при условии УI)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\beta})_2 & & & & & & & \\ & E_2 & (-\hat{\beta})_3 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k-3} & (-\hat{\beta})_{k-1} & & & & \\ & & & & E_{k-2} & [-\hat{\bar{\beta}}]_{k-1} & & & \\ & & & & & E_{k-1} & & & \\ & & & & & & E_k & \hat{\xi}_{k+1} \ldots \hat{\xi}_m & \\ & & & & & & & E_{k+1} & \\ & & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}] & & \\ & [B_{22}^{-1}(\beta_2 z_2 = P_2 c_2)] & \\ & & \ddots \\ & & & [B_{k-2\,k-2}^{-1}\cdot(\beta_{k-2} z_{k-2} = P_{k-2} c_{k-2})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{k-1} & z_k \\ P_k & G_{k-1} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ (\hat{c})_2 & E_2 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & (\hat{c})_{k-2} & E_{k-2} & & & & & \\ & & [\hat{c}]_{k-1} & E_{k-1} & & & & \\ & & & & E_k & & & \\ & & & & \hat{\tau}_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & \hat{\tau}_{k+2} & & E_{k+2} & \\ & & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & & \hat{\tau}_m & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C} \qquad (2.9)$$

$$\mathbb{C}_{k+1}^m(G) = \begin{bmatrix} E_{k+1} & (-\hat{\beta})_{k+2} & \\ & \ddots & \\ & E_{m-1} & (-\hat{\beta})_m \\ & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{k+1\,k+1}^{-1}\cdot([\beta]_{k+1} \bar{z}_{k+1} = \bar{P}_{k+1}[\bar{C}]_{k+1})] & & \\ & [B_{k+2\,k+2}^{-1}\cdot(\bar{\beta}_{k+2} z_{k+2} = P_{k+2}\bar{c}_{k+2})] & \\ & & \ddots \\ & & & [B_{mm}^{-1}\cdot(\bar{\beta}_m z_m = P_m c_m)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+1} & & \\ (\hat{c})_{k+2} & E_{k+2} & \\ & \ddots & \\ & (\hat{c})_m & E_m \end{bmatrix}.$$

Здесь $\left\{\xi_j = -\prod_{s=j+1}^{k-1}\beta_s\right\}_{j=1}^{k-2}$, $\left\{\tau_i = -\prod_{s=i+1}^{k-1} c_s\right\}_{i=1}^{k-2}$, $\left\{\hat{\xi}_j = -\prod_{s=k+1}^{j}\hat{\beta}_s\right\}_{j=k+1}^{m}$, $\left\{\hat{\tau}_i = -\prod_{s=k+1}^{i}\hat{c}_s\right\}_{i=k+1}^{m}$,
а $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+1}^m$ есть ведущие усечённые (т.е. уменьшенной размерности) блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида

$$\mathbb{C}_1^{k-1} = \begin{bmatrix} q_1 & z_2 & & \\ P_2 & q_2 & z_3 & \\ & & \ddots & \\ & & P_{k-1} & q_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad \mathbb{C}_{k+1}^m = \begin{bmatrix} q_{k+1} & z_{k+2} & & \\ P_{k+2} & q_{k+2} & z_{k+3} & \\ & & \ddots & \\ & & P_m & q_m \end{bmatrix}.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.2. Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_s, P_s\}_{s=2}^m$ и квадратными блоками $\{q_s\}_{s=1}^m$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также равны нулю одновременно только по два отдалённых (либо равны нулю одновременно только по два соседних) ведущих блочно-угловых минора обоих типов у $\mathbb{C}(1.1)$ т.е. для последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (I.2) и $\{G, \bar{G}\}$ (I.3) выполняется одно из условий УП, УШ. Тогда для $\mathbb{C}(1.1)$ имеют место следующие естественные матрично-факторизованные представления:

Представление 2.5 (при условии УП)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & (-\beta_{k-2}) & E_{k-2} \\ & & & (-\beta_{k-1}) \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ \mathbf{0}_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\ & & & [-\bar{\beta}_{k+1}]\ E_{k+1} \\ & & & (-\bar{\beta}_{k+2})\ E_{k+2} \\ & & & \ddots \\ & & & (-\bar{\beta}_{l-2})\ E_{l-2} \\ & & & (-\bar{\beta}_{l-1}) \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ \mathbf{0}_{l,l-1} & E_l \end{bmatrix} (-\hat{\beta}_{l+1}) \\ & & & E_{l+1}\ (-\hat{\beta}_{l+2}) \\ & & & \ddots \\ & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & \\ & \Lambda_3 & \\ & & \ddots \\ & & \Lambda_{k-1} \\ & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\ & & \bar{\Lambda}_{k+2} \\ & & \bar{\Lambda}_{k+3} \\ & & \ddots \\ & & \bar{\Lambda}_{l-1} \\ & & \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_l & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix} \\ & & G_l \\ & & \ddots \\ & & G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1\ (-c_2) & & \\ & \ddots & \\ & E_{k-2}\ (-c_{k-1}) & \\ & \begin{bmatrix} E & \mathbf{0}_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} [-\bar{c}_{k+1}] & \\ & E_{k+1}\ (-\bar{c}_{k+2}) & \\ & E_{k+2}\ (-\bar{c}_{k+3}) & \\ & \ddots & \\ & E_{l-2}\ (-\bar{c}_{l-1}) & \\ & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \mathbf{0}_{l-1,l} \\ & E_l \end{bmatrix} & \\ & (-\hat{c}_{l+1})\ E_{l+1} & \\ & \ddots & \\ & (-\hat{c}_m)\ E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.10)$$

,

Представление 2.6 (при условии УП)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (-\beta_2) & E_2 & \\ & \ddots & \\ & (-\beta_{k-1})\ E_{k-1} & \\ & (-\beta_{k+1}) \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ \mathbf{0}_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} (-\hat{\beta}_{k+1}) & \\ & E_{k+1}\ (-\hat{\beta}_{k+2}) & \\ & \ddots & \\ & E_{l-3}\ (-\hat{\beta}_{l-2}) & \\ & E_{l-2}\ [-\hat{\beta}_{l-1}] & \\ & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \mathbf{0}_{l-1,l} \\ & E_l \end{bmatrix} (-\hat{\beta}_{l+1}) & \\ & E_{l+1}\ (-\hat{\beta}_{l+2}) & \\ & \ddots & \\ & E_{m-1}\ (-\hat{\beta}_m) & \\ & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & \\ & \Lambda_3 & \\ & \ddots & \\ & \Lambda_{k-1} & \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{G}_{k+1} \end{bmatrix} & \\ & \bar{G}_k & \\ & \ddots & \\ & \bar{G}_{l-4} & \\ & \bar{G}_{l-3} & \\ & \begin{bmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix} & \\ & G_l & \\ & \ddots & \\ & G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1\ (-c_2) & & \\ & E_2\ (-c_3) & \\ & \ddots & \\ & E_{k-2}\ (-c_{k-1}) & \\ & \begin{bmatrix} E & \mathbf{0}_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} & \\ & (-\hat{c}_{k+1})\ E_{k+1} & \\ & (-\hat{c}_{k+2})\ E_{k+2} & \\ & \ddots & \\ & (-\hat{c}_{l-2})\ E_{l-2} & \\ & [-\hat{c}_{l-1}] \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ \mathbf{0}_{l,l-1} & E_l \end{bmatrix} & \\ & (-\hat{c}_{l+1})\ E_{l+1} & \\ & \ddots & \\ & (-\hat{c}_m)\ E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.11)$$

, где

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \beta_{j+1} = -(p_{j+1} \cdot \Lambda_{j+1}^{-1}),\ c_{j+1} = -(\Lambda_{j+1}^{-1} \cdot z_{j+1}) \right\}_{j=1}^{k-2},\ \left\{ \bar{\beta}_{j+1} = -(p_{j+1} \cdot \bar{\Lambda}_{j+1}^{-1}),\ \bar{c}_{j+1} = -(\bar{\Lambda}_{j+1}^{-1} \cdot z_{j+1}) \right\}_{j=k+1}^{l-2},\ \{\hat{\beta}_{j+1} = -(z_{j+1} \cdot G_j^{-1}), \\ \hat{c}_{j+1} = -(G_j^{-1} \cdot p_{j+1}) \}_{j=l}^{m-1},\ \{ \hat{\bar{\beta}}_{j+1} = -(z_{j+1} \cdot \bar{G}_j^{-1}),\ \hat{\bar{c}}_{j+1} = -(\bar{G}_j^{-1} \cdot p_{j+1}) \}_{j=k}^{l-3},\ [\bar{\beta}_{k+1}] = -[\mathbf{0}_{k+1,k-1}, p_{k+1}] \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1}, \qquad (2.12) \\ [\bar{c}_{k+1}] = \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{k-1,k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix},\ [\hat{\bar{\beta}}_{l-1}] = -[z_{l-1}, \mathbf{0}_{l-2,l}] \cdot \begin{bmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix}^{-1},\ [\hat{\bar{c}}_{l-1}] = -\begin{bmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_{l-1} \\ \mathbf{0}_{l,l-1} \end{bmatrix}. \text{ При этом } \left[\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{pmatrix} \neq 0; \right. \\ \left. \det\begin{pmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{pmatrix} \neq 0 \right] \longrightarrow \left[\det\begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_l & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{pmatrix} \neq 0; \det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & G_{k+1} \end{pmatrix} \neq 0 \text{ ,при } \det(\mathbb{C}) \neq 0 \right]. \end{array} \right.$$

Последовательности матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ и $\{G, \bar{G}\}$ –полностью определены в соответствии с (I.2) и (I.3).

Либо эквивалентные представлениям 2.5 и 2.6 соответственно

<u>Представление 2.7</u> (при условии УП)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & & & & & \\
(-\beta)_2 E_2 & & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & & \\
 & & (-\beta)_{k-2} E_{k-2} & & & & & & & & & \\
 & & & (-\beta)_{k-1} \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k\,k-1} & E_k \end{bmatrix} & & & & & & & & \\
 & & & & (-\bar{\beta})_{k+1} E_{k+1} & & & & & & & \\
 & & & & & (-\bar{\beta})_{k+2} E_{k+2} & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & (-\bar{\beta})_{l-2} E_{l-2} & & & & & \\
 & & & & & & & (-\bar{\beta})_{l-1} \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ 0_{l\,l-1} & E_l \end{bmatrix} (-\hat{\bar{\beta}})_{l+1} & & & & \\
 & & & & & & & & E_{l+1} (-\hat{\bar{\beta}})_{l+2} & & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & & E_{m-1} (-\hat{\bar{\beta}})_m & \\
 & & & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}(z_2 \cdot \hat{\bar{c}}_2 = \hat{\bar{\beta}}_2 \cdot p_2)] & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & [B^{-1}_{k-3\,k-3}(z_{k-2} \cdot \hat{\bar{c}}_{k-2} = \hat{\bar{\beta}}_{k-2} \cdot p_{k-2})] & & & & & & & \\
 & & & [B^{-1}_{k-2\,k-2}(\bar{z}_{k-1} \cdot [\hat{\bar{c}}]_{k-1} = [\hat{\bar{\beta}}]_{k-1} \cdot \bar{p}_{k-1})] & & & & & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} & & & & & \\
 & & & & & [B^{-1}_{k+1\,k+1}(z_{k+2} \cdot \hat{\bar{c}}_{k+2} = \hat{\bar{\beta}}_{k+2} \cdot p_{k+2})] & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & [B^{-1}_{l-3\,l-3}(z_{l-2} \cdot \hat{c}_{l-2} = \hat{\bar{\beta}}_{l-2} \cdot p_{l-2})] & & & \\
 & & & & & & & [B^{-1}_{l-2\,l-2}(\bar{z}_{l-1} \cdot [\hat{c}]_{l-1} = [\hat{\beta}]_{l-1} \cdot \bar{p}_{l-1})] & & \\
 & & & & & & & \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_l & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix} & & \\
 & & & & & & & & [B^{-1}_{l+1\,l+1}([\bar{\beta}]_{l+1} \cdot \bar{z}_{l+1} = \bar{p}_{l+1} \cdot [\bar{c}]_{l+1})] & \\
 & & & & & & & & [B^{-1}_{l+2\,l+2}(\bar{\beta}_{l+2} \cdot z_{l+2} = p_{l+2} \cdot \bar{\bar{c}}_{l+2})] & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & [B^{-1}_{mm}(\bar{\beta}_m \cdot z_m = p_m \cdot \bar{c}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 (-c)_2 & & & & & & & & & \\
 & E_2 (-c)_3 & & & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & E_{k-2} (-c)_{k-1} & & & & & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1\,k} \\ & E_k \end{bmatrix} (-\bar{c})_{k+1} & & & & & \\
 & & & & & E_{k+1} (-\bar{c})_{k+2} & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & E_{l-3} (-\bar{c})_{l-2} & & & \\
 & & & & & & E_{l-2} (-\bar{c})_{l-1} & & & \\
 & & & & & & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & 0_{l-1\,l} \\ & E_l \end{bmatrix} & & \\
 & & & & & & & (-\hat{c})_{l+1} E_{l+1} & & \\
 & & & & & & & & (-\hat{c})_{l+2} E_{l+2} & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & (-\hat{c})_m E_m
\end{bmatrix} = C, \qquad (2.13)
$$

<u>Представление 2.8</u> (при условии УП)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & & & & \\
(-\beta)_2 E_2 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & (-\beta)_{k-2} E_{k-2} & & & & & & & & \\
 & & & (-\beta)_{k-1} \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k\,k-1} & E_k \end{bmatrix} (-\hat{\bar{\beta}})_{k+1} & & & & & & & \\
 & & & & E_{k+1} (-\hat{\bar{\beta}})_{k+2} & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & E_{l-3} (-\hat{\bar{\beta}})_{l-2} & & & & & \\
 & & & & & & E_{l-2} [-\hat{\bar{\beta}}]_{l-1} & & & & \\
 & & & & & & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & 0_{l-1\,l} \\ & E_l \end{bmatrix} (-\hat{\beta})_{l+1} & & & \\
 & & & & & & & & E_{l+1} (-\hat{\beta})_{l+2} & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & E_{m-1} (-\hat{\beta})_m & \\
 & & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}(z_2 \cdot \hat{\bar{c}}_2 = \hat{\bar{\beta}}_2 \cdot p_2)] & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & [B^{-1}_{k-3\,k-3}(z_{k-2} \cdot \hat{\bar{c}}_{k-2} = \hat{\bar{\beta}}_{k-2} \cdot p_{k-2})] & & & & & & & \\
 & & & [B^{-1}_{k-2\,k-2}(\bar{z}_{k-1} \cdot [\hat{\bar{c}}]_{k-1} = [\hat{\bar{\beta}}]_{k-1} \cdot \bar{p}_{k-1})] & & & & & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{G}_{k-1} \end{bmatrix} & & & & & \\
 & & & & & [B^{-1}_{k+1\,k+1}([\bar{\beta}]_{k+1} \cdot \bar{z}_{k+1} = \bar{p}_{k+1} \cdot [\bar{c}]_{k+1})] & & & & \\
 & & & & & [B^{-1}_{k+2\,k+2}(\bar{\beta}_{k+2} \cdot z_{k+2} = p_{k+2} \cdot \bar{c}_{k+2})] & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & \\
 & & & & & & [B^{-1}_{l-2\,l-2}(\bar{\beta}_{l-2} \cdot z_{l-2} = p_{l-2} \cdot \bar{c}_{l-2})] & & & \\
 & & & & & & & \begin{bmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix} & & \\
 & & & & & & & & [B^{-1}_{l+1\,l+1}([\bar{\beta}]_{l+1} \cdot \bar{z}_{l+1} = \bar{p}_{l+1} \cdot [\bar{c}]_{l+1})] & \\
 & & & & & & & & [B^{-1}_{l+2\,l+2}(\bar{\beta}_{l+2} \cdot z_{l+2} = p_{l+2} \cdot \bar{\bar{c}}_{l+2})] & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & [B^{-1}_{mm}(\bar{\beta}_m \cdot z_m = p_m \cdot \bar{\bar{c}}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 (-c)_2 & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & \\
 & & E_{k-2} (-c)_{k-1} & & & & & & \\
 & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1\,k} \\ & E_k \end{bmatrix} & & & & & \\
 & & & (-\hat{\bar{c}})_{k+1} E_{k+1} & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & (-\hat{\bar{c}})_{l-2} E_{l-2} & & & & \\
 & & & & & (-\hat{\bar{c}})_{l-1} \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ 0_{l\,l-1} & E_l \end{bmatrix} & & & \\
 & & & & & & (-\hat{c})_{l+1} E_{l+1} & & \\
 & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & (-\hat{c})_m E_m
\end{bmatrix} = C. \qquad (2.14)
$$

А также эквивалентные представлениям 2.3 и 2.4(из /4/) соответственно

<u>Представление 2.9</u> (при условии УП)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta)_{2}E_{1} \\
\cdots \\
(-\beta)_{k-1}E_{k-2} \\
(-\beta)_{k-1}\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\
E[-\bar\beta]_{k+1}E_{k+1} \\
(-\bar\beta)_{k+2}E_{k+2} \\
\cdots \\
(-\bar\beta)_{l-2}E_{l-2} \\
(-\bar\beta)_{l-1}\begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ 0_{l,l-1} & E_l \end{bmatrix} \\
E[-\bar{\bar\beta}]_{l+1}E_{l+1} \\
(-\bar{\bar\beta})_{l+2}E_{l+2} \\
\cdots \\
(-\bar{\bar\beta})_{m}E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}-(z_2\cdot\hat{\bar{\bar c}}_2=\hat{\bar{\bar\beta}}_2\cdot p_2)] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{k-3,k-3}-(z_{k-2}\cdot\hat{\bar{\bar c}}_{k-2}=\hat{\bar{\bar\beta}}_{k-2}\cdot p_{k-2})] \\
[B^{-1}_{k-2,k-2}-(z_{k-1}\cdot[\hat{\bar{\bar c}}]_{k-1}=[\hat{\bar{\bar\beta}}]_{k-1}\cdot p_{k-1})] \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+1,k+1}-(z_{k+2}\cdot\hat{\bar c}_{k+2}=\hat{\bar\beta}_{k+2}\cdot p_{k+2})] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{l-3,l-3}-(z_{l-2}\cdot\hat{\bar c}_{l-2}=\hat{\bar\beta}_{l-2}\cdot p_{l-2})] \\
[B^{-1}_{l-2,l-2}-(\bar z_{l-1}\cdot[\hat{\bar c}]_{l-1}=[\hat{\bar\beta}]_{l-1}\cdot\bar p_{l-1})] \\
\begin{bmatrix} \bar\Lambda_l & z_l \\ p_l & q_l \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{l+1,l+1}-(z_{l+2}\cdot\hat c_{l+2}=\hat\beta_{l+2}\cdot p_{l+2})] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{m-1,m-1}-(z_m\cdot\hat c_m=\hat\beta_m\cdot p_m)] \\
[B^{-1}_{mm}]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c)_2 \\
\cdots \\
E_{k-2}(-c)_{k-1} \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix}[-\bar c]_{k+1} \\
E_{k+1}(-\bar c)_{k+2} \\
\cdots \\
E_{l-2}(-\bar c)_{l-1} \\
\begin{bmatrix} E_{l-1} & 0_{l-1,l} \\ & E_l \end{bmatrix}[-\bar{\bar c}]_{l+1} \\
E_{l+1}(-\bar{\bar c})_{l+2} \\
\cdots \\
E_{m-1}(-\bar{\bar c})_m \\
E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.15)
$$

<u>Представление 2.10</u> (при условии УП)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\bar{\bar\beta}})_2 \\
\cdots \\
E_{k-3}(-\hat{\bar{\bar\beta}})_{k-2} \\
E_{k-2}[-\hat{\bar{\bar\beta}}]_{k-1} \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix}(-\hat{\bar\beta})_{k+1} \\
E_{k+1}(-\hat{\bar\beta})_{k+2} \\
\cdots \\
E_{l-3}(-\hat{\bar\beta})_{l-2} \\
E_{l-2}[-\hat{\bar\beta}]_{l-1} \\
\begin{bmatrix} E_{l-1} & 0_{l-1,l} \\ & E_l \end{bmatrix}(-\hat\beta)_{l+1} \\
E_{l+1}(-\hat\beta)_{l+2} \\
\cdots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}] \\
[B^{-1}_{22}-(\beta_2\cdot z_2=p_2\cdot c_2)] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{k-2,k-2}-(\bar\beta_{k-2}\cdot z_{k-1}=p_{k-2}\cdot\bar c_{k-2})] \\
\begin{bmatrix} q_{k-1} & z_k \\ p_k & \bar G_{k-1} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+1,k+1}-([\bar\beta]_{k+1}\cdot z_{k+1}=p_{k+1}\cdot[\bar c]_{k+1})] \\
[B^{-1}_{k+2,k+2}-(\bar\beta_{k+2}\cdot z_{k+2}=p_{k+2}\cdot\bar c_{k+2})] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{l-2,l-2}-(\bar\beta_{l-2}\cdot z_{l-2}=p_{l-2}\cdot\bar c_{l-2})] \\
\begin{bmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{l+1,l+1}-([\bar{\bar\beta}]_{l+1}\cdot\bar z_{l+1}=\bar p_{l+1}\cdot[\bar{\bar c}]_{l+1})] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{mm}-(\bar{\bar\beta}_m\cdot z_m=p_m\cdot\bar{\bar c}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat{\bar{\bar c}})_1E_2 \\
(-\hat{\bar{\bar c}})_{k-2}E_{k-2} \\
[-\hat{\bar{\bar c}}]_{k-1}\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\
(-\hat{\bar c})_{k+1}E_{k+1} \\
\cdots \\
(-\hat{\bar c})_{l-2}E_{l-2} \\
[-\hat{\bar c}]_{l-1}\begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ 0_{l,l-1} & E_l \end{bmatrix} \\
(-\hat c)_{l+1}E_{l+1} \\
\cdots \\
(-\hat c)_m E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G). \qquad (2.16)
$$

Здесь соответствующие структурные матрицы $\{\beta,\bar\beta,\bar{\bar\beta},[\bar\beta],[\bar{\bar\beta}];$ $[c,\bar c,\bar{\bar c},[\bar c],[\bar{\bar c}]\}$ и $\{\hat\beta,\hat{\bar\beta},\hat{\bar{\bar\beta}},[\hat{\bar\beta}],[\hat{\bar{\bar\beta}}];\hat c,\hat{\bar c},\hat{\bar{\bar c}},[\hat{\bar c}],[\hat{\bar{\bar c}}]\}$ –определены в (2.I2). При этом матрицы B^{-1}_{33} как функции $[\{B^{-1}_{33}(\Lambda,\bar{\bar G}),B^{-1}_{33}(\Lambda),$ $B^{-1}_{33}(\bar{\bar G})\}^{k-2}_{3=1},\{B^{-1}_{33}(\bar\Lambda,\bar G),B^{-1}_{33}(\bar\Lambda),B^{-1}_{33}(\bar G)\}^{l-2}_{3=k+1},\{B^{-1}_{33}(\bar{\bar\Lambda},G),B^{-1}_{33}(\bar{\bar\Lambda}),B^{-1}_{33}(G)\}^{m}_{3=l+1}]$ соответственно могут быть представлены в виде (2.6). (2.I7)

Представление 2.II (при условии УШ)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta)_2 & E_2 \\
& \ddots & \ddots \\
& & (-\beta)_{k-2} & E_{k-2} \\
& & & (-\beta)_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\
& & & & [-\bar{\beta}]_{k+1} & E_{k+1} \\
& & & & & (-\beta)_{k+2} & \begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix} & (-\hat{\beta})_{k+4} \\
& & & & & & & E_{k+4} & (-\hat{\beta})_{k+5} \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & & E_{m-1} & (-\hat{\beta})_m \\
& & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
& \Lambda_3 \\
& & \ddots \\
& & & \Lambda_{k-1} \\
& & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\
& & & & & \bar{\Lambda}_{k+1} \\
& & & & & & \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k+3} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix} \\
& & & & & & & G_{k+3} \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E & (-c)_{1,2} \\
& \ddots & \ddots \\
& & E & (-c)_{k-2,k-1} \\
& & & \begin{bmatrix} E & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} & [-\bar{c}]_{k+1} \\
& & & & E & (-\bar{c})_{k+1,k+2} \\
& & & & & \begin{bmatrix} E & 0_{k+2,k+3} \\ & E_{k+1} \end{bmatrix} \\
& & & & & (-\hat{c})_{k+4} & E_{k+4} \\
& & & & & & (-\hat{c})_{k+5} & E_{k+5} \\
& & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & (-\hat{c})_m & E_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda, G), \tag{2.18}
$$

Представление 2.I2 (при условии УШ)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta)_2 & E_2 \\
& \ddots & \ddots \\
& & (-\beta)_{k-2} & E_{k-2} \\
& & & (-\beta)_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} & (-\hat{\beta})_{k+1} \\
& & & & & E & [-\hat{\bar{\beta}}]_{k+1,k+2} \\
& & & & & & \begin{bmatrix} E & 0_{k+2,k+3} \\ & E_{k+3} \end{bmatrix} & (-\hat{\beta})_{k+4} \\
& & & & & & & E & (-\hat{\beta})_{k+4,k+5} \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & & E & (-\hat{\beta})_{m-1,m} \\
& & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
& \Lambda_3 \\
& & \ddots \\
& & & \Lambda_{k-1} \\
& & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{G}_{k+1} \end{bmatrix} \\
& & & & & \bar{G}_k \\
& & & & & & \begin{bmatrix} q_{k+2} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix} \\
& & & & & & & G_{k+3} \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E & (-c)_{1,2} \\
& \ddots & \ddots \\
& & E & (c)_{k-2,k-1} \\
& & & \begin{bmatrix} E & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} \\
& & & (-\hat{\bar{c}})_{k+1} & E_{k+1} \\
& & & & [-\hat{c}]_{k+2} & \begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix} \\
& & & & & (\hat{c})_{k+4} & E_{k+4} \\
& & & & & & (-\hat{c})_{k+5} & E_{k+5} \\
& & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & (-\hat{c})_m & E_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda, G) \tag{2.19}
$$

, где

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left\{ \beta_{j+1} = -(p_{j+1} \cdot \Lambda_{j+1}^{-1}),\ c_{j+1} = -(\Lambda_{j+1}^{-1} \cdot z_{j+1}) \right\}_{j=1}^{k-2},\ [\bar{\beta}]_{k+1} = -[0_{k+1,k-1}, p_{k+1}] \cdot \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1},\ \bar{\beta}_{k+2} = -(p_{k+2} \cdot \Lambda_{k+2}^{-1}),\ \bar{c}_{k+2} = -(\bar{\Lambda}_{k+2}^{-1} \cdot z_{k+2}), \\[2ex]
[\bar{c}]_{k+1} = -\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0_{k-1,k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix},\ \left\{ \hat{\beta}_{j+1} = -(z_{j+1} \cdot G_j^{-1}),\ \hat{c}_{j+1} = -(G_j^{-1} \cdot p_{j+1}) \right\}_{j=k+3}^{m-1},\ \hat{\bar{\beta}}_{k+1} = (-z_{k+1} \cdot \bar{G}_k^{-1}),\ \hat{\bar{c}}_{k+1} = -(\bar{G}_k^{-1} \cdot p_{k+1}), \qquad (2.20) \\[2ex]
[\hat{\bar{\beta}}]_{k+2} = -[z_{k+2}, 0_{k+1,k+3}] \cdot \begin{bmatrix} q_{k+2} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix}^{-1},\ [\hat{c}]_{k+2} = -\begin{bmatrix} q_{k+2} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_{k+2} \\ 0_{k+3,k+1} \end{bmatrix}.
\end{array}
\right.
$$

При этом $\left[\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{pmatrix} \neq 0;\ \det\begin{pmatrix} q_{k+2} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{pmatrix} \neq 0 \right] \longrightarrow \left[\det\begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{k+3} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{pmatrix} \neq 0;\ \det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{G}_{k-1} \end{pmatrix} \neq 0 \right.$,при $\left. \det(\mathbb{C}) \neq 0 \right]$. Последовательности матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ и $\{G, \bar{G}\}$ –полностью определены в соответствии с (I.2) и (I.3).

Либо эквивалентные представлениям 2.II и 2.I2 соответственно

Представление 2.I3 (при условии УШ)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\,E_2 \\
\cdots \\
(-\beta_{k-2})\,E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix} \\
E[\bar{\beta}]_{k+1}\,E_{k+1} \\
(-\bar{\beta}_{k+2})\begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix}(-\hat{\beta}_{k+4}) \\
E_{k+4}\,(-\hat{\beta}_{k+5}) \\
\cdots \\
E_{m-1}\,(-\hat{\beta}_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}-(z_2\cdot\hat{\bar{c}}_2=\hat{\bar{\beta}}_2\cdot P_2)] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{k-3,k-3}-(z_{k-2}\cdot\hat{\bar{c}}_{k-2}=\hat{\bar{\beta}}_{k-2}\cdot P_{k-2})] \\
[B^{-1}_{k-2,k-2}-(\bar{z}_{k-1}\cdot[\hat{\bar{c}}]_{k-1}=[\hat{\bar{\beta}}]_{k-1}\cdot\bar{P}_{k-1})] \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & q_k \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+1,k+1}-(\tilde{z}_{k+2}\cdot[\hat{\bar{c}}]_{k+2}=[\hat{\bar{\beta}}]_{k+2}\cdot P_{k+2})] \\
\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k+3} & z_{k+3} \\ P_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+4,k+4}-([\bar{\bar{\beta}}]_{k+4}\cdot\bar{z}_{k+4}=\bar{P}_{k+4}\cdot[\bar{\bar{c}}]_{k+4})] \\
[B^{-1}_{k+5,k+5}-(\bar{\bar{\beta}}_{k+5}\cdot z_{k+5}=P_{k+5}\cdot\bar{\bar{c}}_{k+5})] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{mm}-(\bar{\bar{\beta}}_m\cdot z_m=P_m\cdot\bar{\bar{c}}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1\,(-c_2) \\
\cdots \\
E_{k-2}\,(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} E[\bar{c}]_{k+1} \\
E_{k+1}\,(-\bar{c}_{k+2}) \\
\begin{bmatrix} E_{k+2} & 0_{k+2,k+3} \\ & E_{k+3} \end{bmatrix} \\
(-\hat{c}_{k+4})\,E_{k+4} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{m-1})\,E_{m-1} \\
(-\hat{c}_m)\,E_m
\end{bmatrix}
= C(\Lambda, G), \qquad (2.2I)
$$

Представление 2.I4 (при условии УШ)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\,E_2 \\
\cdots \\
(-\beta_{k-2})\,E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k+1,k} & E_k \end{bmatrix}(-\hat{\beta}_{k+1}) \\
E_{k+1}[-\hat{\bar{\beta}}]_{k+2} \\
\begin{bmatrix} E_{k+2} & 0_{k+2,k+3} \\ & E_{k+3} \end{bmatrix}(-\hat{\beta}_{k+4}) \\
E_{k+4}\,(-\hat{\beta}_{k+5}) \\
\cdots \\
E_{m-1}\,(-\hat{\beta}_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}-(z_2\cdot\hat{\bar{c}}_2=\hat{\bar{\beta}}_2\cdot P_2)] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{k-3,k-3}-(z_{k-2}\cdot\hat{\bar{c}}_{k-2}=\hat{\bar{\beta}}_{k-2}\cdot P_{k-2})] \\
[B^{-1}_{k-2,k-2}-(\bar{z}_{k-1}\cdot[\hat{\bar{c}}]_{k-1}=[\hat{\bar{\beta}}]_{k-1}\cdot\bar{P}_{k-1})] \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & \bar{G}_{k-1} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+1,k+1}-([\bar{\beta}]_{k+1}\cdot\bar{z}_{k+1}=\bar{P}_{k+1}\cdot[\bar{c}]_{k+1})] \\
\begin{bmatrix} q_{k+2} & z_{k+3} \\ P_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+4,k+4}-([\bar{\bar{\beta}}]_{k+4}\cdot\bar{z}_{k+4}=\bar{P}_{k+4}\cdot[\bar{\bar{c}}]_{k+4})] \\
[B^{-1}_{k+5,k+5}-(\bar{\bar{\beta}}_{k+5}\cdot z_{k+5}=P_{k+5}\cdot\bar{\bar{c}}_{k+5})] \\
\cdots \\
[B^{-1}_{mm}-(\bar{\bar{\beta}}_m\cdot z_m=P_m\cdot\bar{\bar{c}}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1\,(-c_2) \\
\cdots \\
E_{k-2}\,(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} \\
(-\hat{\bar{c}}_{k+1})\,E_{k+1} \\
E[\hat{\bar{c}}]_{k+2}\begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix} \\
(-\hat{c}_{k+4})\,E_{k+4} \\
(-\hat{c}_{k+5})\,E_{k+5} \\
\cdots \\
(-\hat{c}_{m-1})\,E_{m-1} \\
(-\hat{c}_m)\,E_m
\end{bmatrix}
= C(\Lambda, G). \qquad (2.22)
$$

А также эквивалентные представлениям 2.5 и 2.6 (из /4/) соответственно

Представление 2.15 (при условии УШ)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\,E_2 \\
\text{— —} \\
(-\beta_{k-2})\,E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1}) \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\
[-\bar\beta]_{k+1}\,E_{k+1} \\
(-\bar\beta_{k+2}) \begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix} \\
[-\bar{\bar\beta}]_{k+4}\,E_{k+4} \\
(-\bar{\bar\beta}_{k+5})\,E_{k+5} \\
\text{— —} \\
(-\bar{\bar\beta}_m)\,E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}-(r_1\hat{\hat c}_1=\hat{\hat\beta}_2 p_2)] \\
\text{— — — —} \\
[B^{-1}_{k-3,k-3}-(r_{k-2}\hat{\hat c}_{k-2}=\hat{\hat\beta}_{k-2} p_{k-2})] \\
[B^{-1}_{k-2,k-2}-(r_{k-1}[\hat{\hat c}]_{k-1}=[\hat{\hat\beta}]_{k-1} p_{k-1})] \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+1,k+1}-(r_{k+2}[\hat{\bar c}]_{k+2}=[\hat{\bar\beta}]_{k+2} p_{k+2})] \\
\begin{bmatrix} \bar\Lambda_{k+3} & r_{k+3} \\ p_{k+3} & q_{k+3} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+4,k+4}-(r_{k+5}\hat c_{k+5}=\hat\beta_{k+5} p_{k+5})] \\
\text{— — —} \\
[B^{-1}_{m-1,m-1}-(r_m\hat c_m=\hat\beta_m p_m)] \\
[B^{-1}_{mm}]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
\text{— —} \\
E_{k-2}(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix}[-\bar c]_{k+1} \\
E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) \\
\begin{bmatrix} E_{k+2} & 0_{k+2,k+3} \\ & E_{k+3} \end{bmatrix}[-\bar{\bar c}]_{k+4} \\
E_{k+4}(-\bar{\bar c}_{k+5}) \\
\text{— —} \\
E_{m-1}(-\bar{\bar c}_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
=C(\Lambda,G), \qquad (2.23)
$$

Представление 2.16 (при условии УШ)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\bar{\bar\beta}}_2) \\
\text{— —} \\
E_{k-3}(-\hat{\bar\beta}_{k-2}) \\
E_{k-2}[-\hat{\bar\beta}]_{k-1} \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix}(\hat{\bar\beta})_{k+1} \\
E_{k+1}[-\hat{\bar\beta}]_{k+2} \\
\begin{bmatrix} E_{k+2} & 0_{k+2,k+3} \\ & E_{k+3} \end{bmatrix}(\hat\beta)_{k+4} \\
E_{k+4}(-\hat\beta_{k+5}) \\
\text{— —} \\
E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}] \\
[B^{-1}_{22}-(\beta_2 r_2=p_2 c_2)] \\
\text{— — —} \\
[B^{-1}_{k-2,k-2}-(\beta_{k-2} r_{k-2}=p_{k-2} c_{k-2})] \\
\begin{bmatrix} q_{k-1} & r_k \\ p_k & \bar G_{k-1} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+1,k+1}-([\bar\beta]_{k+1}\bar r_{k+1}=\bar p_{k+1}[\bar c]_{k+1})] \\
\begin{bmatrix} q_{k+2} & r_{k+3} \\ p_{k+3} & G_{k+2} \end{bmatrix} \\
[B^{-1}_{k+4,k+4}-([\bar{\bar\beta}]_{k+4}\bar r_{k+4}=\bar p_{k+4}[\bar{\bar c}]_{k+4})] \\
[B^{-1}_{k+5,k+5}-(\bar{\bar\beta}_{k+5} r_{k+5}=p_{k+5}\bar{\bar c}_{k+5})] \\
\text{— — — —} \\
[B^{-1}_{mm}-(\bar{\bar\beta}_m r_m=p_m\bar{\bar c}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat{\bar c}_2)E_2 \\
\text{— —} \\
(-\hat{\bar{\bar c}}_{k-2})E_{k-2} \\
[-\hat{\bar c}]_{k-1}\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\
(-\hat c_{k+1})E_{k+1} \\
[-\hat c]_{k+2}\begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix} \\
(-\hat c_{k+4})E_{k+4} \\
(-\hat c_{k+5})E_{k+5} \\
\text{— —} \\
(-\hat c_m)E_m
\end{bmatrix}
=C(\Lambda,G). \qquad (2.24)
$$

Здесь соответствующие структурные матрицы $\{\beta, \bar\beta, \bar{\bar\beta}, [\bar\beta], [\bar{\bar\beta}];\ c, \bar c, \bar{\bar c}, [\bar c], [\bar{\bar c}]\}$ и $\{\hat\beta, \hat{\bar\beta}, \hat{\bar{\bar\beta}}, [\hat{\bar\beta}], [\hat{\bar{\bar\beta}}];\ \hat c, \hat{\bar c}, \hat{\bar{\bar c}}, [\hat{\bar c}], [\hat{\bar{\bar c}}]\}$ –определены в (2.20). (2.25)

При этом матрицы B^{-1}_{jj} как функции $[\{B^{-1}_{jj}(\Lambda,\bar G), B^{-1}_{jj}(\Lambda), B^{-1}_{jj}(\bar G)\}_{j=1}^{k-2}, B^{-1}_{k+1,k+1}(\bar\Lambda,\bar G), B^{-1}_{k+1,k+1}(\bar\Lambda), B^{-1}_{k+1,k+1}(\bar G); \{B^{-1}_{jj}(\bar\Lambda,G), B^{-1}_{jj}(\bar\Lambda), B^{-1}_{jj}(G)\}_{j=k+4}^{m}]$ соответственно могут быть представлены в виде (2.6).

Доказательство. Справедливость представлений 2.5÷2.10 (при условии УП) и представлений 2.11÷2.16 (при условии УШ) проверяется путём пе-

ремножения факторизирующих матриц с учётом определения последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (I.2) и $\{G, \bar{G}\}$ (I.3). Утверждения, что
$\{[\det\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ P_k & q_k\end{pmatrix} \neq 0;\ \det\begin{pmatrix}q_{l-1} & z_l \\ P_l & G_{l-1}\end{pmatrix} \neq 0] \rightarrow [\det\begin{pmatrix}\bar{\Lambda}_l & z_l \\ P_l & G_{l-1}\end{pmatrix} \neq 0;\ \det\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ P_k & \bar{G}_{k-1}\end{pmatrix} \neq 0]$
при условии УП$\}$, а также утверждения, что $\{[\det\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ P_k & q_k\end{pmatrix} \neq 0;$
$\det\begin{pmatrix}q_{k+2} & z_{k+3} \\ P_{k+3} & G_{k+2}\end{pmatrix} \neq 0] \rightarrow [\det\begin{pmatrix}\bar{\Lambda}_{k+3} & z_{k+3} \\ P_{k+3} & G_{k+2}\end{pmatrix} \neq 0;\ \det\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ P_k & \bar{G}_{k-1}\end{pmatrix} \neq 0]$ при условии УШ$\}$ соответственно являются следствием необращения в нуль одновременно двух последовательных однотипных ведущих блочно-угловых миноров невырожденных блочно-трёхдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}(1.1)$. Справедливость представлений 2.5÷2.10 и 2.11÷2.16 установлена.

Следствие 2.2(Теоремы 2.2). Если выполняются условия УП теоремы 2.2, то представления 2.7÷2.10 (и следовательно, представления 2.5, 2.6, а также представления 2.3, 2.4(из /4/)) могут быть записаны в виде

Представление 2.7′ (2.5′)(при условии УП)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
& E_2 \\
&& \ddots \\
&&& E_{k-2} \\
&&& \xi_1 \ldots \xi_{k-2} \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_k & E_k \end{bmatrix} \\
&&&& [-\bar{\beta}]_{k+1} \; E_{k+1} \\
&&&&& (-\bar{\beta})_{k+2} \; E_{k+2} \\
&&&&&& \ddots \\
&&&&&&& (-\bar{\beta})_{l-2} \; E_{l-2} \\
&&&&&&& (-\bar{\beta})_{l-1} \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ 0_l & E_l \end{bmatrix} \hat{\xi}_{l+1} \ldots \hat{\xi}_m \\
&&&&&&&& E_{l+1} \\
&&&&&&&&& E_{l+2} \\
&&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&&& E_m
\end{bmatrix}
\times
$$

$$
\times
\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta)_2 E_2 \\
\ddots \\
(-\beta)_{k-1} E_{k-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11} - (z_2 \cdot \hat{\hat{C}}_2 = \hat{\hat{\beta}}_2 \cdot P_2)] \\
\ddots \\
[B^{-1}_{k-3\,k-3} - (z_{k-2} \cdot \hat{\hat{C}}_{k-2} = \hat{\hat{\beta}}_{k-2} \cdot P_{k-2})] \\
[B^{-1}_{k-2\,k-2} - (\bar{z}_{k-1} \cdot [\hat{\hat{C}}]_{k-1} = [\hat{\hat{\beta}}]_{k-1} \cdot \bar{P}_{k-1})]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 (-C)_2 \\
\ddots \\
E_{k-3} (-C)_{k-2} \\
E_{k-2}
\end{bmatrix}
= \overset{k-1}{\underset{1}{\mathbb{C}}}(A) \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ P_k & q_k \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{k+1\,k+1} - (z_{k+2} \cdot \hat{\hat{C}}_{k+2} = \hat{\hat{\beta}}_{k+2} \cdot P_{k+2})] \\
\ddots \\
[B^{-1}_{l-3\,l-3} - (z_{l-2} \cdot \hat{\hat{C}}_{l-2} = \hat{\hat{\beta}}_{l-2} \cdot P_{l-2})] \\
[B^{-1}_{l-2\,l-2} - (\bar{z}_{l-1} \cdot [\hat{C}]_{l-1} = [\hat{\beta}]_{l-1} \cdot P_{l-1})]
\end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_l & z_l \\ P_l & G_{l-1} \end{bmatrix} \\
\overset{m}{\underset{l+1}{\mathbb{C}}}(G) =
\begin{bmatrix}
E_{l+1} (-\hat{\beta})_{l+2} \\
\ddots \\
E_{m-1} (-\hat{\beta})_m \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{l+1\,l+1} - ([\bar{\beta}]_{l+1} \cdot \bar{z}_{l+1} = \bar{P}_{l+1} \cdot [\bar{C}]_{l+1})] \\
[B^{-1}_{l+2\,l+2} - (\bar{\bar{\beta}}_{l+2} \cdot z_{l+2} = P_{l+2} \cdot \bar{\bar{C}}_{l+2})] \\
\ddots \\
[B^{-1}_{mm} - (\bar{\bar{\beta}}_m \cdot z_m = P_m \cdot \bar{\bar{C}}_m)]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_{l+1} \\
(-\hat{C})_{l+2} E_{l+2} \\
\ddots \\
(-\hat{C})_m E_m
\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\times
\qquad (2.26)
$$

$$
\times
\begin{bmatrix}
E_1 & \mathcal{T}_1 \\
\ddots & \ddots \\
& E_{k-3} & \mathcal{T}_{k-3} \\
&& E_{k-2} & \mathcal{T}_{k-2} \\
&&& \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_k \\ & E_k \end{bmatrix} [-\bar{C}]_{k+1} \\
&&&& E_{k+1} (-\bar{C})_{k+2} \\
&&&&& E_{k+2} (-\bar{C})_{k+3} \\
&&&&&& \ddots
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(A, G)
$$

$$\begin{bmatrix} \bar{E}(-\bar{\tau})_{l-3\,l-2} & & & & & \\ & E_{l-2}(-\bar{\tau})_{l-1} & & & & \\ & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \mathbb{O}_{l} \\ & E_l \end{bmatrix} & & & \\ & & \hat{\tau}_{l+1} & E_{l+1} & & \\ & & & \hat{\tau}_{l+2} & E_{l+2} & \\ & & & & \bar{\hat{\tau}}_m & \bar{E}_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G),$$ где

$$\begin{cases} \left\{ \xi_i = -\prod\limits_{j=i+1}^{k-1} \beta_j \right\}_{j=1}^{k-2}, \ \left\{ \tau_i = -\prod\limits_{j=i+1}^{k-1} c_j \right\}_{i=1}^{k-2}, \\ \left\{ \hat{\xi}_j = -\prod\limits_{j=l+1}^{i} \hat{\beta}_j \right\}_{j=l+1}^{m}, \ \left\{ \hat{\tau}_i = -\prod\limits_{j=l+1}^{i} \hat{c}_j \right\}_{i=l+1}^{m}, \qquad (2.27) \end{cases}$$

а $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{l+1}^{m}$ – есть ведущие усечённые блочно-трехдиагональные подматрицы общего вида (I.I).

Представление 2.8′(2.6′)(при условии УII)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & & \\ & & & E_{k-2} & & & & & & \\ \xi_1 \ldots & \xi_{k-2} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ \mathbb{O}_k & E_k \end{bmatrix} & (\hat{\beta})_{k+1} & & & & & & \\ & & & E(\hat{\beta})_{k+1\,k+2} & & & & & & \\ & & & & \bar{E}(\hat{\beta})_{l-3\,l-2} & & & & & \\ & & & & E_{l-2}[\hat{\beta}]_{l-1} & & & & & \\ & & & & & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \mathbb{O}_l \\ & E_l \end{bmatrix} & \hat{\xi}_{l+1} \ldots \hat{\xi}_m & & & \\ & & & & & & E_{l+1} & & & \\ & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix}
\left[\begin{bmatrix} E_1 & & \\ (\cdot\beta)_2 E_2 & & \\ & (\cdot\beta)_{k-1} E_{k-1} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1} - (z_2 \hat{c}_2 = \hat{\beta}_2 p_2)] & & \\ & [B_{k-3\,k-3}^{-1} - (z_{k-2} \hat{c}_{k-2} = \hat{\beta}_{k-2} p_{k-2})] & \\ & & [B_{k-2\,k-2}^{-1} - (\bar{z}_{k-1} [\bar{c}]_{k-1} = [\bar{\beta}]_{k-1} \bar{p}_{k-1})] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 (\cdot c)_2 & & \\ & E(\cdot c)_{k-3\,k-2} & \\ & & E_{k-2} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-2}(\Lambda) \right.$$

$$\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{G}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} [B_{k+1\,k+1}^{-1} - ([\bar{\beta}]_{k+1} \bar{z}_{k+1} = \bar{p}_{k+1} [\bar{c}]_{k+1})] & & \\ & [B_{k+2\,k+2}^{-1} - (\bar{\beta}_{k+2} z_{k+2} = p_{k+2} \bar{c}_{k+2})] & \\ & & [B_{l-2\,l-2}^{-1} - (\bar{\beta}_{l-2} z_{l-2} = p_{l-2} \bar{c}_{l-2})] \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} q_{l-1} & z_l \\ p_l & G_{l-1} \end{bmatrix}$$

$$\left. \mathbb{C}_{l+1}^{m}(G) = \begin{bmatrix} E(\cdot\hat{\beta})_{l+1\,l+2} & & \\ & E(\cdot\hat{\beta})_{m-1\,m} & \\ & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{l+1\,l+1}^{-1} - ([\bar{\beta}]_{l+1} \bar{z}_{l+1} = \bar{p}_{l+1} [\bar{c}]_{l+1})] & & \\ & [B_{l+2\,l+2}^{-1} - (\bar{\beta}_{l+2} z_{l+2} = p_{l+2} \bar{c}_{l+2})] & \\ & & [B_{mm}^{-1} - (\bar{\beta}_m z_m = p_m \bar{c}_m)] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{l+1} & & \\ (\cdot\hat{c})_{l+1} E_{l+2} & & \\ & (\cdot\hat{c})_m E_m & \end{bmatrix} \right]$$

$$\times \begin{bmatrix} E_1 & \tau_1 & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & E_{k-2} & \tau_{k-2} & & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \mathbb{O}_k \\ & E_k \end{bmatrix} & & & & & \\ & & & (\cdot\hat{c})_{k+1} & E_{k+1} & & & & \\ & & & & (\cdot\hat{c})_{k+2} & E_{k+2} & & & \\ & & & & & (\cdot\bar{c})_{l-2} E_{l-2} & & & \\ & & & & & E[\hat{c}]_{l-1} & \begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ \mathbb{O}_l & E_l \end{bmatrix} & & \\ & & & & & & \hat{\tau}_{l+1} & E_{l+1} & \\ & & & & & & \hat{\tau}_{l+2} & & E_{l+2} \\ & & & & & & \hat{\tau}_m & & \bar{E}_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G), \quad (2.28)$$ где

$$\begin{cases} \{\xi_j\}_{j=1}^{k-2}, \{\tau_i\}_{i=1}^{k-2}, \{\hat{\xi}_j\}_{j=l+1}^{m} \text{ и } \{\hat{\tau}_i\}_{i=l+1}^{m} \text{ – опре-} \end{cases}$$

делены в (2.27). Здесь также $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{l+1}^{m}$ есть ведущие усеченные блочно-трехдиагональные подматрицы общего вида (I.I). (2.29)

Доказательство. Представления 2.7′(2.5′) и 2.8′(2.6′), получаем из соответствующих представлений 2.7(2.5) и 2.8(2.6). Справедливость указанных представлений проверяется путём перемножения факторизующих матриц. При этом следует учитывать определения матричных последовательностей $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (I.2) и $\{G, \bar{G}\}$ (I.3), а также соответствующих выражений для матриц B^{-1}_{jj} $(2.6)_{I})$. Справедливость представлений 2.7′(2.5′)÷2.8′(2.6′) установлена.

Замечание 2.I. Отметим, что мы здесь не привели, в силу ограниченности объёма публикации, ещё два представления типа 2.7′(2.5′) и 2.8′(2.6′), получаемых из соответствующих представлений 2.9 , 2.I0 при условии УШ. Также здесь не приводим аналогичные четыре представления, получаемые из представлений (2.I3)÷(2.I6).

Далее рассматриваются матрично-факторизованные представления для при следующих условиях:

Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ и $[\Delta_k^m=0$ и $\Delta_{l_{i-1}}^m=0]\}$ – равно нулю одновременно любое конечное число отдалённых миноров обоих типов, то

$$\text{IX.}\ \left\{\begin{array}{l} [\text{условия IУ}_{I}),\ \text{но}\ \{\det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1},\ \{\det(\bar{\Lambda}_j)\neq 0\}_{j=k+2}^{k'-1},\ \{\det(\bar{\bar{\Lambda}}_j)\neq 0\}_{j=k'+2}^{k''-1}, \\ \quad \{\det(\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_j)\neq 0\}_{j=k''+2}^{m+1}]\ \text{и} \\ [\det(G_{k''-1})=0,\ \det(\bar{G}_{k'-1})=0\ \text{и}\ \det(\bar{\bar{G}}_{k-1})=0,\ \text{но}\ \{\det(G_j)\neq 0\}_{j=k''}^{m-1}, \\ \{\det(\bar{G}_j)\neq 0\}_{j=k'}^{k''-3},\ \{\det(\bar{\bar{G}}_j)\neq 0\}_{j=k}^{k'-3},\ \{\det(\bar{\bar{\bar{G}}}_j)\neq 0\}_{j=0}^{k-3}, \\ \text{где}\ k'=l_{i-1},\ k''=l_i\ (l_{i-1}+3<l_i),\ i=1,2,\ldots,n-1]. \end{array}\right.$$

Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{l_{i-1}-1}=0]$ и $[\Delta_k^m=0$ и $\Delta_{l_{i-1}}^m=0]\}$ – равно нулю одновременно любое конечное число соседних миноров обоих типов, то

$$\text{X.}\ \left\{\begin{array}{l} [\text{условия У}_{I}),\ \text{но}\ \{\det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1},\ \det(\bar{\Lambda}_{k+2})\neq 0,\ \det(\bar{\bar{\Lambda}}_{k'+2})\neq 0, \\ \quad \{\det(\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_j)\neq 0\}_{j=k''+2}^{m}]\ \text{и} \\ [\det(G_{k''-1})=0,\ \det(\bar{G}_{k'-1})=0\ \text{и}\ \det(\bar{\bar{G}}_{k-1})=0,\ \text{но}\ \{\det(G_j)\neq 0\}_{j=k''}^{m-1}, \\ \det(\bar{G}_{k'})\neq 0,\ \det(\bar{\bar{G}}_k)\neq 0,\ \{\det(\bar{\bar{\bar{G}}}_j)\neq 0\}_{j=0}^{k-3}, \\ \text{где}\ k'=l_{i-1},\ k''=l_i\ (l_{i-1}+3=l_i),\ i=1,2,\ldots,n-2,n-1]. \end{array}\right.$$

Имеэт место следующая

Теорема 2.3. Пусть C –невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{c_j, b_j\}_{j=2}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей).

Пусть также равно нулю одновременно любое конечное число отдалённых (либо равно нулю одновременно любое конечное число соседних) ведущих блочно-угловых миноров обоих типов у $\mathbb{C}(1.1)$,т.е. для последовательностей матриц $\{\Lambda,\bar{\Lambda}\}$ (I.2) и $\{G,\bar{G}\}$ (I.3) выполняется одно из условий IX, X.

Тогда для $\mathbb{C}(1.1)$ имеют место следующие[x)] единственные матрично-факторизованные представления:

<u>Представление 2.I7</u> (при условии IX)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
\ddots \\
(-\beta_{k-2})E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_k & E_k \end{bmatrix}(-\hat{\bar{\bar{\beta}}}_{k+1}) \\
E_{k+1}(-\hat{\bar{\bar{\beta}}}_{k+2}) \\
\ddots \\
E_{k'-3}(-\hat{\bar{\beta}}_{k'-2}) \\
E_{k'-2}[-\hat{\bar{\beta}}_{k'-1}] \\
\begin{bmatrix} E_{k'-1} & 0_{k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix}(-\hat{\bar{\beta}}_{k'+1}) \\
E_{k'+1}(-\hat{\bar{\beta}}_{k'+2}) \\
\ddots \\
E_{k''-3}(-\hat{\beta}_{k''-2}) \\
E_{k''-2}[-\hat{\beta}_{k''-1}] \\
\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ 0_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix}(-\hat{\beta}_{k''-1}) \\
E_{k''+1}(-\hat{\beta}_{k''+2}) \\
\ddots \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{\bar{G}}_{k-1} \end{bmatrix} \\
\bar{\bar{G}}_k \\
\ddots \\
\bar{\bar{G}}_{k'-4} \\
\bar{\bar{G}}_{k'-3} \\
\begin{bmatrix} q_{k'-1} & z_{k'} \\ p_{k'} & \bar{G}_{k'-1} \end{bmatrix} \\
\bar{G}_{k'} \\
\ddots \\
\bar{G}_{k''-4} \\
\bar{G}_{k''-3} \\
\begin{bmatrix} q_{k''-1} & z_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1} \end{bmatrix} \\
G_{k''} \\
\ddots \\
G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
\ddots \\
E_{k-2}(-c_{k-2}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_k \\ & E_k \end{bmatrix} \\
(-\hat{\bar{\bar{c}}}_{k+1})E_{k+1} \\
(-\hat{\bar{\bar{c}}}_{k+2})E_{k+2} \\
\ddots \\
(-\hat{\bar{\bar{c}}}_{k'-3})E_{k'-3} \\
(-\hat{\bar{\bar{c}}}_{k'-2})E_{k'-2} \\
[-\hat{\bar{\bar{c}}}_{k'-1}]\begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ 0_{k'} & E_{k'} \end{bmatrix} \\
(-\hat{\bar{c}}_{k'+1})E_{k'+1} \\
\ddots \\
(-\hat{\bar{c}}_{k''-3})E_{k''-3} \\
(-\hat{\bar{c}}_{k''-2})E_{k''-2} \\
[-\hat{\bar{c}}_{k''-1}]\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ 0_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix} \\
(-\hat{c}_{k''+1})E_{k''+1} \\
\ddots \\
(-\hat{c}_m)E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G), \qquad (2.30)
$$

x) Здесь, в соответствии с Замечанием 2.I, не приводим все полученные представления для $\mathbb{C}(1.1)$. Отметим, что при условии IX либо при условии X существуют также множество единственных представлений,аналогичных представлениям,приведённым выше при условиях УП÷УШ.

Представление 2.18 (при условии IX)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
\ddots \\
(-\beta_{k-2})E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_k & E_k \end{bmatrix} \\
[-\bar\beta_{k+1}]E_{k+1} \\
(-\bar\beta_{k+2})E_{k+2} \\
\ddots \\
(-\bar\beta_{k'-2})E_{k'-2} \\
(-\bar\beta_{k'-1})\begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ 0_{k'} & E_{k'} \end{bmatrix} \\
[-\bar{\bar\beta}_{k'+1}]E_{k'+1} \\
(-\bar{\bar\beta}_{k'+2})E_{k'+2} \\
\ddots \\
(-\bar{\bar\beta}_{k''-2})E_{k''-2} \\
(-\bar{\bar\beta}_{k''-1})\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ 0_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix}(-\hat\beta_{k''+1}) \\
E_{k''+1}(-\hat\beta_{k''+2}) \\
\ddots \\
E_{m-1}(-\hat\beta_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\
\bar\Lambda_{k+2} \\
\bar\Lambda_{k+3} \\
\ddots \\
\bar\Lambda_{k'-1} \\
\begin{bmatrix} \bar\Lambda_{k'} & r_{k'} \\ p_{k'} & q_{k'} \end{bmatrix} \\
\bar{\bar\Lambda}_{k'+2} \\
\bar{\bar\Lambda}_{k'+3} \\
\ddots \\
\bar{\bar\Lambda}_{k''-1} \\
\begin{bmatrix} \bar{\bar\Lambda}_{k''} & r_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1} \end{bmatrix} \\
G_{k''} \\
\ddots \\
G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
E_2(-c_3) \\
\ddots \\
E_{k-2}(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_k \\ & E_k \end{bmatrix}[-\bar c_{k+1}] \\
E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) \\
E_{k+2}(-\bar c_{k+3}) \\
\ddots \\
E_{k'-2}(-\bar c_{k'-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k'-1} & 0_{k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix}[-\bar{\bar c}_{k'+1}] \\
E_{k'+1}(-\bar{\bar c}_{k'+2}) \\
\ddots \\
E_{k''-2}(-\bar{\bar c}_{k''-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k''-1} & 0_{k''} \\ & E_{k''} \end{bmatrix} \\
(-\hat c_{k''+1})E_{k''+1} \\
(-\hat c_{k''+2})E_{k''+2} \\
\ddots \\
(-\hat c_m)E_m
\end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G), \qquad (2.31)
$$

Представление 2.19 (при условии IX)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)E_2 \\
\ddots \\
(-\beta_{k-2})E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_k & E_k \end{bmatrix} \\
[-\bar\beta_{k+1}]E_{k+1} \\
(-\bar\beta_{k+2})E_{k+2} \\
\ddots \\
(-\bar\beta_{k'-2})E_{k'-2} \\
(-\bar\beta_{k'-1})\begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ 0_{k'} & E_{k'} \end{bmatrix}(-\hat\beta_{k'+1}) \\
E_{k'+1}(-\hat\beta_{k'+2}) \\
\ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & r_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\
\bar\Lambda_{k+2} \\
\bar\Lambda_{k+3} \\
\ddots \\
\bar\Lambda_{k'-1} \\
\begin{bmatrix} \bar\Lambda_{k'} & r_{k'} \\ p_{k'} & \bar G_{k'-1} \end{bmatrix} \\
\bar G_{k'} \\
\ddots
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c_2) \\
E_2(-c_3) \\
\ddots \\
E_{k-2}(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_k \\ & E_k \end{bmatrix}[-\bar c_{k+1}] \\
E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) \\
E_{k+2}(-\bar c_{k+3}) \\
\ddots \\
E_{k'-2}(-\bar c_{k'-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k'-1} & 0_{k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix} \\
(-\hat{\bar c}_{k'+1})E_{k'+1} \\
\ddots
\end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.32)
$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ E_{k''-3}(-\hat\beta)_{k''-2} \\ E_{k''-2}[\hat\beta]_{k''-1} \\ \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \mathbb{0}_{k''} \\ & E_{k''} \end{bmatrix}(-\hat\beta)_{k''+1} \\ E_{k''+1}(-\hat\beta)_{k''+2} \\ E_{k''+2}(-\hat\beta)_{k''+3} \\ \ddots \\ E_{m-1}(-\hat\beta)_{m} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \bar G_{k''-4} \\ \bar G_{k''-3} \\ \begin{bmatrix} q_{k''-1} & z_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1} \end{bmatrix} \\ G_{k''} \\ G_{k''+1} \\ \ddots \\ G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ (-\hat{\bar c})_{k''-3}E_{k''-3} \\ (-\hat{\bar c})_{k''-2}E_{k''-2} \\ [-\hat{\bar c}]_{k''-1}\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ \mathbb{0}_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix} \\ (-\hat c)_{k''+1}E_{k''+1} \\ (-\hat c)_{k''+2}E_{k''+2} \\ \ddots \\ (-\hat c)_m E_m \end{bmatrix}.$$

Здесь, в (2.30)÷(2.32), $k' = \ell_{i-1}$, $k'' = \ell_i$, где $\ell_{i-1} + 3 < \ell_i$, а соответствующие структурные матрицы $[\{\beta, [\beta_{k+1}], \bar\beta, [\bar{\bar\beta}_{k'+1}], \bar{\bar\beta};\ c, [c_{k+1}], \bar c, [\bar{\bar c}_{k'+1}], \bar{\bar c}\},\ \{\hat\beta, [\hat\beta_{k''-1}], \hat{\bar\beta}, [\hat{\bar\beta}_{k'-1}], \hat{\bar{\bar\beta}};\ \hat c, [\hat{\bar c}_{k''-1}], \hat{\bar c}, [\hat{\bar c}_{k'-1}], \hat{\bar{\bar c}}\}]$ – определены в (2.I2) и (2.I7). Последовательности матриц $\{\Lambda, \bar\Lambda, \bar{\bar\Lambda}\}$ и $\{G, \bar G, \bar{\bar G}\}$ – полностью определены в соответствии с (I.2) и (I.3). (2.33)

При этом $\{[\det\begin{pmatrix} q_{k''-1} & z_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1}\end{pmatrix} \neq 0] \to [\det\begin{pmatrix} q_{k'-1} & z_{k'} \\ p_{k'} & G_{k'-1}\end{pmatrix} \neq 0, \det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{\bar G}_{k-1}\end{pmatrix} \neq 0]; [\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{pmatrix} \neq 0] \to$ $\to [\det\begin{pmatrix} \Lambda_{k'} & z_{k'} \\ p_{k'} & q_{k'}\end{pmatrix} \neq 0, \det\begin{pmatrix} \bar\Lambda_{k''} & z_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1}\end{pmatrix} \neq 0]; [\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{pmatrix} \neq 0, \det\begin{pmatrix} q_{k''-1} & z_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1}\end{pmatrix} \neq 0] \to [\det\begin{pmatrix} \Lambda_{k'} & z_{k'} \\ p_{k'} & \bar G_{k'-1}\end{pmatrix} \neq 0]$ при $\det(\mathbb{C}) \neq 0\}$.

<u>Представление 2.20</u>(при условии X)

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta)_2E_2 \\ \ddots \\ (-\beta)_{k-2}E_{k-2} \\ (-\beta)_{k-1}\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ \mathbb{0}_k & E_k \end{bmatrix}(-\hat{\bar\beta})_{k+1} \\ E_{k+1}[-\hat{\bar{\bar\beta}}]_{k+2} \\ \ddots \\ \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \mathbb{0}_{k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix}(-\hat\beta)_{k'+1} \\ E_{k'+1}(-\hat\beta)_{k'+2} \\ \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \mathbb{0}_{k''} \\ & E_{k''} \end{bmatrix}(-\hat\beta)_{k''+1} \\ E_{k''+1}(-\hat\beta)_{k''+2} \\ \ddots \\ E_{m-1}(-\hat\beta)_m \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \ddots \\ \Lambda_{k-1} \\ \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & \bar{\bar G}_{k-1} \end{bmatrix} \\ \bar{\bar G}_k \\ \ddots \\ \begin{bmatrix} q_{k'-1} & z_{k'} \\ p_{k'} & \bar G_{k'-1} \end{bmatrix} \\ \bar G_{k'} \\ \begin{bmatrix} q_{k''-1} & z_{k''} \\ p_{k''} & G_{k''-1} \end{bmatrix} \\ G_{k''} \\ \ddots \\ G_{m-2} \\ G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c)_2 \\ E_2(-c)_3 \\ \ddots \\ E_{k-2}(-c)_{k-1} \\ \begin{bmatrix} E_{k-1} & \mathbb{0}_k \\ & E_k \end{bmatrix} \\ (-\hat{\bar c})_{k+1}E_{k+1} \\ \ddots \\ [-\hat{\bar{\bar c}}]_{k'-1}\begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ \mathbb{0}_{k'} & E_{k'} \end{bmatrix} \\ (-\hat{\bar c})_{k'+1}E_{k'+1} \\ \ddots \\ [-\hat{\bar c}]_{k''-1}\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ \mathbb{0}_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix} \\ (-\hat c)_{k''+1}E_{k''+1} \\ \ddots \\ (-\hat c)_m E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) \qquad (2.34)$$

Представление 2.21 (при условии X)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\,E_2 \\
\ddots \quad \ddots \\
(-\beta_{k-2})\,E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1}) \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_k & E_k \end{bmatrix} \\
[-\bar{\beta}_{k+1}]\,E_{k+1} \\
\ddots \quad \ddots \\
(-\bar{\beta}_{k'-1}) \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ 0_{k'} & E_{k'} \end{bmatrix} \\
[-\bar{\bar{\beta}}_{k'+1}]\,E_{k'+1} \\
(-\bar{\bar{\beta}}_{k''-1}) \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ 0_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix} (-\hat{\beta}_{k''+1}) \\
E_{k''+1}\,(-\hat{\beta}_{k''+2}) \\
\ddots \quad \ddots \\
E_{m-1}\,(-\hat{\beta}_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ \rho_k & q_k \end{bmatrix} \\
\bar{\Lambda}_{k+2} \\
\ddots \\
\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & z_{k'} \\ \rho_{k'} & q_{k'} \end{bmatrix} \\
\bar{\bar{\Lambda}}_{k'+2} \\
\begin{bmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & z_{k''} \\ \rho_{k''} & G_{k''-1} \end{bmatrix} \\
G_{k''} \\
\ddots \\
G_{m-2} \\
G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1\,(-c_2) \\
E_2\,(-c_3) \\
\ddots \quad \ddots \\
E_{k-2}\,(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_k \\ & E_k \end{bmatrix} [-\bar{c}_{k+1}] \\
E_{k+1}\,(-\bar{c}_{k+2}) \\
\ddots \quad \ddots \\
\begin{bmatrix} E_{k'-1} & 0_{k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix} [-\bar{\bar{c}}_{k'+1}] \\
E_{k'+1}\,(-\bar{\bar{c}}_{k'+2}) \\
\begin{bmatrix} E_{k''-1} & 0_{k''} \\ & E_{k''} \end{bmatrix} \\
(-\hat{c}_{k''+1})\,E_{k''+1} \\
\ddots \quad \ddots \\
(-\hat{c}_{m-1})\,E_{m-1} \\
(-\hat{c}_m)\,E_m
\end{bmatrix} = C(\Lambda, G) \qquad (2.35)
$$

,

Представление 2.22 (при условии X)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\,E_2 \\
\ddots \quad \ddots \\
(-\beta_{k-2})\,E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1}) \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_k & E_k \end{bmatrix} \\
[-\bar{\beta}_{k+1}]\,E_{k+1} \\
\ddots \quad \ddots \quad \ddots \\
(-\bar{\beta}_{k'-1}) \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ 0_{k'} & E_{k'} \end{bmatrix} (-\hat{\bar{\beta}}_{k'+1}) \\
E_{k'+1}\,[-\hat{\bar{\beta}}_{k'+2}] \\
\begin{bmatrix} E_{k''-1} & 0_{k''} \\ & E_{k''} \end{bmatrix} (-\hat{\beta}_{k''+1}) \\
E_{k''+1}\,(-\hat{\beta}_{k''+2}) \\
\ddots \quad \ddots \\
E_{m-1}\,(-\hat{\beta}_m) \\
E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ \rho_k & q_k \end{bmatrix} \\
\bar{\Lambda}_{k+2} \\
\ddots \\
\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & z_{k'} \\ \rho_{k'} & \bar{G}_{k'-1} \end{bmatrix} \\
\bar{G}_{k'} \\
\begin{bmatrix} q_{k''-1} & z_{k''} \\ \rho_{k''} & G_{k''-1} \end{bmatrix} \\
G_{k''} \\
\ddots \\
G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1\,(-c_2) \\
E_2\,(-c_3) \\
\ddots \quad \ddots \\
E_{k-2}\,(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_k \\ & E_k \end{bmatrix} [-\bar{c}_{k+1}] \\
E_{k+1}\,(-\bar{c}_{k+2}) \\
\ddots \quad \ddots \\
\begin{bmatrix} E_{k'-1} & 0_{k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix} \\
(-\hat{\bar{c}}_{k'+1})\,E_{k'+1} \\
[-\hat{\bar{c}}_{k'+2}] \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ 0_{k''} & E_{k''} \end{bmatrix} \\
(-\hat{c}_{k''+1})\,E_{k''+1} \\
\ddots \quad \ddots \quad \ddots \\
(-\hat{c}_m)\,E_m
\end{bmatrix} = C(\Lambda, G) \qquad (2.36)
$$

.

$$\left\{\begin{array}{l}
\text{Здесь, в (2.30)+(2.36), } k'=\ell_{i-1},\ k''=\ell_i \text{, где } \ell_{i-1}+3=\ell_i \text{, а соответствую-}\\
\text{щие структурные матрицы } [\{\rho,[\rho_{k+1}],\bar{\rho}_{k'+1},[\bar{\bar{\rho}}_{k'+1}],\bar{\bar{\rho}}_{k''-1};\ c,[c_{k+1}],\bar{c}_{k'-1},[\bar{\bar{c}}_{k'+1}],\bar{\bar{c}}_{k''-1}\},\\
\{\hat{\rho},[\hat{\hat{\rho}}]_{k+2},\hat{\hat{\rho}}_{k'+1},[\hat{\hat{\hat{\rho}}}]_{k+2},\hat{\hat{\hat{\rho}}}_{k+1};\hat{c},[\hat{c}]_{k+1},\hat{\hat{c}}_{k+1},[\hat{\hat{c}}]_{k+2},\hat{\hat{\hat{c}}}_{k+1}\}] \text{ – определены в (2.20) и (2.25). Последо-}\\
\text{вательности матриц } \{\Lambda,\bar{\Lambda},\bar{\bar{\Lambda}}\} \text{ и } \{\sigma,\bar{\sigma},\bar{\bar{\sigma}}\} \text{ – полностью определены в}\\
\text{соответствии с (I.2) и (I.3).} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (2.37)\\
\text{При этом } \left\{\left[\det\begin{pmatrix} q_{k''-1} & r_{k''}\\ p_{k''} & \sigma_{k''-1}\end{pmatrix}\neq 0\right]\to\left[\det\begin{pmatrix} q_{k'-1} & r_{k'}\\ p_{k'} & \bar{\sigma}_{k'-1}\end{pmatrix}\neq 0 \neq \det\begin{pmatrix} \Lambda_{k-1} & r_k\\ p_k & \bar{\bar{\sigma}}_{k-1}\end{pmatrix}\right];\left[\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0\right]\to\right.\\
\left.\to\left[\det\begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & r_{k'}\\ p_{k'} & q_{k'}\end{pmatrix}\neq 0 \neq \det\begin{pmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & r_{k''}\\ p_{k''} & \sigma_{k''-1}\end{pmatrix}\right];\left[\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0, \det\begin{pmatrix} q_{k''-1} & r_{k''}\\ p_{k''} & \sigma_{k''-1}\end{pmatrix}\neq 0\right]\to\left[\det\begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & r_{k'}\\ p_{k'} & \bar{\sigma}_{k'-1}\end{pmatrix}\neq 0\right],\right.\\
\text{при } \det(\mathbb{C})\neq 0\}.
\end{array}\right.$$

<u>Доказательство</u>. Справедливость представлений 2.17÷2.19 (при условии IX), а также представлений 2.20÷2.22 (при условии X) опять проверяется путём перемножения факторизирующих матриц с учётом определения последовательностей матриц $\{\Lambda,\bar{\Lambda},\bar{\bar{\Lambda}}\}$ (I.2) и $\{\sigma,\bar{\sigma},\bar{\bar{\sigma}}\}$ (I.3) и определений соответствующих структурных матриц $\{[\bar{\rho}],[\bar{\bar{\rho}}],[\bar{c}],[\bar{\bar{c}}];[\hat{\rho}],[\hat{\hat{\rho}}],[\hat{c}],[\hat{\hat{c}}]\}$.

Утверждения $\left\{\left[\det\begin{pmatrix} q_{k''-1} & r_{k''}\\ p_{k''} & \sigma_{k''-1}\end{pmatrix}\neq 0\right]\to\left[\det\begin{pmatrix} q_{k'-1} & r_{k'}\\ p_{k'} & \bar{\sigma}_{k'-1}\end{pmatrix}\neq 0, \det\begin{pmatrix} \Lambda_{k-1} & r_k\\ p_k & \bar{\bar{\sigma}}_{k-1}\end{pmatrix}\neq 0\right];\left[\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0\right]\to\right.$

$\left.\to\left[\det\begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & r_{k'}\\ p_{k'} & q_{k'}\end{pmatrix}\neq 0, \det\begin{pmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & r_{k''}\\ p_{k''} & \sigma_{k''-1}\end{pmatrix}\neq 0\right];\left[\det\begin{pmatrix} \Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0, \det\begin{pmatrix} q_{k''-1} & r_{k''}\\ p_{k''} & \sigma_{k''-1}\end{pmatrix}\neq 0\right]\to\left[\det\begin{pmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & r_{k'}\\ p_{k'} & \bar{\sigma}_{k'-1}\end{pmatrix}\neq 0\right]\right\}$

при условии IX или при условии X являются следствием необращения в нуль одновременно двух последовательных однотипных ведущих блочно-угловых миноров невырожденных блочно-трехдиагональных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) Справедливость представлений 2.17+2.19 и 2.20+2.22 установлена.

<u>Замечание 2.2</u>. Если перейти от квазиобобщённых матричных последовательностей $\{\Lambda,\bar{\Lambda}\}$(I.2) и $\{\sigma,\bar{\sigma}\}$ (I.3) (при рассмотренных условиях) к введённым ранее /I÷3/ обобщенным последовательностям матриц $\{\Lambda\}$ и $\{\sigma\}$, то после некоторых преобразований (см. разложения, приведённые в Следствиях 2.I и 2.2) представления Теоремы 2.I, а также Теорем 2.2 и 2.3 совпадают с некоторыми из соответствующих представлений /I$_3$), I$_4$)/. Отметим также, что в Теоремах 2.2 и 2.3 получены полные матрично-факторизованные представления $\mathbb{C}$ (I.I), основанные на естественно-элементарных матрицах минимальной размерности при наличии у $\mathbb{C}$ (I.I) нулевых ведущих блочно-угловых миноров обоих типов.

Заключение

В работе изучены на основе квазиобобщённых матричных процессов естественно-элементарные факторизации блочно-трехдиагональных матриц общего вида при наличии у $\mathbb{C}$ (I.I) нулевых ведущих блочно-угловых миноров обоих типов.

Литература

1. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринты ОИЯИ: Р11-89-340, Дубна 1989; Р11-89-203, Дубна 1989; Р11-88-788, Дубна 1988; Р11-88-922, Дубна 1988.
2. Емельяненко Г.А. Блочно-трёхдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск 1992; ОИЯИ 11-92-4, Дубна 1992.
3. Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси 1990.
4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринт ОИЯИ. Р11-93-248, Дубна 1993.
5. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринт ОИЯИ. Р11-93-249, Дубна 1993.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июля 1993 года.