сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-93-249

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов

КВАЗИОБОБЩЕННЫЕ МАТРИЧНЫЕ ПРОЦЕССЫ И ПРЕДСТАВЛЕНИЯ БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ ОБЩЕГО ВИДА

1993

I. <u>Введение</u>. В настоящей работе вводятся квазиобобщённые[x)] матричные процессы и изучаются на их основе представления блочно-трёхдиагональных матриц общего вида при различных комбинациях их нулевых ведущих блочно-угловых миноров[xx)].

Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \tag{I.I}$$ где

$\{q_j\}_{j=1}^{m}$ – диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а $\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$–под (над)-диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, минимальные размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{j-1}$ и $q_j\}_{j=2}^{m}$.

Отметим,[xxx)] что в случае обращения в нуль некоторых из ведущих верхних (нижних) блочно-угловых миноров невырожденных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) в работах /I÷4/ были введены следующие обобщённые матричные (процессы) – <u>последовательности вида</u>:

x) Под квазиобобщёнными матричными процессами мы понимаем в этой работе процессы вида (2.I),(2.2), которые структурно совпадают с обобщёнными матричными процессами вида (I.2),(I.3), но являются непрерывными в отличие от последних.

xx) Под ведущими $\{\Delta_1^j\}_{j=1}^{m}$–верхними и $\{\Delta_j^m\}_{j=1}^{m}$ –нижними блочно-угловыми минорами $\mathbb{C}$ (I.I), как и в /I÷4/, понимаются определители ведущих усечённых подматриц, начинающихся с q_1 и q_m соответственно.

xxx) Если обращается в нуль один Δ_1^{k-1} -верхний ведущий блочно-угловой минор матрицы $\mathbb{C}$ (I.I), то $det(\Lambda_k)=0$. При $det(G_k)=0$ в нуль обращается один Δ_{k+1}^{m} -нижний ведущий блочно-угловой минор $\mathbb{C}$(I.I).

$$
\begin{cases}
\text{Если } \det(\Lambda_j)\neq 0, \text{ то } \Lambda_{j+1} = q_j - p_j \Lambda_j^{-1} z_j,\ \Lambda_1 = q_1,\ (\det(q_1)\neq 0),\ j=1,\dots,m. \\
\text{Если } \det(\Lambda_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (3\le j\le m-1), \text{ то } \Lambda_{j+1}=?, \text{ но } \Lambda_{j+2}=q_{j+1}, \text{ где } \det(q_{j+1})\neq 0.
\end{cases}
\tag{I.2}
$$

$$
\begin{cases}
\text{Если } \det(G_j)\neq 0, \text{ то } G_{j-1} = q_j - z_{j+1} G_j^{-1} p_{j+1},\ G_{m-1}=q_m,\ (\det(q_m)\neq 0),\ j=m-1,\dots,1. \\
\text{Если } \det(G_j)=0 \text{ для любого } j \text{ из } (2\le j\le m-2), \text{ то } G_{j-1}=?, \text{ но } G_{j-2}=q_{j-1}, \text{ где } \det(q_{j-1})\neq 0.
\end{cases}
\tag{I.3}
$$

На основе этих определений при условиях

I$_{а)}$. [$\det(\Lambda_k)=0$ для любого k из $(3\le k\le m-1)$, но $\{\det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=2}^{k-1}$, $\{\det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=k+2}^{m+1}$]

либо

I$_{б)}$. [$\det(G_k)=0$ для любого k из $(2\le k\le m-2)$, но $\{\det(G_\mu)\neq 0\}_{\mu=k+1}^{m-1}$, $\{\det(G_\mu)\neq 0\}_{\mu=0}^{k-2}$]

были получены следующие матрично-факторизованные представления C (I.I):

Представление I.I (при условии I$_{а)}$)

$$
C(\Lambda)=
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2) & E_2 \\
& \ddots & \ddots \\
& & (-\beta_{k-1}) & E_{k-1} \\
& & & 0_k & E_k \\
& & & & 0_{k+1} & E_{k+1} \\
& & & & & (-\beta_{k+2}) & E_{k+2} \\
& & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & (-\beta_{m-1}) & E_{m-1} \\
& & & & & & & & (-\beta_m) & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
& E_2 \\
& & \ddots \\
& & & E_{k-1} \\
& & & & E_k & B_{k+1} & \cdots & B_m \\
& & & & & E_{k+1} \\
& & & & & & E_{k+2} \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & E_{m-1} \\
& & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
& \Lambda_3 \\
& & \ddots \\
& & & \Lambda_{k-1} \\
& & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & (q_k-\theta_k) \end{bmatrix} \\
& & & & & q_{k+1} \\
& & & & & & \Lambda_{k+3} \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & \Lambda_m \\
& & & & & & & & & \Lambda_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
& E_2 \\
& & \ddots \\
& & & E_{k-1} \\
& & & & E_k \\
& & & & A_{k+1} & E_{k+1} \\
& & & & A_{k+2} & & E_{k+2} \\
& & & & \vdots & & & \ddots \\
& & & & A_{m-1} & & & & E_{m-1} \\
& & & & A_m & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & (-c_2) \\
& E_2 & (-c_3) \\
& & \ddots & \ddots \\
& & & E_{k-2} & (-c_{k-1}) \\
& & & & E_{k-1} & 0_k \\
& & & & & E_k & 0_{k+1} \\
& & & & & & E_{k+1} & (-c_{k+2}) \\
& & & & & & & E_{k+2} & (-c_{k+3}) \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & & E_{m-1} & (-c_m) \\
& & & & & & & & & & E_m
\end{bmatrix},
\tag{I.4}
$$

где

$$
\begin{cases}
B_j = z_{k+1}\prod\limits_{j=k+2}^{j} c_j \cdot \Lambda_{j+1}^{-1},\ j=k+1,k+2,\dots,m; \quad A_i=\Lambda_{i+1}^{-1}\prod\limits_{j=k+2}^{i}\beta_j\cdot p_{k+1},\ i=k+1,k+2,\dots,m; \\
\theta_k=\sum\limits_{j=k+1}^{m}(B_j\Lambda_{j+1}A_j),\quad c_{j+1}=-(\Lambda_{j+1}^{-1} z_{j+1}),\ \beta_{j+1}=-(p_{j+1}\Lambda_{j+1}^{-1}),\quad 1\le j\le k-1;\ k+1\le j\le m-1. \\
\text{При этом} \quad (q_k-\theta_k)=G_{k-1}, \text{ если } \{\det(G_j)\neq 0\}_{j=k}^{m-1}.
\end{cases}
\tag{I.5}
$$

Представление I.2 (при условии $I_{б)}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & (-\hat{\beta}_2) & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & E_{k-2} & (-\hat{\beta}_{k-1}) & & & & & \\
& & & E_{k-1} & 0_k & & & & \\
& & & & E_k & 0_{k+1} & & & \\
& & & & & E_{k+1} & (-\hat{\beta}_{k+2}) & & \\
& & & & & & \ddots & \ddots & \\
& & & & & & E_{m-2} & (-\hat{\beta}_{m-1}) & \\
& & & & & & & E_{m-1} & (-\hat{\beta}_m) \\
& & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & \\
& E_2 & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & \\
& & & E_{k-2} & & & & \\
& & & & E_{k-1} & & & \\
\hat{A}_1 & \cdots & & & \hat{A}_{k-1} & E_k & & \\
& & & & & & E_{k+1} & \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & E_{m-1} \\
& & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
G_0 & & & & & & & \\
& \ddots & & & & & & \\
& & G_{k-3} & & & & & \\
& & & q_{k-1} & & & & \\
& & & & \begin{bmatrix} (q_k-\hat{\theta}_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & & & \\
& & & & & G_{k+1} & & \\
& & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & G \\
& & & & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & \hat{B}_1 & & & & \\
& E_2 & & & \hat{B}_2 & & & & \\
& & \ddots & & \vdots & & & & \\
& & & E_{k-1} & \hat{B}_{k-1} & & & & \\
& & & & E_k & & & & \\
& & & & & E_{k+1} & & & \\
& & & & & & E_{k+2} & & \\
& & & & & & & \ddots & \\
& & & & & & & E_{m-1} & \\
& & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & & \\
(-\hat{c}_2) & E_2 & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & (-\hat{c}_{k-1}) & E_{k-1} & & & & & \\
& & & 0_k & E_k & & & & \\
& & & & 0_{k+1} & E_{k+1} & & & \\
& & & & & (-\hat{c}_{k+2}) & E_{k+2} & & \\
& & & & & & \ddots & \ddots & \\
& & & & & & (-\hat{c}_{m-1}) & E_{m-1} & \\
& & & & & & & (-\hat{c}_m) & E_m
\end{bmatrix}
= C(G) \tag{I.6}
$$

где

$$
\begin{cases}
\hat{A}_j = p_k \cdot \prod\limits_{\beta=j+1}^{k-1} \hat{c}_\beta \cdot G_{j-1}^{-1}, \; j=1,2,\ldots,k-1; \quad \hat{B}_i = G_{i-1}^{-1} \cdot \prod\limits_{\beta=i+1}^{k-1} \hat{\beta}_\beta \cdot z_k, \; i=1,2,\ldots,k-1; \\
\hat{\theta}_k = \sum\limits_{\beta=1}^{k-1} (\hat{A}_\beta G_{\beta-1} \hat{B}_\beta), \; \hat{c}_{\beta+1} = -(G_\beta^{-1} p_{\beta+1}), \; \hat{\beta}_{\beta+1} = -(z_{\beta+1} G_\beta^{-1}), \; 1 \le \beta \le k-2, \; k+2 \le \beta \le m-1. \\
\text{При этом} \quad (q_k - \hat{\theta}_k) = \Lambda_{k+1}, \text{ если } \{\det(\Lambda_\beta) \ne 0\}_{\beta=2}^{k}.
\end{cases}
\tag{I.7}
$$

В (I.4)÷(I.7) последовательности матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ определены в соответствии с (I.2)+(I.3).

2. Квазиобобщённые матричные процессы и множество матрично-факторизованных представлений блочно-трёхдиагональных матриц общего вида

Как следует из определений (I.2)÷(I.3) обобщённые матричные процессы для $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ и,следовательно,представления I.I; I.2 для C (I.I) обладают специфической особенностью, которая придаёт им наряду с теоретической несомненную практическую значимость.
На самом деле. При реальных вычислениях на ЭВМ процессов $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ (I.2)+(I.3) накопление наследственной (в частности из-за округлений на ЭВМ) погрешности при получении представлений I.I+I.2 будет прерываться соответственно на k -шаге.
Далее возобновление прерванных вычислительных процессов вновь начинается с заданных q_{k+1} и q_{k-1} -матриц соответственно.

В настоящей же работе мы получим (с целью полноты исследования) и другие (типа (I.2),(I.3)) матричные процессы $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ и представления для C (I.I) при различных комбинациях нулевых ведущих блочно-угловых миноров у C (I.I). Отличительная особенность полученных здесь представлений для $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ (и в целом результатов этой работы) заключается в общем случае в их большей теоретической (чем практической) значимости. Кроме того, использование результатов настоящей работы может иметь особый практический смысл при разработке, например, численных алгоритмов решения спектральной проблемы для (блочно) трёхдиагональных матриц.

Итак, введём квазиобобщённые матричные (процессы) – последовательности вида

Определение 2.I

__Если__ $\det(\Lambda_j) \neq 0$ для всех $2 \leq j \leq m+1$, __то__ $\Lambda_{j+1} = q_j - p_j \cdot \Lambda_j^{-1} z_j$, $\Lambda_2 = q_1 (\det(q_1) \neq 0)$, $j = 2, \ldots, m$.

__Если__ $\det(\Lambda_\mu) = 0$ для любого μ из $(3 \leq \mu \leq m-1)$, __то__ $\Lambda_{j+1} = q_j - p_j \Lambda_j^{-1} z_j$, $\Lambda_2 = q_1$, $j = 2, 3, \ldots, \mu-1$;

$$\bar{\Lambda}_{\mu+1} = \begin{pmatrix} \Lambda_\mu & z_\mu \\ p_\mu & q_\mu \end{pmatrix}, \quad \bar{\Lambda}_{\mu+2} = q_{\mu+1} - \bar{p}_{\mu+1} \cdot \bar{\Lambda}_{\mu+1}^{-1} \cdot \bar{z}_{\mu+1}, \text{ где}^{x)}\ \bar{p}_{\mu+1} = [0_{\mu+1,\mu-1}, p_{\mu+1}],\ \bar{z}_{\mu+1} = [0_{\mu-1,\mu+1}, z_{\mu+1}]^T, \tag{2.I}$$

$\det(\bar{\Lambda}_{\mu+1}) \neq 0$ __и__ $\bar{\Lambda}_{j+1} = q_j - p_j \bar{\Lambda}_j^{-1} z_j$, $j = \mu+2, \mu+3, \ldots, m$.

__Если__ $\det(G_j) \neq 0$ для всех $0 \leq j \leq m-1$, __то__ $G_{j-1} = q_j - z_{j+1} \cdot G_j^{-1} p_{j+1}$, $G_{m-1} = q_m (\det(q_m) \neq 0)$, $j = m, \ldots, 1$.

__Если__ $\det(G_\mu) = 0$ для любого μ из $(2 \leq \mu \leq m-2)$ __то__ $G_{j-1} = q_j - z_{j+1} \cdot G_j^{-1} p_{j+1}$, $j = m, m-1, \ldots, \mu+1$;

$$\bar{G}_{\mu-1} = \begin{pmatrix} q_\mu & z_{\mu+1} \\ p_{\mu+1} & G_\mu \end{pmatrix}, \quad \bar{G}_{\mu-2} = q_{\mu-1} - \bar{z}_\mu \cdot \bar{G}_{\mu-1}^{-1} \cdot \bar{p}_\mu, \text{ где } \bar{z}_\mu = [z_\mu, 0_{\mu-1,\mu+1}],\ \bar{p}_\mu = [p_\mu, 0_{\mu+1,\mu-1}]^T, \tag{2.2}$$

$\det(\bar{G}_{\mu-1}) \neq 0$ __и__ $\bar{G}_{j-1} = q_j - z_{j+1} \bar{G}_j^{-1} p_{j+1}$, $j = \mu-2, \mu-3, \ldots, 1$.

В соответствии с введённым определением $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (2.I) и $\{G, \bar{G}\}$ (2.2) имеют, очевидно, место следующие утверждения:

I. Если $\{[\Delta_1^{k-1} = 0$ __либо__ $\Delta_{k+1}^{m} = 0]\}$ –равны нулю только по одному минору каждого типа, то $\{[\det(\Lambda_k) = 0$ для любого k из $(3 \leq k \leq m-1)$, но $\{\det(\Lambda_j) \neq 0\}_{j=2}^{k-1}$, $\{\det(\bar{\Lambda}_j) \neq 0\}_{j=k+1}^{m+1}]$ __либо__ $[\det(G_k) = 0$ для любого k из $(2 \leq k \leq m-2)$, но $\{\det(G_j) \neq 0\}_{j=k-1}^{m-1}$, $\{\det(\bar{G}_j) \neq 0\}_{j=0}^{k-1}]\}$.

Справедлива следующая теорема.

__Теорема 2.I.__ Пусть C – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_j, p_j\}_{j=1}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также для последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar{\Lambda}\}$ (2.I) либо $\{G, \bar{G}\}$ (2.2) выполняется одно из условий I.

Тогда для C (I.I) имеют место следующие единственные матрично-факторизованные представления:

---

x) Здесь и всюду далее 0_{ij} –тождественные нулевые прямоугольные матрицы, размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_i, q_j\}$; T –знак транспонирования.

Представление 2.I (при условии I_{I})

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta_2) & E_2 \\ & \ddots & \ddots \\ && (-\beta_{k-2}) & E_{k-2} \\ &&& (-\beta_{k-1}) & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\ &&&& [-\bar{\beta}]_{k+1} & E_{k+1} \\ &&&&& (-\bar{\beta}_{k+2}) & E_{k+2} \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&&& (-\bar{\beta}_m) & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ & \Lambda_3 \\ && \ddots \\ &&& \Lambda_{k-1} \\ &&&& \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} \\ &&&&& \bar{\Lambda}_{k+2} \\ &&&&&& \bar{\Lambda}_{k+3} \\ &&&&&&& \ddots \\ &&&&&&&& \bar{\Lambda}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) \\ & \ddots & \ddots \\ && E_{k-2} & (-c_{k-1}) \\ &&& \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1,k} \\ & E_k \end{bmatrix} & [-\bar{c}]_{k+1} \\ &&&& E_{k+1} & (-\bar{c}_{k+2}) \\ &&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&& E_{m-1} & (-\bar{c}_m) \\ &&&&&&& E_m \end{bmatrix} = \mathbf{C}(\Lambda,\bar{\Lambda}) \tag{2.3}$$

, где

$$\begin{cases} \left\{\beta_{j+1} = -(p_{j+1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}),\ c_{j+1} = -(\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\right\}_{j=1}^{k-2}, \quad \left\{\bar{\beta}_{j+1} = -(p_{j+1}\cdot\bar{\Lambda}_{j+1}^{-1}),\ \bar{c}_{j+1} = -(\bar{\Lambda}_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\right\}_{j=k+1}^{m-1}, \\ [\bar{\beta}]_{k+1} = -[0_{k+1,k-1}, p_{k+1}]\cdot\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1}, \quad [\bar{c}]_{k+1} = -\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0_{k-1,k+1} \\ z_{k+1} \end{bmatrix}. \\ \text{При этом} \quad \det\left(\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}\right) \neq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Представление 2.2 (при условии I_2)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat{\beta}_2) \\ & \ddots & \ddots \\ && E_{k-2} & (-\hat{\beta}_{k-1}) \\ &&& E_{k-1} & [-\hat{\beta}]_k \\ &&&& \begin{bmatrix} E_k & 0_{k,k+1} \\ & E_{k+1} \end{bmatrix} \\ &&&&& E_{k+2} & (-\hat{\beta}_{k+3}) \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&&& E_{m-1} & (-\hat{\beta}_m) \\ &&&&&&&& E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{G}_0 \\ & \ddots \\ && \bar{G}_{k-3} \\ &&& \bar{G}_{k-2} \\ &&&& \begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} \\ &&&&& G_{k+1} \\ &&&&&& \ddots \\ &&&&&&& G_{m-2} \\ &&&&&&&& G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{c}_2) & E_2 \\ & \ddots & \ddots \\ && (-\hat{c}_{k-1}) & E_{k-1} \\ &&& [-\hat{c}]_k & \begin{bmatrix} E_k & \\ 0_{k+1,k} & E_{k+1} \end{bmatrix} \\ &&&& (-\hat{c}_{k+2}) & E_{k+2} \\ &&&&& (-\hat{c}_{k+3}) & E_{k+3} \\ &&&&&& \ddots & \ddots \\ &&&&&&& (-\hat{c}_m) & E_m \end{bmatrix} = \mathbf{C}(G,\bar{G}) \tag{2.5}$$

, где

$$\begin{cases} \left\{\hat{c}_{j+1} = -(G_j^{-1}\cdot p_{j+1}),\ \hat{\beta}_{j+1} = -(z_{j+1}\cdot G_j^{-1})\right\}_{j=m-1}^{k+1}, \quad \left\{\hat{\bar{c}}_{j+1} = -(\bar{G}_j^{-1}\cdot p_{j+1}),\ \hat{\bar{\beta}}_{j+1} = -(z_{j+1}\cdot\bar{G}_j^{-1})\right\}_{j=k-2}^{1}, \\ [\hat{\beta}]_k = -[z_k, 0_{k-1,k+1}]\cdot\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1}, \quad [\hat{c}]_k = -\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p_k \\ 0_{k+1,k-1} \end{bmatrix}. \\ \text{При этом} \quad \det\left(\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}\right) \neq 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Доказательство. Справедливость представлений (2.3)+(2.4) и (2.5)+ +(2.6), с учётом определения матричных последовательностей $\{\Lambda,\bar{\Lambda}\}$

(2.I) и $\{G,\bar{G}\}$ (2.2), проверяется путём перемножения факторизирующих матриц, входящих в (2.3) и (2.5) соответственно. При этом невырожденность матриц $\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}$, при соответствующих условиях, является прямым следствием леммы IO из /I3)/ о необращении в нуль одновременно двух последовательных однотипных ведущих блочно-угловых миноров $\mathbb{C}$ (I.I). Справедливость представлений 2.I и 2.2 установлена.

Далее рассматриваются представления для $\mathbb{C}$ (I.I) при следующих комбинациях нулевых ведущих блочно-угловых миноров:

II. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{\ell-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m}=0$ и $\Delta_{\ell+1}^{m}=0]\}$ – равны нулю только по два отдалённых минора каждого типа, то

$$\left\{\begin{array}{l} [\,det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\bar{\Lambda}_\ell)=0 \text{, для любого } k \text{ фиксированного и любого} \\ \ell \text{ из } (k+3<\ell\le m-1)\text{, но } \{det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k-1}, \{det(\bar{\Lambda}_j)\ne 0\}_{j=k+1}^{\ell-1} \text{ и } \{det(\bar{\bar{\Lambda}}_j)\ne 0\}_{j=\ell+1}^{m+1}] \\ \underline{\text{либо}}\ [det(G_k)=0 \quad det(\bar{G}_\ell)=0 \text{, для любого } k \text{ фиксированного и любого} \\ \ell \text{ из } (2\le\ell<k-3) \text{, но } \{det(G_j)\ne 0\}_{j=k-1}^{m-1}, \{det(\bar{G}_j)\ne 0\}_{j=\ell-1}^{k+1} \text{ и } \{det(\bar{\bar{G}}_j)\ne 0\}_{j=0}^{\ell+1}]. \end{array}\right.$$

III. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{k-2}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m}=0$ и $\Delta_{k+2}^{m}=0]\}$ – равны нулю только по два соседних минора каждого типа, то

$$\left\{\begin{array}{l} [\,det(\Lambda_k)=0 \text{ и } det(\bar{\Lambda})_{k+3}=0 \text{, для любого } k \text{ из } (3\le k\le m-4)\text{, но} \\ \{det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k-1} \text{ и } \{det(\bar{\Lambda}_j)\ne 0\}_{j=k+4}^{m+1}] \ \underline{\text{либо}} \\ [\,det(G_k)=0 \text{ и } det(\bar{G}_{k-3})=0 \text{, для любого } k \text{ из } (5\le k\le m-2)\text{, но} \\ \{det(G_j)\ne 0\}_{j=k+1}^{m-1} \text{ и } \{det(\bar{G}_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-4}]. \end{array}\right.$$

Отметим, что комбинации нулевых миноров выбраны в соответствии с определениями $\{\Lambda,\bar{\Lambda}\}$ (2.I) и $\{G,\bar{G}\}$ (2.2), а также с учётом леммы IO/I3)/ при условии $det(\mathbb{C})\ne 0$.

Имеет место следующая

<u>Теорема 2.2</u>. Пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_j, p_j\}_{j=2}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также для последовательностей матриц $\{\Lambda,\bar{\Lambda}\}$ (2.I) либо $\{G,\bar{G}\}$ (2.2) выполняется одно из условий II ; III. Тогда для $\mathbb{C}$ (I.I) имеют место следующие единственные матрично-факторизованные представления:

<u>Представление 2.3</u> (при условии $П_1$)

$$
\begin{pmatrix}
E_1 \\
(-\beta_2)\,E_2 \\
--- \\
(-\beta_{k-2})\,E_{k-2} \\
(-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k\,k-1} & E_k \end{bmatrix} \\
[-\bar\beta_{k+1}]\,E_{k+1} \\
(-\bar\beta_{k+2})\,E_{k+2} \\
--- \\
(-\bar\beta_{l-2})\,E_{l-2} \\
(-\bar\beta_{l-1})\begin{bmatrix} E_{l-1} & \\ 0_{l\,l-1} & E_l \end{bmatrix} \\
[-\bar{\bar\beta}_{l+1}]\,E_{l+1} \\
(-\bar{\bar\beta}_{l+2})\,E_{l+2} \\
--- \\
(-\bar{\bar\beta}_m)\,E_m
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
-- \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{pmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{pmatrix} \\
\bar\Lambda_{k+2} \\
\bar\Lambda_{k+3} \\
-- \\
\bar\Lambda_{l-1} \\
\begin{pmatrix} \bar\Lambda_l & z_l \\ p_l & q_l \end{pmatrix} \\
\bar{\bar\Lambda}_{l+2} \\
\bar{\bar\Lambda}_{l+3} \\
-- \\
\bar{\bar\Lambda}_m \\
\bar{\bar\Lambda}_{m+1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
E_1\,(-c_2) \\
--- \\
E_{k-2}\,(-c_{k-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1\,k} \\ & E_k \end{bmatrix}[-\bar c_{k+1}] \\
E_{k+1}\,(-\bar c_{k+2}) \\
E_{k+2}\,(-\bar c_{k+3}) \\
--- \\
E_{l-2}\,(-\bar c_{l-1}) \\
\begin{bmatrix} E_{l-1} & 0_{l-1\,l} \\ & E_l \end{bmatrix}[-\bar{\bar c}_{l+1}] \\
E_{l+1}\,(-\bar{\bar c}_{l+2}) \\
E_{l+2}\,(-\bar{\bar c}_{l+3}) \\
--- \\
E_{m-1}\,(-\bar{\bar c}_m) \\
E_m
\end{pmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda,\bar\Lambda) \qquad (2.7)
$$

, где

$$
\begin{cases}
\left\{\beta_{j+1} = -(p_{j+1}\cdot\Lambda_{j+1}^{-1}),\ c_{j+1} = -(\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\right\}_{j=1}^{k-2},\ \left\{\bar\beta_{j+1} = -(p_{j+1}\cdot\bar\Lambda_{j+1}^{-1}),\ \bar c_{j+1} = -(\bar\Lambda_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\right\}_{j=k+1}^{l-2}, \\
\left\{\bar{\bar\beta}_{j+1} = -(p_{j+1}\cdot\bar{\bar\Lambda}_{j+1}^{-1}),\ \bar{\bar c}_{j+1} = -(\bar{\bar\Lambda}_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\right\}_{j=l+1}^{m-1}.\ [\bar\beta]_{k+1} = -[0_{k+1\,k-1}, p_{k+1}]\cdot\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{pmatrix}^{-1},\ [\bar c]_{k+1} = -\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix} 0_{k-1\,k+1} \\ z_{k+1}\end{pmatrix}, \\
[\bar{\bar\beta}]_{l+1} = -[0_{l+1\,l-1}, p_{l+1}]\cdot\begin{pmatrix}\bar\Lambda_l & z_l \\ p_l & q_l\end{pmatrix}^{-1},\ [\bar{\bar c}]_{l+1} = -\begin{bmatrix}\bar\Lambda_l & z_l \\ p_l & q_l\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0_{l-1\,l+1} \\ z_{l+1}\end{bmatrix}.\ \text{При этом}\ \det\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0,\ \det\begin{pmatrix}\Lambda_l & z_l \\ p_l & q_l\end{pmatrix}\neq 0.
\end{cases}
\qquad (2.8)
$$

Последовательности матриц $\{\Lambda, \bar\Lambda, \bar{\bar\Lambda}\}$ полностью определены в соответствии с (2.I).

<u>Представление 2.4</u> (при условии $П_2$)

$$
\begin{pmatrix}
E_1\,(-\hat\beta_2) \\
--- \\
E_{l-2}\,(-\hat\beta_{l-1}) \\
E_{l-1}\,[-\hat\beta_l] \\
\begin{bmatrix} E_l & 0_{l\,l+1} \\ & E_{l+1} \end{bmatrix}(-\hat\beta_{l+2}) \\
E_{l+2}\,(-\hat\beta_{l+3}) \\
E_{l+3}\,(-\hat\beta_{l+4}) \\

\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\bar{\bar G}_0 \\
-- \\
\bar{\bar G}_{l-3} \\
\bar{\bar G}_{l-2} \\
\begin{bmatrix} q_l & z_{l+1} \\ p_{l+1} & \bar G_l \end{bmatrix} \\
\bar G_{l+1} \\
\bar G_{l+2} \\
\bar G_{l+3} \\
--
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
E_1 \\
(-\hat c_2)\,E_2 \\
--- \\
(-\hat c_{l-2})\,E_{l-2} \\
(-\hat c_{l-1})\,E_{l-1} \\
[-\hat c_l]\begin{bmatrix} E_l & \\ 0_{l+1\,l} & E_{l+1} \end{bmatrix} \\
(-\hat c_{l+2})\,E_{l+2} \\
(-\hat c_{l+3})\,E_{l+3} \\

\end{pmatrix}
= \mathbb{C}(G,\bar G)
$$

$$
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & \\
& E_{k-2} & (-\hat{\bar\beta})_{k-1} & & & & \\
& & E_{k-1} & [-\hat{\bar\beta}]_{k} & & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_k & 0_{k\,k+1} \\ & E_{k+1} \end{bmatrix} & (-\hat\beta)_{k+2} & & \\
& & & & E_{k+2} & (-\hat\beta)_{k+3} & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & E_{m-1} & (-\hat\beta)_m \\
& & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & \\
& \bar G_{k-3} & & & & & \\
& & \bar G_{k-2} & & & & \\
& & & \begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & & & \\
& & & & G_{k+1} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & G_{m-2} & \\
& & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\ddots & & & & & & \\
(-\hat{\bar C})_{k-2} & E_{k-2} & & & & & \\
& (-\hat{\bar C})_{k-1} & E_{k-1} & & & & \\
& & [-\hat C]_k & \begin{bmatrix} E_k & \\ 0_{k+1\,k} & E_{k+1} \end{bmatrix} & & & \\
& & & (-\hat C)_{k+2} & E_{k+2} & & \\
& & & & (-\hat C)_{k+3} & E_{k+3} & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & (-\hat C)_m & E_m
\end{bmatrix}, \quad \text{где} \tag{2.9}
$$

$$
\begin{cases}
\left\{\hat\beta_{j+1} = -(z_{j+1}\cdot G_j^{-1}),\ \hat C_{j+1} = -(G_j^{-1}\cdot p_{j+1})\right\}_{j=k+1}^{m-1},\ \left\{\hat{\bar\beta}_{j+1} = -(z_{j+1}\cdot \bar G_j^{-1}),\ \hat{\bar C}_{j+1} = -(\bar G_j^{-1}\cdot p_{j+1})\right\}_{j=l+1}^{k-2}, \\
\hat\beta_k = -[z_k, 0_{k-1\,k+1}]\cdot\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1},\ \hat C_k = -\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p_k \\ 0_{k+1\,k-1} \end{bmatrix},\ \hat{\bar\beta}_l = -[z_l, 0_{l-1\,l+1}]\cdot\begin{bmatrix} q_l & z_{l+1} \\ p_{l+1} & \bar G_l \end{bmatrix}^{-1}, \\
\hat{\bar C}_l = -\begin{bmatrix} q_l & z_{l+1} \\ p_{l+1} & \bar G_l \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p_l \\ 0_{l+1\,l-1} \end{bmatrix}.\ \text{При этом}\quad \det\left(\begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix}\right) \neq 0 \neq \det\left(\begin{bmatrix} q_l & z_{l+1} \\ p_{l+1} & \bar G_l \end{bmatrix}\right).
\end{cases} \tag{2.10}
$$

Последовательности матриц $\{G, \bar G, \bar{\bar G}\}$ -полностью определены в соответствии с (2.2).

<u>Представление 2.5</u> (при условии $Ш_I$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & & & \\
(-\beta)_2 & E_2 & & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & & \\
& & (-\beta)_{k-2} & E_{k-2} & & & & & & \\
& & & (-\beta)_{k-1} & \begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k\,k-1} & E_k \end{bmatrix} & & & & & \\
& & & & [-\bar\beta]_{k+1} & E_{k+1} & & & & \\
& & & & & (-\bar\beta)_{k+2} & \begin{bmatrix} E_{k+2} & \\ 0_{k+3\,k+2} & E_{k+3} \end{bmatrix} & & & \\
& & & & & & [-\bar{\bar\beta}]_{k+4} & E_{k+4} & & \\
& & & & & & & (-\bar{\bar\beta})_{k+5} & E_{k+5} & \\
& & & & & & & & \ddots & \ddots \\
& & & & & & & & (-\bar{\bar\beta})_m & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 & & & & & & & & \\
& \Lambda_3 & & & & & & & \\
& & \ddots & & & & & & \\
& & & \Lambda_{k-1} & & & & & \\
& & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k \end{bmatrix} & & & & \\
& & & & & \bar\Lambda_{k+2} & & & \\
& & & & & & \begin{bmatrix} \bar\Lambda_{k+3} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & q_{k+3} \end{bmatrix} & & \\
& & & & & & & \bar{\bar\Lambda}_{k+5} & \\
& & & & & & & & \bar{\bar\Lambda}_{k+6} \\
& & & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & & \bar{\bar\Lambda}_{m+1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & (-c)_2 & & & & & & & \\
& \ddots & \ddots & & & & & & \\
& & E_{k-2} & (-c)_{k-1} & & & & & \\
& & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1\,k} \\ & E_k \end{bmatrix} & [-\bar c]_{k+1} & & & & \\
& & & & E_{k+1} & (-\bar c)_{k+2} & & & \\
& & & & & \begin{bmatrix} E_{k+2} & 0_{k+2\,k+3} \\ & E_{k+3} \end{bmatrix} & [-\bar{\bar c}]_{k+4} & & \\
& & & & & & E_{k+4} & (-\bar{\bar c})_{k+5} & \\
& & & & & & & E_{k+5} & (-\bar{\bar c})_{k+6} \\
& & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & E_{m-1} \quad (-\bar{\bar c})_m \\
& & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(\Lambda, \bar\Lambda) \tag{2.11}
$$

, где

$$
\begin{cases}
\left\{\beta_{j+1}, c_{j+1}\right\}_{j=1}^{k-2},\ ([\bar\beta]_{k+1}, [\bar c]_{k+1})\ \text{и}\ (\bar\beta_{k+2}, \bar c_{k+2})\ \text{– определены в (2.8)}, \\
\left\{\bar{\bar\beta}_{j+1} = -(p_{j+1}\cdot\bar{\bar\Lambda}_{j+1}^{-1}),\ \bar{\bar c}_{j+1} = -(\bar{\bar\Lambda}_{j+1}^{-1}\cdot z_{j+1})\right\}_{j=k+4}^{m-1},\quad [\bar{\bar\beta}]_{k+4} = -[0_{k+4\,k+2}, p_{k+4}]\cdot\begin{bmatrix} \bar\Lambda_{k+3} & z_{k+3} \\ p_{k+3} & q_{k+3} \end{bmatrix}^{-1},
\end{cases}
$$

$$[\bar{\bar c}]_{k+4}=-\begin{bmatrix}\bar\Lambda_{k+3} & z_{k+3}\\ p_{k+3} & q_{k+3}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}0_{k+2,k+4}\\ z_{k+4}\end{bmatrix}.\ \text{При этом}\quad \det\left(\begin{bmatrix}\Lambda_k & z_k\\ p_k & q_k\end{bmatrix}\right)\neq 0\neq \det\left(\begin{bmatrix}\bar\Lambda_{k+3} & z_{k+3}\\ p_{k+3} & q_{k+3}\end{bmatrix}\right). \qquad (2.12)$$

Последовательности матриц $\{\Lambda,\bar\Lambda,\bar{\bar\Lambda}\}$ полностью определены в соответствии с (2.I).

Представление 2.6 (при условии $Ш_2$)

$$\begin{pmatrix}
E_1\ (-\hat{\hat\beta}_2) & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & \\
& E_{k-5}\ (-\hat{\hat\beta}_{k-4}) & & & & & & & & \\
& & E_{k-4}\ [-\hat{\hat\beta}]_{k-3} & & & & & & & \\
& & & \begin{bmatrix}E_{k-3} & 0_{k-3,k-2}\\ & E_{k-2}\end{bmatrix}(-\hat{\hat\beta}_{k-1}) & & & & & & \\
& & & & E_{k-1}\ [-\hat\beta]_k & & & & & \\
& & & & & \begin{bmatrix}E_k & 0_{k,k+1}\\ & E_{k+1}\end{bmatrix}(-\hat\beta_{k+2}) & & & & \\
& & & & & & E_{k+2}\ (-\hat\beta_{k+3}) & & & \\
& & & & & & & E_{k+3}\ (-\hat\beta_{k+4}) & & \\
& & & & & & & \cdots & & \\
& & & & & & & & E_{m-1}\ (-\hat\beta_m) & \\
& & & & & & & & & E_m
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\bar{\bar G}_0 & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & \\
& \bar{\bar G}_{k-6} & & & & & & & & \\
& & \bar{\bar G}_{k-5} & & & & & & & \\
& & & \begin{bmatrix}q_{k-3} & z_{k-2}\\ p_{k-2} & \bar G_{k-3}\end{bmatrix} & & & & & & \\
& & & & \bar G_{k-2} & & & & & \\
& & & & & \begin{bmatrix}q_k & z_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{bmatrix} & & & & \\
& & & & & & G_{k+1} & & & \\
& & & & & & & G_{k+2} & & \\
& & & & & & & \cdots & & \\
& & & & & & & & G_{m-2} & \\
& & & & & & & & & G_{m-1}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
E & & & & & & & & & \\
(-c)_2\ E_2 & & & & & & & & & \\
\cdots & & & & & & & & & \\
& (-\hat{\hat c})_{k-5}\ E_{k-5} & & & & & & & & \\
& & (-\hat{\hat c})_{k-4}\ E_{k-4} & & & & & & & \\
& & & [-\hat{\hat c}]_{k-3}\begin{bmatrix}E_{k-3} & \\ 0_{k-2,k-3} & E_{k-2}\end{bmatrix} & & & & & & \\
& & & & (-\hat c)_{k-1}\ E_{k-1} & & & & & \\
& & & & & [-\hat c]_k\begin{bmatrix}E_k & \\ 0_{k+1,k} & E_{k+1}\end{bmatrix} & & & & \\
& & & & & & (-\hat c)_{k+2}\ E_{k+2} & & & \\
& & & & & & \cdots & & & \\
& & & & & & & (-\hat c)_{m-1}\ E_{m-1} & & \\
& & & & & & & & (-\hat c)_m\ E_m &
\end{pmatrix}
=\mathbf{C}(G,\bar G) \qquad (2.13)$$

, где

$$\begin{cases}
\{\hat\beta_{j+1},\hat c_{j+1}\}_{j=k+1}^{m-1},\ ([\hat{\hat\beta}]_k,[\hat{\hat c}]_k)\ \text{и}\ (\hat{\hat\beta}_{k-1},\hat{\hat c}_{k-1})\quad \text{определены в (2.I0)},\\
\left\{\hat{\hat\beta}_{j+1}=-(z_{j+1}\bar{\bar G}_j^{-1}),\ \hat{\hat c}_{j+1}=-(\bar{\bar G}_j^{-1}p_{j+1})\right\}_{j=1}^{k-5},\ [\hat{\hat\beta}]_{k-3}=-[z_{k-3},0_{k-4,k-2}]\cdot\begin{bmatrix}q_{k-3} & z_{k-2}\\ p_{k-2} & \bar G_{k-3}\end{bmatrix}^{-1},\\
[\hat{\hat c}]_{k-3}=-\begin{bmatrix}q_{k-3} & z_{k-2}\\ p_{k-2} & \bar G_{k-3}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix}p_{k-3}\\ 0_{k-2,k-4}\end{bmatrix}.\quad \text{При этом}\ \det\left(\begin{bmatrix}q_{k-3} & z_{k-2}\\ p_{k-2} & \bar G_{k-3}\end{bmatrix}\right)\neq 0\neq\det\left(\begin{bmatrix}q_k & z_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{bmatrix}\right).
\end{cases} \qquad (2.I4)$$

Последовательности матриц $\{\Lambda,\bar\Lambda,\bar{\bar\Lambda}\}$ полностью определены в соответствии с (2.I).

Доказательство. Справедливость представлений (2.7)+(2.I4), при соответствующих условиях, устанавливается путём перемножения факторизирующих матриц, входящих в каждое из них. При этом следует учитывать определения матричных последовательностей $\{\Lambda,\bar\Lambda\}$ (2.I) и $\{G,\bar G\}$ (2.2), а также определения соответствующих структурных матриц ($[\bar c]$, $[\bar{\bar c}]$, $[\bar\beta]$, $[\bar{\bar\beta}]$) и ($[\hat c]$, $[\hat{\hat c}]$, $[\hat\beta]$, $[\hat{\hat\beta}]$). Невырожденность матриц $\begin{pmatrix}\Lambda_{j+1} & z_j\\ p_j & q_j\end{pmatrix}$ либо матриц $\begin{pmatrix}q_j & z_{j+1}\\ p_{j+1} & G_j\end{pmatrix}$, при соответствующих условиях, снова является прямым следствием леммы IO/I$_{3)}$/ о необращении в нуль одновременно двух подряд идущих однотипных (верхних либо нижних) ведущих блочно-угловых миноров невырожденных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) . Справедливость представлений 2.3÷2.6 установлена.

В следующей теореме рассматриваются представления $\mathbb{C}$ (I.I) при всевозможных комбинациях нулевых ведущих верхних (либо нижних) блочно-угловых миноров матрицы, т.е. при следующих условиях:

IУ. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{\ell_i-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m}=0$ и $\Delta_{\ell_j+1}^{m}=0]\}$ – равны нулю любое конечное число отдалённых миноров каждого типа, то

$$\begin{cases}[\det(\Lambda_k)=0 \text{ и } \det(\bar\Lambda_{\ell_i})=0 \text{ для любых целых } \ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n \text{ таких, что}\\ (k<\ell_1<\ell_i) \text{ и } (\ell_{i-1}+3<\ell_i), \text{ где } i=1,2,\dots,n-1] \text{ \underline{либо}}\\ [\det(G_k)=0 \text{ и } \det(\bar G_{\ell_j})=0 \text{ для любых целых } \ell_n,\ell_{n-1},\dots,\ell_1 \text{ таких, что}\\ (k>\ell_n>\ell_j \text{ и } (\ell_{j+1}-3>\ell_j), \text{ где } j=n-1,n-2,\dots,1].\end{cases}$$

У. Если $\{[\Delta_1^{k-1}=0$ и $\Delta_1^{\ell_i-1}=0]$ <u>либо</u> $[\Delta_{k+1}^{m}=0$ и $\Delta_{\ell_j+1}^{m}=0]\}$ – равны нулю любое конечное число соседних миноров каждого типа, то

$$\begin{cases}[\det(\Lambda_k)=0 \text{ и } \det(\bar\Lambda_{\ell_i})=0 \text{ для всех целых } \ell_1,\ell_2,\dots,\ell_n \text{ таких, что}\\ (k<\ell_1<\ell_i) \text{ и } (\ell_{i-1}+3=\ell_i), \text{ где } i=1,2,\dots,n-1] \text{ \underline{либо}}\\ [\det(G_k)=0 \text{ и } \det(\bar G_{\ell_j})=0 \text{ для всех целых } \ell_n,\ell_{n-1},\dots,\ell_1 \text{ таких, что}\\ (k>\ell_n>\ell_j) \text{ и } (\ell_{j+1}-3=\ell_j), \text{ где } j=n-1,n-2,\dots,1].\end{cases}$$

Имеет место следующая

<u>Теорема 2.3</u>. Пусть $\mathbb{C}$ –невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{r_j,p_j\}_{j=2}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также для последовательностей матриц $\{\Lambda,\bar\Lambda\}$ (2.I) либо $\{G,\bar G\}$ (2.2) выполняется одно из условий IУ; У. Тогда для $\mathbb{C}$ (I.I) имеют место следующие единственные матрично-факторизованные представления:

<u>Представление 2.7</u> (при условии IУ$_{I)}$)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ (-\beta_2)E_2 & & & & & \\ & --- & & & & \\ & & (-\beta_{k-2})E_{k-1} & & & \\ & & & (-\beta_{k-1})\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k\,k-1} & E_k\end{bmatrix} & & \\ & & & & [-\bar\beta_{k+1}]E_{k+1} & \\ & & & & & --- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & \\ & \Lambda_3 & & & \\ & & -- & & \\ & & & \Lambda_{k-1} & \\ & & & & \begin{bmatrix}\Lambda_k & r_k\\ p_k & q_k\end{bmatrix} \\ & & & & & \bar\Lambda_{k+2} \\ & & & & & & -- \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1(-c_2) & & & & \\ & E_2(-c_3) & & & \\ & & --- & & \\ & & & E_{k-2}(-c_{k-1}) & \\ & & & & \begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1\,k} \\ & E_k\end{bmatrix}[-\bar c_{k+1}] \\ & & & & & E_{k+1}(-\bar c_{k+2}) \\ & & & & & & ---- \end{bmatrix}$$

$$
\begin{pmatrix}
\ddots &&&&&&&&&&& \\
& (-\bar{\beta}_{k'-2})\,E_{k'-2} &&&&&&&&&& \\
&& (-\bar{\beta}_{k'-1})\begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ \mathbf{0}_{k'k'-1k'} & E \end{bmatrix} &&&&&&&&& \\
&&& [-\bar{\bar{\beta}}_{k'+1}]\,E_{k'+1} &&&&&&&& \\
&&&& (-\bar{\bar{\beta}}_{k'+2})\,E_{k'+2} &&&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&&& \\
&&&&&& (-\bar{\bar{\beta}}_{k''-2})\,E_{k''-2} &&&&& \\
&&&&&&& (-\bar{\bar{\beta}}_{k''-1})\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ \mathbf{0}_{k''k''-1k''} & E \end{bmatrix} &&&& \\
&&&&&&&& [-\bar{\bar{\bar{\beta}}}_{k''+1}]\,E_{k''+1} &&& \\
&&&&&&&&& (-\bar{\bar{\bar{\beta}}}_{k''+2})\,E_{k''+2} && \\
&&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&&& (-\bar{\bar{\bar{\beta}}}_{m})\,E_{m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\ddots &&&&&&&&&&& \\
& \bar{\Lambda}_{k'-1} &&&&&&&&&& \\
&& \begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & z_{k'} \\ p_{k'} & q_{k'} \end{bmatrix} &&&&&&&&& \\
&&& \bar{\bar{\Lambda}}_{k'+2} &&&&&&&& \\
&&&& \bar{\bar{\Lambda}}_{k'+3} &&&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&&& \\
&&&&&& \bar{\bar{\Lambda}}_{k''-1} &&&&& \\
&&&&&&& \begin{bmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & z_{k''} \\ p_{k''} & q_{k''} \end{bmatrix} &&&& \\
&&&&&&&& \bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_{k''+2} &&& \\
&&&&&&&&& \bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_{k''+3} && \\
&&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&&& \bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_{m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\ddots &&&&&&&&&&& \\
& E_{k'-2}\,(-\bar{c}_{k'-1}) &&&&&&&&&& \\
&& \begin{bmatrix} E_{k'-1} & \mathbf{0}_{k'-1k'} \\ & E_{k'} \end{bmatrix}[-\bar{\bar{c}}_{k'+1}] &&&&&&&&& \\
&&& E_{k'+1}\,(-\bar{\bar{c}}_{k'+2}) &&&&&&&& \\
&&&& E_{k'+2}\,(-\bar{\bar{c}}_{k'+3}) &&&&&&& \\
&&&&& \ddots &&&&&& \\
&&&&&& E_{k''-2}\,(-\bar{\bar{c}}_{k''-1}) &&&&& \\
&&&&&&& \begin{bmatrix} E_{k''-1} & \mathbf{0}_{k''-1k''} \\ & E_{k''} \end{bmatrix}[-\bar{\bar{\bar{c}}}_{k''+1}] &&&& \\
&&&&&&&& E_{k''+1}\,(-\bar{\bar{\bar{c}}}_{k''+2}) &&& \\
&&&&&&&&& \ddots && \\
&&&&&&&&&& E_{m-1}\,(-\bar{\bar{\bar{c}}}_{m}) & \\
&&&&&&&&&&& E_m
\end{pmatrix}
= \mathfrak{C}(\Lambda,\bar{\Lambda}) \qquad (2.15)
$$

, где

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(k'=\ell_{i-1},\ k''=\ell_i,\ \text{где } \ell_{i-1}+3<\ell_i);\ \{\beta_{j+1},[\bar{\beta}]_{k+1};\ c_{j+1},[\bar{c}]_{k+1}\}_{j=1}^{k-2},\ \{\bar{\beta}_{j+1},[\bar{\beta}]_{k'+1},\bar{c}_{j+1},[\bar{c}]_{k'+1}\}_{j=k'+1}^{k''-1} \text{ —} \\
\text{определены в (2.8),} \qquad \{\bar{\bar{\beta}}_{j+1}=-(p_{j+1}\bar{\bar{\Lambda}}^{-1}_{j+1}),\ \bar{\bar{c}}_{j+1}=-(\bar{\bar{\Lambda}}^{-1}_{j+1} z_{j+1})\}_{j=k''+1}^{m-1} \\
[\bar{\bar{\beta}}]_{k''+1}=-[\mathbf{0}_{k''+1k''-1},p_{k''+1}]\cdot\begin{bmatrix}\bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & z_{k''} \\ p_{k''} & q_{k''}\end{bmatrix}^{-1},\quad [\bar{\bar{c}}]_{k''+1}=-\begin{bmatrix}\bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & z_{k''} \\ p_{k''} & q_{k''}\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{0}_{k''-1k''+1} \\ z_{k''+1}\end{bmatrix}.\ \text{При этом} \\
\det\begin{pmatrix}\Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{pmatrix}\neq 0\neq\det\begin{pmatrix}\bar{\Lambda}_{k'} & z_{k'} \\ p_{k'} & q_{k'}\end{pmatrix}\neq 0\neq\det\begin{pmatrix}\bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & z_{k''} \\ p_{k''} & q_{k''}\end{pmatrix}.\ \text{Последовательности матриц} \\
\{\Lambda,\bar{\Lambda},\bar{\bar{\Lambda}},\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}\}\ \text{полностью определены в соответствии с (2.I).}
\end{array}
\right. \qquad (2.16)
$$

Представление 2.8 (при условии IY_2)

$$
\begin{pmatrix}
E_1(-\hat{\hat{\hat{\beta}}}_2) &&&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&&& \\
&& E_{k''-2}(-\hat{\hat{\beta}}_{k''-1}) &&&&&&&&& \\
&&& E_{k''-1}[-\hat{\beta}]_{k''} &&&&&&&& \\
&&&& \begin{bmatrix} E & \mathbf{0}_{k''k''k''+1} \\ & E_{k''+1} \end{bmatrix}(-\hat{\hat{\beta}}_{k''+2}) &&&&&&& \\
&&&&& E_{k''+2}(-\hat{\beta}_{k''+3}) &&&&&& \\
&&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&&& E_{k'-2}(-\hat{\hat{\beta}}_{k'-1}) &&&& \\
&&&&&&&& E_{k'-1}[-\hat{\beta}]_{k'} &&& \\
&&&&&&&&& \begin{bmatrix} E & \mathbf{0}_{k'k'k'+1} \\ & E_{k'+1} \end{bmatrix}(-\hat{\hat{\beta}}_{k'+2}) && \\
&&&&&&&&&& E_{k'+2}(-\hat{\beta}_{k'+3}) & \\
&&&&&&&&&&& E_{k'+3}(-\hat{\beta}_{k'+4}) \\
&&&&&&&&&&& \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\bar{\bar{\bar{G}}}_0 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& \bar{\bar{G}}_{k''-3} &&&&&&&& \\
&&& \bar{\bar{G}}_{k''-2} &&&&&&& \\
&&&& \begin{bmatrix} q_{k''} & z_{k''+1} \\ p_{k''+1} & \bar{\bar{G}}_{k''} \end{bmatrix} &&&&&& \\
&&&&& \bar{\bar{G}}_{k''+1} &&&&& \\
&&&&&& \ddots &&&& \\
&&&&&&& \bar{G}_{k'-3} &&& \\
&&&&&&&& \bar{G}_{k'-2} && \\
&&&&&&&&& \begin{bmatrix} q_{k'} & z_{k'+1} \\ p_{k'+1} & \bar{G}_{k'} \end{bmatrix} & \\
&&&&&&&&&& \bar{G}_{k'+1} \\
&&&&&&&&&& \bar{G}_{k'+2} \\
&&&&&&&&&& \ddots
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
E_1 &&&&&&&&&&& \\
(-\hat{\hat{c}}_2)E_2 &&&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&&& \\
&& (-\hat{\hat{c}}_{k''-2})E_{k''-2} &&&&&&&&& \\
&&& (-\hat{\hat{c}}_{k''-1})E_{k''-1} &&&&&&&& \\
&&&& [-\hat{\hat{c}}]_{k''}\begin{bmatrix} E_{k''} & \\ \mathbf{0}_{k''+1k''} & E_{k''+1} \end{bmatrix} &&&&&&& \\
&&&&& (-\hat{c}_{k''+2})E_{k''+2} &&&&&& \\
&&&&&& \ddots &&&&& \\
&&&&&&& (-\hat{c}_{k'-2})E_{k'-2} &&&& \\
&&&&&&&& (-\hat{c}_{k'-1})E_{k'-1} &&& \\
&&&&&&&&& [-\hat{c}]_{k'}\begin{bmatrix} E_{k'} & \\ \mathbf{0}_{k'+1k'} & E_{k'+1} \end{bmatrix} && \\
&&&&&&&&&& (-\hat{c}_{k'+2})E_{k'+2} & \\
&&&&&&&&&&& \ddots
\end{pmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}
E_{k-2}(-\bar{\beta})_{k-1} & & & & & & & \\
& E_{k-1}(-\hat{\beta})_{k} & & & & & & \\
& & \begin{bmatrix} E_k & q_{k\,k+1} \\ & E_{k+1}\end{bmatrix}(-\hat{\beta})_{k+2} & & & & & \\
& & & E_{k+2}(-\hat{\beta})_{k+3} & & & & \\
& & & & E_{k+3}(-\hat{\beta})_{k+4} & & & \\
& & & & & \ddots & & \\
& & & & & & E_{m-1}(-\hat{\beta})_{m} & \\
& & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{G}_{k-3} & & & & & \\
& \bar{G}_{k-2} & & & & \\
& & \begin{bmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & & & \\
& & & G_{k+1} & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & G_{m-2} \\
& & & & & & G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
(-\hat{\bar{c}})_{k-2}E_{k-2} & & & & & & \\
& (-\hat{c})_{k-1}E_{k-1} & & & & & \\
& & [-\hat{c}]_k\begin{bmatrix} E_k & \\ 0_{k+1\,k} & E_{k+1}\end{bmatrix} & & & & \\
& & & (-\hat{c})_{k+2}E_{k+2} & & & \\
& & & & (-\hat{c})_{k+3}E_{k+3} & & \\
& & & & & \ddots & \\
& & & & & & (-\hat{c})_m E_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C}(G,\bar{G}) \tag{2.17}
$$

, где

$$
\left\{
\begin{array}{l}
(k'=\ell_{j+1},\ k''=\ell_j,\ \text{где}\ \ell_{j+1}-3>\ell_j);\ \{\hat{\beta}_{j+1},[\hat{\beta}]_k;\ \hat{c}_{j+1},[\hat{c}]_k\}_{j=k+1}^{m-1},\ \ \{\hat{\bar{\beta}}_{j+1},[\hat{\bar{\beta}}]_{k'};\ \hat{\bar{c}}_{j+1},[\hat{\bar{c}}]_{k'}\}_{j=k'+1}^{k-1}\ - \\
\text{определены в (2.10)}\qquad \{\hat{\bar{\bar{\beta}}}_{j+1}=-(z_{j+1}\cdot\bar{\bar{G}}_j^{-1}),\ \hat{\bar{\bar{c}}}_{j+1}=-(\bar{\bar{G}}_j^{-1}\cdot p_{j+1})\}_{j=1}^{k''-2}, \qquad (2.18) \\
[\hat{\bar{\bar{\beta}}}_{k''}]=-[z_{k''},0_{k''-1\,k''+1}]\cdot\begin{bmatrix} q_{k''} & z_{k''+1} \\ p_{k''+1} & \bar{\bar{G}}_{k''}\end{bmatrix}^{-1},\ \ [\hat{\bar{\bar{c}}}_{k''}]=-\begin{bmatrix} q_{k''} & z_{k''+1} \\ p_{k''+1} & \bar{\bar{G}}_{k''}\end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} p_{k''} \\ 0_{k''+1\,k''-1}\end{bmatrix}.\ \ \text{При этом} \\
\det\begin{pmatrix} q_k & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k\end{pmatrix}\neq 0\neq\det\begin{pmatrix} q_{k'} & z_{k'+1} \\ p_{k'+1} & \bar{G}_{k'}\end{pmatrix}\neq 0\neq\det\begin{pmatrix} q_{k''} & z_{k''+1} \\ p_{k''+1} & \bar{\bar{G}}_{k''}\end{pmatrix}\text{ Последовательности матриц} \\
\{G,\ \bar{G},\ \bar{\bar{G}},\ \bar{\bar{\bar{G}}}\}\ \text{полностью определены в соответствии с (2.2).}
\end{array}
\right.
$$

<u>Представление 2.9</u> (при условии $У_{I}$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\beta)_2E_2 \\
\ddots \\
(-\beta)_{k-1}E_{k-1} \\
(-\beta)_k\begin{bmatrix} E_{k-1} & \\ 0_{k\,k-1} & E_k\end{bmatrix} \\
[-\bar{\beta}]_{k+1}E_{k+1} \\
\ddots \\
(-\bar{\beta})_{k'-1}\begin{bmatrix} E_{k'-1} & \\ 0_{k'\,k'-1} & E_{k'}\end{bmatrix} \\
[-\bar{\beta}]_{k'+1}E_{k'+1} \\
(-\bar{\bar{\beta}})_{k''-1}\begin{bmatrix} E_{k''-1} & \\ 0_{k''\,k''-1} & E_{k''}\end{bmatrix} \\
[-\bar{\bar{\beta}}]_{k''+1}E_{k''+1} \\
(-\bar{\bar{\beta}})_{k''+2}E_{k''+2} \\
\ddots \\
(-\bar{\bar{\beta}})_m E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\Lambda_2 \\
\Lambda_3 \\
\ddots \\
\Lambda_{k-1} \\
\begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & q_k\end{bmatrix} \\
\bar{\Lambda}_{k+2} \\
\ddots \\
\bar{\Lambda}_{k'-1} \\
\begin{bmatrix} \bar{\Lambda}_{k'} & z_{k'} \\ p_{k'} & q_{k'}\end{bmatrix} \\
\bar{\bar{\Lambda}}_{k'+2} \\
\begin{bmatrix} \bar{\bar{\Lambda}}_{k''} & z_{k''} \\ p_{k''} & q_{k''}\end{bmatrix} \\
\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_{k''+2} \\
\ddots \\
\bar{\bar{\bar{\Lambda}}}_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1(-c)_2 \\
\ddots \\
E_{k-2}(-c)_{k-1} \\
\begin{bmatrix} E_{k-1} & 0_{k-1\,k} \\ & E_k\end{bmatrix}[-\bar{c}]_{k+1} \\
E_{k+1}(-\bar{c})_{k+2} \\
\ddots \\
E_{k'-2}(-\bar{c})_{k'-1} \\
\begin{bmatrix} E_{k'-1} & 0_{k'-1\,k'} \\ & E_{k'}\end{bmatrix}[-\bar{c}]_{k'+1} \\
E_{k'+1}(-\bar{\bar{c}})_{k'+2} \\
\begin{bmatrix} E_{k''-1} & 0_{k''-1\,k''} \\ & E_{k''}\end{bmatrix}[-\bar{\bar{c}}]_{k''+1} \\
E_{k''+1}(-\bar{\bar{\bar{c}}})_{k''+2} \\
\ddots \\
E_{m-1}(-\bar{\bar{\bar{c}}})_m \\
E_m
\end{bmatrix}
= \mathbb{C} \tag{2.19}
$$

Здесь $\kappa' = \ell_{i-1}, \kappa'' = \ell_i$, где $\ell_{i-1}+3=\ell_i$); структурные матрицы $\{\beta_{j+1}, [\bar\beta]_{\kappa+1}, \bar\beta_{\kappa'-1}; c_{j+1}, [\bar c]_{\kappa+1}, \bar c_{\kappa+2}\}_{j=2}^{\kappa-2}$, $\{[\bar{\bar\beta}]_{\kappa''+1}, \bar{\bar\beta}_{\kappa''-1}, [\bar{\bar{\bar\beta}}]_{\kappa''+1}, \bar{\bar{\bar\beta}}_{j+1}\}_{j=\kappa''+1}^{m-1}$, $\{[\bar{\bar c}]_{\kappa+1}, \bar{\bar c}_{\kappa+2}, [\bar{\bar{\bar c}}]_{\kappa+1}, \bar{\bar{\bar c}}_{j+1}\}_{j=\kappa''+1}^{m-1}$ – определены в (2.8) и (2.16) соответственно, а последовательности матриц $\{\Lambda, \bar\Lambda, \bar{\bar\Lambda}, \bar{\bar{\bar\Lambda}}\}$ полностью определены в соответствии с (2.1). (2.20)

<u>Представление 2.10</u> (при условии $У_2$)

$$
\begin{bmatrix}
E_1(-\hat{\hat\beta})_2 \\
& \ddots \\
&& E_{\kappa''-2}(-\hat{\bar{\bar\beta}})_{\kappa''-1} \\
&&& E_{\kappa''-1}[-\hat{\hat\beta}]_{\kappa''} \\
&&&& \begin{bmatrix} E_{\kappa''} & 0_{\kappa''\kappa''+1} \\ & E_{\kappa''+1} \end{bmatrix}(-\hat{\bar\beta})_{\kappa'-1} \\
&&&&& E_{\kappa'-1}[-\hat{\hat\beta}]_{\kappa'} \\
&&&&&& \begin{bmatrix} E_{\kappa'} & 0_{\kappa'\kappa'+1} \\ & E_{\kappa'+1} \end{bmatrix}(-\hat{\hat\beta})_{\kappa'+2} \\
&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&& E_{\kappa-1}[-\hat{\bar\beta}]_{\kappa} \\
&&&&&&&&& \begin{bmatrix} E_{\kappa} & 0_{\kappa\kappa+1} \\ & E_{\kappa+1} \end{bmatrix}(-\hat\beta)_{\kappa+2} \\
&&&&&&&&&& E_{\kappa+2}(-\hat\beta)_{\kappa+3} \\
&&&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&&&& E_{m-1}(-\hat\beta)_{m} \\
&&&&&&&&&&&&& E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{\bar G}_0 \\
& \ddots \\
&& \bar{\bar G}_{\kappa''-3} \\
&&& \bar{\bar G}_{\kappa''-2} \\
&&&& \begin{bmatrix} q_{\kappa''} & r_{\kappa''+1} \\ p_{\kappa''+1} & \bar{\bar G}_{\kappa''} \end{bmatrix} \\
&&&&& \bar{\bar G}_{\kappa'-2} \\
&&&&&& \begin{bmatrix} q_{\kappa'} & r_{\kappa'+1} \\ p_{\kappa'+1} & \bar G_{\kappa'} \end{bmatrix} \\
&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&& \bar G_{\kappa-2} \\
&&&&&&&&& \begin{bmatrix} q_{\kappa} & r_{\kappa+1} \\ p_{\kappa+1} & G_{\kappa} \end{bmatrix} \\
&&&&&&&&&& G_{\kappa+1} \\
&&&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&&&& G_{m-1}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 \\
(-\hat c_2)E_2 \\
& \ddots \\
&& (-\hat{\bar c})_{\kappa''-1}E_{\kappa''-1} \\
&&& [-\hat{\hat c}]_{\kappa''}\begin{bmatrix} E_{\kappa''} & \\ 0_{\kappa''+1\kappa''} & E_{\kappa''+1} \end{bmatrix} \\
&&&& (-\hat{\bar c})_{\kappa'-1}E_{\kappa'-1} \\
&&&&& [-\hat{\hat c}]_{\kappa'}\begin{bmatrix} E_{\kappa'} & \\ 0_{\kappa'+1\kappa'} & E_{\kappa'+1} \end{bmatrix} \\
&&&&&& \ddots \\
&&&&&&& (-\hat{\bar c})_{\kappa-1}E_{\kappa-1} \\
&&&&&&&& [-\hat{\bar c}]_{\kappa}\begin{bmatrix} E_{\kappa} & \\ 0_{\kappa+1\kappa} & E_{\kappa+1} \end{bmatrix} \\
&&&&&&&&& (-\hat c)_{\kappa+2}E_{\kappa+2} \\
&&&&&&&&&& (-\hat c)_{\kappa+3}E_{\kappa+3} \\
&&&&&&&&&&& \ddots \\
&&&&&&&&&&&& (-\hat c)_m E_m
\end{bmatrix} = \mathbf{C}. \qquad (2.21)
$$

Здесь ($\kappa'=\ell_{j+1}, \kappa''=\ell_j$, где $\ell_{j+1}-3=\ell_j$); структурные матрицы $\{\beta_{j+1}, [\hat{\bar\beta}]_{\kappa}, \hat{\bar\beta}_{\kappa+2}; c_{j+1}, [\hat c]_{\kappa}, \hat c_{\kappa-1}\}_{j=\kappa+1}^{m-1}$, $\{[\hat{\bar\beta}]_{\kappa'}, \hat{\bar\beta}_{\kappa'-1}, [\hat{\bar{\bar\beta}}]_{\kappa''}, \hat{\hat\beta}_{j+1}\}_{j=1}^{\kappa''-2}$, $\{[\hat{\bar c}]_{\kappa'}, \hat{\bar c}_{\kappa'-1}, [\hat{\bar{\bar c}}]_{\kappa''}, \hat{\hat c}_{j+1}\}_{j=1}^{\kappa''-2}$ определены в (2.12) и (2.18) соответственно, а последовательности матриц $\{G, \bar G, \bar{\bar G}, \bar{\bar{\bar G}}\}$ полностью определены в соответствии с (2.2). (2.22)

<u>Доказательство</u>. Справедливость представлений 2.7÷2.10 опять проверяется перемножением факторизирующих матриц, входящих в каждое из них. При этом также следует учитывать определения последовательностей матриц $\{\Lambda, \bar\Lambda\}$ (2.1) и $\{G, \bar G\}$ (2.2) и определения структурных матриц ($[\bar\beta]$, $[\bar{\bar\beta}]$, $[\bar{\bar{\bar\beta}}]$, $[\bar c]$, $[\bar{\bar c}]$, $[\bar{\bar{\bar c}}]$) и ($[\hat{\bar\beta}]$, $[\hat{\hat\beta}]$, $[\hat{\hat{\hat\beta}}]$, $[\hat c]$, $[\hat{\bar c}]$, $[\hat{\hat c}]$) при соответствующих условиях. Также отметим, что невырожденность матриц

$\begin{pmatrix} \Lambda_j & r_j \\ p_j & q_j \end{pmatrix}$ либо матриц $\begin{pmatrix} q_j & r_{j+1} \\ p_{j+1} & G_j \end{pmatrix}$, при соответствующих условиях, снова является следствием леммы 10 из /1$_3$)/ при $\det(\mathbf{C}) \neq 0$.

Справедливость представлений 2.7÷2.10 установлена.

Замечание 2.I. Сравнивая квазиобобщённые матричные процессы (2.I), (2.2) с введённым нами ранее обобщёнными процессами (I.2), (I.3), нетрудно убедиться в следующем. Во-первых, новые процессы (2.I), (2.2) обладают худшей (по сравнению с процессами (I.2), (I.3)) устойчивостью к накоплению наследственной погрешности из-за округлений на ЭВМ при наличии вырождающихся (или плохо обусловленных) матриц $\{\Lambda_k\}$ или $\{G_k\}$. Это обусловлено тем, что новые процессы (2.I), (2.2), в отличие от введённых ранее финитных (I.2), (I.3), являются непрерывными. Во-вторых, указанный недостаток новых процессов является их характерной особенностью, поскольку такие процессы единственны. На самом деле. Использование нового разбиения C (I.I) ("с запаздыванием") с минимальным расширением блоков в указанных случаях приводит к вырожденности (например, при условии I) матриц

$$\begin{bmatrix} \Lambda_{k-1} & r_{k-1} \\ p_{k-1} & q_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} \\ p_{k+2} & G_{k+1} \end{bmatrix}$$

и, следовательно, к неопределённости процессов $\{\bar\Lambda\}$ (2.I) и $\{\bar G\}$ (2.2), т.к.

$$\bar\Lambda_k = \begin{bmatrix} \Lambda_{k-1} & r_{k-1} \\ p_{k-1} & q_{k-1} \end{bmatrix}, \quad \bar\Lambda_{k+1} = q_k - [0_{k-2,k}, p_k]\cdot\begin{bmatrix} \Lambda_{k-1} & r_{k-1} \\ p_{k-1} & q_{k-1} \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0_{k-2,k} \\ r_k \end{bmatrix} = ?,\ \bar\Lambda_{k+2} = ?, \ldots, \bar\Lambda_{m+1} = ?,$$
$$\bar G_k = \begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} \\ p_{k+2} & G_{k+1} \end{bmatrix}, \quad \bar G_{k-1} = q_k - [r_{k+1}, 0_{k,k+2}]\cdot\begin{bmatrix} q_{k+1} & r_{k+2} \\ p_{k+2} & G_{k+1} \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 0_{k+2,k} \\ p_{k+1} \end{bmatrix} = ?,\ \bar G_{k-2} = ?, \ldots, \bar G_0 = ?. \qquad (2.23)$$

Это же приводит, в свою очередь, к невозможности существования факторизаций C (I.I) вида

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta)_2 E_2 \\ \ddots \\ (-\beta)_{k-3} E_{k-3} \\ (-\beta)_{k-1} \begin{bmatrix} E_{k-2} & \\ 0_{k-1,k-2} & E_{k-1} \end{bmatrix} \\ (-\bar\beta)_k E_k \\ (-\bar\beta)_{k+1} E_{k+1} \\ \ddots \\ (-\bar\beta)_{m-1} E_{m-1} \\ (-\bar\beta)_m E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & \Delta_1^{k-1} = 0 \\ \Lambda_3 \\ \ddots \\ \Lambda_{k-2} \\ \begin{bmatrix} \Lambda_{k-1} & r_{k-1} \\ p_{k-1} & q_{k-1} \end{bmatrix} \\ \bar\Lambda_{k+1} \\ \bar\Lambda_{k+2} \\ \ddots \\ \bar\Lambda_m \\ \bar\Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 (-C)_2 \\ \ddots \\ E_{k-3} (-C)_{k-2} \\ \begin{bmatrix} E_{k-2} & 0_{k-2,k-1} \\ & E_{k-1} \end{bmatrix} [-\bar C]_k \\ E_k (-\bar C)_{k+1} \\ E_{k+1} (-\bar C)_{k+2} \\ \ddots \\ E_{m-1} (-\bar C)_m \\ E_m \end{bmatrix} \overset{?}{=} C(\Lambda, \bar\Lambda), \qquad (2.24)$$

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & (-\hat{\beta}_2) & & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & & \\
 & & E_{k-1} & (-\hat{\hat{\beta}}_k) & & & & \\
 & & & E_k & [-\hat{\hat{\beta}}]_{k+1} & & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} E_{k+1} & \mathbb{0}_{k+1\,k+2} \\ & E_{k+2} \end{bmatrix} & & & \\
 & & & & & E_{k+3} & (-\hat{\beta}_{k+4}) & \\
 & & & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & & E_{m-1} & (-\hat{\beta}_m) \\
 & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\bar{G}_0 & & & & & \\
 & \ddots & & & & \\
 & & \bar{G}_{k-2} & & & \\
 & & & \bar{G}_{k-1} & & \\
 & & & & \begin{bmatrix} q_{k+1} & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_{k+1} \end{bmatrix} & \\
 & & & & & G_{k+2} \\
 & & & \Delta^{m}_{k+1} = 0 & & \ddots \\
 & & & & & G_{m-2} \\
 & & & & & G_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & \\
(-\hat{\hat{c}}_2) & E_2 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & (-\hat{\hat{c}}_k) & E_k & & & \\
 & & & [-\hat{\hat{c}}]_{k+1} & \begin{bmatrix} E_{k+1} & \\ \mathbb{0}_{k+2\,k+1} & E_{k+2} \end{bmatrix} & & \\
 & & & & (-\hat{c}_{k+3}) & E_{k+3} & \\
 & & & & & \ddots & \ddots \\
 & & & & & (-c_m) & E_m
\end{bmatrix}
\overset{?}{=} \mathbb{C}(G,\bar{G}) . \tag{2.25}
$$

Здесь в (2.24), (2.25) структурные матрицы $\{[\bar{\beta}]_k, \bar{\beta}_j;\ [\bar{c}]_k, \bar{c}_j\}_{j=k+1}^{m}$ и $\{[\hat{\hat{\beta}}]_{k+1}, \hat{\hat{\beta}}_j;\ [\hat{\hat{c}}]_{k+1}, \hat{\hat{c}}_j\}_{j=k}^{2}$ не определены в соответствии с (2.23).

<u>Заключение</u>. В работе получено множество матрично-факторизованных представлений невырожденных блочно-трёхдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) при различных комбинациях нулевых однотипных ведущих блочно-угловых миноров. При этом использованы обобщённые матричные процессы нового типа (2.I), (2.2), отличные от ранее введённых в работах /I÷4/.

<u>Литература</u>

I. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринты ОИЯИ: PII-88-598, Дубна I988; PII-88-786, Дубна I988; PII-89-203, Дубна I989; PII-89-340, Дубна I989.

2. Емельяненко Г.А. Блочно-трёхдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск I992; ОИЯИ II-92-4. Дубна I992.

3. Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси I990.

4. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринт ОИЯИ, PII-93-248, Дубна I993.

Рукопись поступила в издательский отдел
I июля I993 года.