объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-93-248

Г.А.Емельяненко, Т.Т.Рахмонов

О СТРУКТУРЕ ПРЯМЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ МАТРИЦ, ОБРАТНЫХ К БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫМ, С ОБРАЩАЮЩИМИСЯ В НУЛЬ ВЕДУЩИМИ БЛОЧНЫМИ УГЛОВЫМИ МИНОРАМИ

Направлено в «Siberian Journal of Computer Mathematics»

1993

I. Введение

Настоящая статья кладёт начало серии работ, углубляющей результаты наших исследований /I÷3/, в которых изучаются факторизационные и вычислительные свойства блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц $\mathbb{C}$ общего вида (I.I). Мы предполагаем завершить эту серию работ публикацией новых результатов по прямым методам декомпозиционного типа решения систем линейных уравнений высокого порядка с блочно-трёхдиагональными матрицами общего вида $\mathbb{C}$ (I.I). В настоящей же статье обобщаются наши результаты из указанных выше работ по различным прямым факторизованным представлениям элементов-блоков матрицы, обратной к $\mathbb{C}$ (I.I), при наличии у неё лишь одного верхнего (либо нижнего) нулевых ведущих блочно-угловых миноров либо плохой обусловленности соответствующих усечённых подматриц.

Ниже во введении мы приведём для удобства лишь те из основных результатов работ /I÷3/, которые наиболее часто используются в настоящей статье.

Итак, пусть $\mathbb{C}$ – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & \\ - & - & - & & \\ & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & p_m & q_m \end{bmatrix}, \quad \text{где} \qquad (I.I)$$

$\{q_j\}_{j=1}^{m}$ – диагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае квадратными матрицами различных размерностей, а $\{p_j, r_j\}_{j=2}^{m}$ – поддиагональные и наддиагональные элементы-блоки матрицы $\mathbb{C}$, являющиеся в общем случае прямоугольными матрицами, минимальные размерности которых определяются размерностями соответствующих квадратных матриц $\{q_{j-1}$ и $q_j\}_{j=2}^{m}$.

Для случая обращения в нуль некоторых из ведущих верхних (нижних) блочных угловых миноров невырожденных матриц $\mathbb{C}$ (I.I) в работах /I÷3/ были введены обобщённые матричные (процессы) – последовательности вида

$$\begin{cases} \text{Если } det(\Lambda_\zeta)\neq 0, \text{ то } \Lambda_{\zeta+1}=q_\zeta-p_\zeta\cdot\Lambda_\zeta^{-1}\cdot z_\zeta,\ \Lambda_2=q_1,\ (det(q_1)\neq 0),\ \zeta=2,\dots,m. \\ \text{Если } det(\Lambda_\zeta)=0 \text{ для любого } \zeta \text{ из } (3\le\zeta\le m-1), \text{ то } \Lambda_{\zeta+1}=?, \text{ но } \Lambda_{\zeta+2}=q_{\zeta+1}, \text{ где } det(q_{\zeta+1})\neq 0. \end{cases} \quad (I.2)$$

$$\begin{cases} \text{Если } det(G_\zeta)\neq 0, \text{ то } G_{\zeta-1}=q_\zeta-z_{\zeta+1}\cdot G_\zeta^{-1}\cdot p_{\zeta+1},\ G_{m-1}=q_m,\ (det(q_m)\neq 0),\ \zeta=m-1,\dots,1. \\ \text{Если } det(G_\zeta)=0 \text{ для любого } \zeta \text{ из } (2\le\zeta\le m-2), \text{ то } G_{\zeta-1}=?, \text{ но } G_{\zeta-2}=q_{\zeta-1}, \text{ где } det(q_{\zeta-1})\neq 0. \end{cases} \quad (I.3)$$

В работе /I$_{\text{I}}$/ были получены матрично-факторизованные представления (I.4)÷(I.7) матриц $\mathbb{C}$ (I.I), учитывающие информацию о нулевых (например, $\Delta_1^{k-1}(k-1)$ – верхнем либо $\Delta_{k+1}^{m}(k+1)$ – нижнем) ведущих блочных угловых минорах, т.е. при условиях

I. $[det(\Lambda_k)=0$ для любого k из $(3\le k\le m-1)$, но $\{det(\Lambda_\zeta)\neq 0\}_{\zeta=2}^{k-1}, \{det(\Lambda_\zeta)\neq 0\}_{\zeta=k+2}^{m+1}]$ либо
П. $[det(G_k)=0$ для любого k из $(2\le k\le m-2)$, но $\{det(G_\mu)\neq 0\}_{\mu=k+1}^{m-1}, \{det(G_\mu)\neq 0\}_{\mu=0}^{k-2}]$.

Итак, имели место следующие представления:

Представление I.I (при условии I)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & (-\beta_{k-1}) & E_{k-1} & & & & \\ & & 0_k & E_k & & & \\ & & & 0_{k+1} & E_{k+1} & & \\ & & & & (-\beta_{k+2}) & E_{k+2} & \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & (-\beta_m) & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ & E_2 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & \\ & & & & E_k & B_{k+1}\dots & B_m \\ & & & & & E_{k+1} & \\ & & & & & & E_{k+2} \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 & & & & & & \\ & \Lambda_3 & & & & & \\ & & \Lambda_{k-1} & & & & \\ & & & \begin{bmatrix} \Lambda_k & z_k \\ p_k & (q_k-\theta_k) \end{bmatrix} & & & \\ & & & & q_{k+1} & & \\ & & & & & \Lambda_{k+3} & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & E_{k-1} & & \\ & & & & E_k & \\ & & & & A_{k+1} & E_{k+1} \\ & & & & A_{k+2} & & E_{k+2} \\ & & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & & A_m & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & (-c_2) & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & E_{k-2} & (-c_{k-1}) & & & \\ & & & E_{k-1} & 0_k & & \\ & & & & E_k & 0_{k+1} & \\ & & & & & E_{k+1} & (-c_{k+2}) \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & E_{m-1} & (-c_m) \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda)=\mathbb{C} \quad (I.4)$$

, где

$$\begin{cases} B_j = z_{k+1}\cdot\prod_{\zeta=k+2}^{j} c_\zeta\cdot\Lambda_{j+1}^{-1},\ j=k+1,\dots,m; \quad A_i=\Lambda_{i+1}^{-1}\cdot\prod_{\zeta=k+2}^{i}\beta_\zeta\cdot p_{k+1},\ i=k+1,\dots,m; \\ \theta_k=\sum_{\zeta=k+1}^{m}(B_\zeta\cdot\Lambda_{\zeta+1}\cdot A_\zeta),\ c_{\zeta+1}=-(\Lambda_{\zeta+1}^{-1}\cdot z_{\zeta+1}),\ \beta_{\zeta+1}=-(p_{\zeta+1}\cdot\Lambda_{\zeta+1}^{-1}),\ 1\le\zeta\le k-1;\ k+2\le\zeta\le m-1. \\ \text{При этом } (q_k-\theta_k)=G_{k-1}, \text{ если } \{det(G_\zeta)\neq 0\}_{\zeta=k}^{m-1}. \end{cases} \quad (I.5)$$

Представление I.2 (при условии П)

$$\begin{bmatrix} E_1 & (-\hat\beta_2) & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & & E_{k-2} & (-\hat\beta_{k-1}) & & & \\ & & & E_{k-1} & 0_k & & \\ & & & & E_k & 0_{k+1} & \\ & & & & & E_{k+1} & (-\hat\beta_{k+2}) \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & E_{m-1} & (-\hat\beta_m) \\ & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & \\ & E_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & E_{k-2} & & \\ & & & & E_{k-1} & \\ \hat A_1 & \dots & & & \hat A_{k-1} & E_k \\ & & & & & & E_{k+1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & E_{m-1} \\ & & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 & & & & & \\ & G_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & G_{k-3} & & \\ & & & & q_{k-1} & \\ & & & & & \begin{bmatrix} (q_k-\hat\theta_k) & z_{k+1} \\ p_{k+1} & G_k \end{bmatrix} \\ & & & & & & G_{k+1} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \hat B_1 & \\ & E_2 & & & \hat B_2 & \\ & & \ddots & & \vdots & \\ & & & E_{k-2} & \hat B_{k-2} & \\ & & & & E_{k-1}\ \hat B_{k-1} & \\ & & & & E_k & \\ & & & & & E_{k+1} \\ & & & & & & E_{k+2} \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & & & \\ (-\hat c_2) & E_2 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & & & & \\ & (-\hat c_{k-2}) & E_{k-2} & & & & \\ & & (-\hat c_{k-1}) & E_{k-1} & & & \\ & & & 0_k & E_k & & \\ & & & & 0_{k+1} & E_{k+1} & \\ & & & & & (-\hat c_{k+2}) & E_{k+2} \\ & & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & & (-\hat c_m) & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(G)=\mathbb{C} \quad (I.6)$$

, где

$$\begin{cases} \hat A_j = P_k \cdot \prod\limits_{\zeta=j+1}^{k-1} \hat c_\zeta \cdot G_{j-1}^{-1}, \ j=1,2,\dots,k-1; \quad \hat B_i = G_{i-1}^{-1} \cdot \prod\limits_{\zeta=i+1}^{k-1} \hat\beta_\zeta \cdot z_k, \ i=1,2,\dots,k-1; \\ \hat\Theta_k = \sum\limits_{\zeta=1}^{k-1} (\hat A_\zeta \cdot G_{\zeta-1} \cdot \hat B_\zeta), \quad \hat c_{\zeta+1} = -(G_\zeta^{-1} P_{\zeta+1}), \ \hat\beta_{\zeta+1} = -(z_{\zeta+1} G_\zeta^{-1}), \ 1 \le \zeta \le k-2; \ k+2 \le \zeta \le m-1. \\ \text{При этом } (q_k - \hat\Theta_k) = \Lambda_{k+1}, \text{ если } \{det(\Lambda_\zeta) \ne 0\}_{\zeta=2}^{k}. \end{cases} \qquad (I.7)$$

Здесь в (I.4)÷(I.7) последовательности матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ определены в соответствии с (I.2)÷(I.3).

В работе /I$_{I)}$/ было получено также множество матрично-факторизованных представлений матриц $\mathbb{C}$ (I.I) при условиях

Ш.$[det(G_k)=0$ для любого k из $(2 \le k \le m-2)$ <u>но</u> $\{det(G_\zeta) \ne 0\}_{\zeta=k+1}^{m-1}, \{det(G_\zeta) \ne 0\}_{\zeta=0}^{k-2}]$

<u>и</u> $[det(\Lambda)_{k+1}=0$ для того же k,<u>но</u> $\{det(\Lambda_\zeta) \ne 0\}_{\zeta=2}^{k}, \{det(\Lambda_\zeta) \ne 0\}_{\zeta=k+3}^{m+1}]$, т.е.

<u>Представления I.3</u> (при условии Ш)

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & & \\ (-z_1) & \cdots & & (-z_{k-1}) & E_k & & & \\ & & & & & E_{k+1} & F_{k+2} \cdots F_m & \\ & & & & & & E_{k+2} & \\ & & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{C}_1^{k-1} & & \mathbb{O} \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & z_{k+1} \\ P_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & \\ \mathbb{O} & & \mathbb{C}_{k+1}^{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \hat F_1 & & & & \\ & E_2 & & & \hat F_2 & & & & \\ & & \ddots & & \vdots & & & & \\ & & & E_{k-1} & \hat F_{k-1} & & & & \\ & & & & E_k & & & & \\ & & & & & E_{k+1} & & & \\ & & & & & (-\hat z_{k+2}) & E_{k+2} & & \\ & & & & & (-\hat z_{k+3}) & & E_{k+3} & \\ & & & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & & & (-\hat z_m) & & & E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}(\Lambda, G) = \mathbb{C} \qquad (I.8)$$

, где

$$\begin{cases} \{z_i = \prod\limits_{\zeta=i+1}^{k} \beta_\zeta\}_{i=1}^{k-1}, \ \{\hat z_i = \prod\limits_{\zeta=k+2}^{i} \hat c_\zeta\}_{i=k+2}^{m}, \ \{F_j = z_{k+2} \cdot \prod\limits_{\zeta=k+3}^{j} c_\zeta \cdot B_{jj}\}_{j=k+2}^{m}, \ \{\hat F_i = B_{ii} \cdot \prod\limits_{\zeta=i+1}^{k-1} \beta_\zeta \cdot z_k\}_{i=1}^{k-1}, \\ \beta_{\zeta+1} = -(P_{\zeta+1} \Lambda_{\zeta+1}^{-1}), \ c_{\zeta+1} = -(\Lambda_{\zeta+1}^{-1} z_{\zeta+1}), \ 1 \le \zeta \le k-1; \ k+2 \le \zeta \le m; \ \hat\beta_{\zeta+1} = -(z_{\zeta+1} G_\zeta^{-1}), \\ \hat c_{\zeta+1} = -(G_\zeta^{-1} P_{\zeta+1}), \ 1 \le \zeta \le k-2, \ k+1 \le \zeta \le m; \ B_{\zeta\zeta} = (\Lambda_{\zeta+1} + G_{\zeta-1} - q_\zeta)^{-1}, \ 1 \le \zeta \le k-1, \ k+2 \le \zeta \le m, \end{cases} \qquad (I.9)$$

а последовательности матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ определены в соответствии с (I.2)÷(I.3).

Здесь $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}$ есть ведущие усечённые (т.е. уменьшенной размерности) блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида (I.I), для которых имеют место (соответственно) представления /I$_{I)}$/вида

$$\begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ (-\beta_2) & E_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & (-\beta_i) & E_i & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\beta_{k-1}) & E_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1} - z_2 \hat c_2] & (z_2) & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & [B_{ii}^{-1} - z_{i+1} \hat c_{i+1}] & (z_{i+1}) & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & [B_{k-2,k-2}^{-1} - z_{k-1} \hat c_{k-1}] & (z_{k-1}) \\ & & & & [B_{k-1,k-1}^{-1}] \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-1}(\Lambda, G) =$$

$$= \begin{bmatrix} [B_{11}^{-1}] & (z_2) & & & & \\ & [B_{22}^{-1} - \beta_2 z_2] & (z_3) & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & [B_{ii}^{-1} - \beta_i z_i] & (z_{i+1}) & \\ & & & & \ddots & \ddots \\ & & & & [B_{k-2,k-2}^{-1} - \beta_{k-2} z_{k-2}] & (z_{k-1}) \\ & & & & & [B_{k-1,k-1}^{-1} - \beta_{k-1} z_{k-1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & & & & \\ (-\hat c_2) & E_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & (-\hat c_i) & E_{i+1} & \\ & & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\hat c) & E_{k-1,k-1} \end{bmatrix}, \qquad (I.10)$$

$$
\begin{bmatrix}
E_{k+2} & & & & \\
(-\beta_{k+3})E_{k+3} & & & & \\
 & \ddots & & & \\
 & (-\beta_i)E_i & & & \\
 & & \ddots & & \\
 & & & (-\beta_m)E_m &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{k+2\,k+2}-z_{k+3}\cdot\hat{c}_{k+3}] & (z)_{k+3} & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & & [B^{-1}_{ii}-z_{i+1}\cdot\hat{c}_{i+1}] & (z)_{i+1} & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & [B^{-1}_{m-1\,m-1}-z_m\cdot\hat{c}_m] & (z)_m \\
 & & & & [B^{-1}_{mm}]
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}^{m}_{k+2}(\Lambda,G)=
$$
$$
=\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{k+2\,k+2}] & (z)_{k+3} & & & \\
 & [B^{-1}_{k+3\,k+3}-\beta_{k+3}\cdot z_{k+3}] & (z)_{k+4} & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & [B^{-1}_{ii}-\beta_i\cdot z_i] & (z)_{i+1} & \\
 & & & \ddots & \ddots \\
 & & & [B^{-1}_{m-1\,m-1}-\beta_{m-1}\cdot z_{m-1}] & (z)_m \\
 & & & & [B^{-1}_{mm}-\beta_m\cdot z_m]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_{k+2} & & & \\
(-\hat{c}_{k+3})E_{k+3} & & & \\
 & \ddots & & \\
 & (-\hat{c}_i)E_i & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & (-\hat{c}_m)E_m
\end{bmatrix}. \qquad (\mathrm{I.II})
$$

А также

<u>Представления I.4</u> (при условии Ш)

$$
\begin{bmatrix}
E_1 & & & & & & & \\
 & E_2 & & & & & & \\
 & & \ddots & & & & & \\
 & & & E_{k-1} & & & & \\
\hat{\xi}_1 & \cdots & & \hat{\xi}_{k-1} & E_k & & & \\
 & & & & E_{k+1} & (-\hat{\tau}_{k+2}) & \cdots & (-\hat{\tau}_m) \\
 & & & & & E_{k+2} & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & E_m
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\left[\mathbb{C}^{k-1}_1\right] & & \mathbb{O} \\
 & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & z_{k+1} \\ P_{k+1} & G_k \end{bmatrix} & \\
\mathbb{O} & & \left[\mathbb{C}^{m}_{k+2}\right]
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & (-\tau_1) & & & & & & \\
 & E_2 & (-\tau_2) & & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & E_{k-1} & (-\tau_{k-1}) & & & \\
 & & & & E_k & & & \\
 & & & & & E_{k+1} & & \\
 & & & & & \xi_{k+2} & E_{k+2} & \\
 & & & & & \xi_{k+3} & & E_{k+3} \\
 & & & & & \vdots & & \ddots \\
 & & & & & \xi_m & & & E_m
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}(\Lambda,G)=\mathbb{C} \qquad (\mathrm{I.I2})
$$

, где

$$
\left\{ \hat{\tau}_j=\prod_{s=k+2}^{j}\hat{\beta}_s \right\}_{j=k+2}^{m},\ \left\{ \tau_i=\prod_{s=i+1}^{k} c_s \right\}_{i=1}^{k-1},\ \left\{ \hat{\xi}_j=P_k\cdot\prod_{s=j+1}^{k-1}\hat{c}_s\cdot B_{jj} \right\}_{j=1}^{k-1},\ \left\{ \xi_i=B_{ii}\cdot\prod_{s=k+3}^{i}\beta_s\cdot P_{k+2} \right\}_{j=k+3}^{m}, \qquad (\mathrm{I.I3})
$$

а соответствующие матрицы $\{ B;\ \beta,\hat{\beta};\ c,\hat{c} \}$ и последовательности матриц $\{ \Lambda \}$ и $\{ G \}$ – определены в (I.9).

Здесь также $\mathbb{C}^{k-1}_1$ и $\mathbb{C}^{m}_{k+2}$ есть ведущие усечённые (т.е. уменьшенной размерности) блочно-трёхдиагональные подматрицы общего вида (I.I), для которых имеют место (соответственно) представления /I_I)/ вида

$$
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}-\hat{\beta}_2\cdot P_2] & & & & & \\
(P_2) & [B^{-1}_{22}-\hat{\beta}_3\cdot P_3] & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & \\
 & (P_i) & [B^{-1}_{ii}-\hat{\beta}_{i+1}\cdot P_{i+1}] & & & \\
 & & \ddots & \ddots & & \\
 & & (P_{k-2}) & [B^{-1}_{k-2\,k-2}-\hat{\beta}_{k-1}\cdot P_{k-1}] & & \\
 & & & (P_{k-1}) & [B^{-1}_{k-1\,k-1}] &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
E_1 & (-c_2) & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & E_i & (-c_{i+1}) & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & E_{k-2} & (-c_{k-1}) & \\
 & & & E_{k-1} &
\end{bmatrix}
=\mathbb{C}^{k-1}_1(\Lambda,G)=
$$
$$
=\begin{bmatrix}
E_1 & (-\hat{\beta}_2) & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & E_i & (-\hat{\beta}_{i+1}) & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & E_{k-2} & (-\hat{\beta}_{k-1}) & \\
 & & & E_{k-1} &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
[B^{-1}_{11}] & & & & \\
(P_2) & [B^{-1}_{22}-P_2\cdot c_2] & & & \\
 & \ddots & \ddots & & \\
 & (P_i) & [B^{-1}_{ii}-P_i\cdot c_i] & & \\
 & & \ddots & \ddots & \\
 & & & (P_{k-1}) & [B^{-1}_{k-1\,k-1}-P_{k-1}\cdot c_{k-1}]
\end{bmatrix}, \qquad (\mathrm{I.I4})
$$

$$\begin{bmatrix} [B^{-1}_{k+2\,k+2}-\hat{\beta}_{k+3}\cdot p_{k+3}] \\ (p)_{k+3}[B^{-1}_{k+3\,k+3}-\hat{\beta}_{k+4}\cdot p_{k+4}] \\ \cdots \\ (p)_i[B^{-1}_{ii}-\hat{\beta}_{i+1}\cdot p_{i+1}] \\ \cdots \\ (p)_m\,[B^{-1}_{mm}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(-c)_{k+2\,k+3} \\ \cdots \\ E(c)_{i\,i+1} \\ \cdots \\ E(-c)_{m-1\,m} \\ E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{m}_{k+2}(\Lambda,G) = \begin{bmatrix} E(-\hat{\beta})_{k+2\,k+3} \\ \cdots \\ E(\hat{\beta})_{i\,i+1} \\ \cdots \\ E(-\hat{\beta})_{m-1\,m} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [B^{-1}_{k+2\,k+2}] \\ (p)_{k+3}[B^{-1}_{k+3\,k+3}-p_{k+3}\cdot c_{k+3}] \\ \cdots \\ (p)_i[B^{-1}_{ii}-p_i\cdot c_i] \\ \cdots \\ (p_m)[B^{-1}_{mm}-p_m\cdot c_m] \end{bmatrix}. \qquad (I.15)$$

При этом (в представлениях (I.10)÷(I.11) и (I.14)÷(I.15)) матрицы B^{-1}_{ii}, в соответствии с $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3), могут быть представлены /I$_5$)/ любым из следующих способов:

$$B^{-1}_{ii} = \begin{cases} (\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-q_i), \quad 1\le i\le k-1;\ k+2\le i\le m, \\ \left\{ \begin{array}{l} [\sum\limits_{\mu=i}^{m}\prod\limits_{\zeta=i+1}^{\mu}c_\zeta\cdot\Lambda^{-1}_{\mu+1}\cdot\prod\limits_{\zeta=i+1}^{\mu}\beta_\zeta]^{-1} \longleftrightarrow [\Lambda^{-1}_{i+1}+c_{i+1}\cdot B_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1}]^{-1},\ B_{mm}=\Lambda^{-1}_{m+1};\ i=m-1,\dots,k+2, \\ [\sum\limits_{\mu=i}^{k-1}\prod\limits_{\zeta=i+1}^{\mu}c_\zeta\cdot\Lambda^{-1}_{\mu+1}\cdot\prod\limits_{\zeta=i+1}^{\mu}\beta_\zeta]^{-1} \longleftrightarrow [\Lambda^{-1}_{i+1}+c_{i+1}\cdot B_{i+1\,i+1}\cdot\beta_{i+1}]^{-1},\ B_{k-1\,k-1}=\Lambda^{-1}_{k},\ i=k-2,\dots,1, \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} [\sum\limits_{\mu=1}^{i}\prod\limits_{\zeta=\mu+1}^{i}\hat{c}_\zeta\cdot G^{-1}_{\mu-1}\cdot\prod\limits_{\zeta=\mu+1}^{i}\hat{\beta}_\zeta]^{-1} \longleftrightarrow [G^{-1}_{i-1}+\hat{c}_i\cdot B_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i]^{-1},\ B_{11}=G^{-1}_{0},\ i=2,3,\dots,k-1, \\ [\sum\limits_{\mu=k+2}^{i}\prod\limits_{\zeta=\mu+1}^{i}\hat{c}_\zeta\cdot G^{-1}_{\mu-1}\cdot\prod\limits_{\zeta=\mu+1}^{i}\hat{\beta}_\zeta]^{-i} \longleftrightarrow [G^{-1}_{i-1}+\hat{c}_i\cdot B_{i-1\,i-1}\cdot\hat{\beta}_i]^{-1},\ B_{k+2\,k+2}=G^{-1}_{k+1},\ i=k+3,\dots,m. \end{array} \right. \end{cases} \qquad (I.16)$$

Отметим, наконец, что четыре различных представления (I.10)÷(I.11) и (I.14)÷(I.15) усечённых подматриц $\mathbb{C}^{k-1}_{1}$ и $\mathbb{C}^{m}_{k+2}$ сводятся к двум различным (известным) представлениям

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ (-\beta)_2E_2 \\ \cdots \\ (-\beta)_iE_i \\ \cdots \\ (-\beta)_{k-1}E_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \\ \cdots \\ \Lambda_{i+1} \\ \cdots \\ \Lambda_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(-c)_{1\,2} \\ \cdots \\ E(-c)_{i\,i+1} \\ \cdots \\ E(-c)_{k-2\,k-1} \\ E_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{k-1}_{1}(\Lambda), \quad \begin{bmatrix} E(-\hat{\beta})_{1\,2} \\ \cdots \\ E(-\hat{\beta})_{i\,i+1} \\ \cdots \\ E(-\hat{\beta})_{k-2\,k-1} \\ E_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_0 \\ G_1 \\ \cdots \\ G_{i-1} \\ \cdots \\ G_{k-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ (-\hat{c})_2E_2 \\ \cdots \\ (-\hat{c})_iE_i \\ \cdots \\ (-\hat{c})_{k-1}E_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{k-1}_{1}(G), \qquad (I.17)$$

$$\begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\beta)_{k+3}E_{k+3} \\ \cdots \\ (-\beta)_iE_i \\ \cdots \\ (-\beta)_mE_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Lambda_{k+3} \\ \Lambda_{k+4} \\ \cdots \\ \Lambda_{i+1} \\ \cdots \\ \Lambda_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E(-c)_{k+2\,k+3} \\ \cdots \\ E(c)_{i\,i+1} \\ \cdots \\ E(-c)_{m-1\,m} \\ E_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{m}_{k+2}(\Lambda), \quad \begin{bmatrix} E(-\hat{\beta})_{k+2\,k+3} \\ \cdots \\ E(-\hat{\beta})_{i\,i+1} \\ \cdots \\ E(-\hat{\beta})_{m-1\,m} \\ E_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{k+1} \\ G_{k+2} \\ \cdots \\ G_{i-1} \\ \cdots \\ G_{m-2} \\ G_{m-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{k+2} \\ (-\hat{c})E_{k+3\,k+3} \\ \cdots \\ (-\hat{c})_iE_i \\ \cdots \\ (-c)_mE_m \end{bmatrix} = \mathbb{C}^{m}_{k+2}(G), \qquad (I.18)$$

только при использовании аддитивной $(I.16)_{I)}$ скобки $B_{ii}^{-1}=(\Lambda_{i+1}+G_{i-1}-q_i)$. Здесь соответствующие матрицы $\{c,\hat{c};\beta,\hat{\beta}\}$ и последовательности матриц $\{\Lambda\}$ и $\{G\}$ определены в (I.9).

2. Прямые факторизованные представления элементов-блоков матриц, обратных к блочно-трёхдиагональным матрицам общего вида $C(1.1)$, с обращающимися в нуль ведущими блочными угловыми минорами.

Приводимые ниже результаты являются обобщением результатов работ $/I_{4)}, I_{7)}/$, в которых рассматривались вопросы построения различных прямих факторизованных представлений элементов-блоков $B=C^{-1}$ как в случае ненулевых, так и в случае нулевых ведущих блочных угловых миноров у матриц общего вида $C(1.1)$.

Итак, справедлива следующая

Теорема 2.I. Пусть C – невырожденная блочно-трёхдиагональная матрица общего вида (I.I) с прямоугольными элементами-блоками $\{z_j, p_j\}_{j=2}^{m}$ и квадратными блоками $\{q_j\}_{j=1}^{m}$ (в общем случае разных размерностей). Пусть также для последовательностей матриц $\{\Lambda\}$ (I.2) и $\{G\}$ (I.3) выполняется одно из следующих условий:

I. $\begin{cases} [\det(\Lambda_{k+1})=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2) \text{ но } \{\det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k}, \{\det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=k+3}^{m+1}] \to \\ \to [\Delta_1^{k}=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2)]. \end{cases}$

II. $\begin{cases} [\det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2) \text{ но } \{\det(G_\mu)\ne 0\}_{\mu=k+1}^{m-1}, \{\det(G_\mu)\ne 0\}_{\mu=0}^{k-2}] \to \\ \to [\Delta_{k+1}^{m}=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2)]. \end{cases}$

III. $\begin{cases} \{[\det(G_k)=0 \text{ для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2) \text{ но } \{\det(G_j)\ne 0\}_{j=k+1}^{m-1}, \{\det(G_j)\ne 0\}_{j=0}^{k-2}] \text{ и} \\ [\det(\Lambda_{k+1})=0 \text{ для того же } k \text{ но } \{\det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=2}^{k}, \{\det(\Lambda_j)\ne 0\}_{j=k+3}^{m+1}]\} \to \\ \to [\Delta_1^{k}=0 \text{ и } \Delta_{k+1}^{m}=0 \text{ одновременно для любого } k \text{ из } (2\le k\le m-2)]. \end{cases}$

Тогда обратная матрица $B=C^{-1}$ имеет следующую структуру:

$$B=\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ [B_{ij}]_{11} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{matrix} B_{1k} & B_{1k+1} \\ B_{2k} & B_{2k+1} \\ -- & --- \\ B_{k-1k} & B_{k-1k+1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ [B_{ij}]_{12} \\ \\ \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} B_{k1}\, B_{k2} \cdots B_{kk-1} \\ B_{k+11}\, B_{k+12} \cdots B_{k+1k-1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} (B_{kk}=X_{kk}) & (B_{kk+1}=X_{kk+1}) \\ (B_{k+1k}=X_{k+1k}) & (B_{k+1k+1}=X_{k+1k+1}) \end{bmatrix} & \begin{matrix} B_{kk+2}\, B_{kk+3} \cdots B_{km} \\ B_{k+1k+2}\, B_{k+1k+3} \cdots B_{k+1m} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} \\ [B_{ij}]_{21} \\ \\ \end{bmatrix} & \begin{matrix} B_{k+2k} & B_{k+2k+1} \\ B_{k+3k} & B_{k+3k+1} \\ -- & -- \\ B_{mk} & B_{mk+1} \end{matrix} & \begin{bmatrix} \\ [B_{ij}]_{22} \\ \\ \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \qquad (2.I)$$

При этом для $\mathcal{B}_{ij}$ – элементов-блоков $\mathcal{B}$ (2.I) имеют место следующие различные прямые факторизованные представления:

<u>Представления 2.I</u> (при условии I)

$$[\mathcal{B}_{ij}(\Lambda)]_{11}=\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)+\tau_i\cdot X_{kk}\cdot z_j, & \text{если } 1\le i<j\le k-1,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}(\Lambda)+\tau_i\cdot X_{kk}\cdot z_i, & \text{если } 1\le(i=j)\le k-1,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)+\tau_i\cdot X_{kk}\cdot z_j & \text{если } 1\le j<i\le k-1;\end{cases}\quad [\mathcal{B}_{ij}(\Lambda)]_{22}=\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)+\xi_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot F_j, & \text{если } k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}(\Lambda)+\xi_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot F_i, & \text{если } k+2\le(i=j)\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)+\xi_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot F_j, & \text{если } k+2\le j<i\le m;\end{cases}\tag{2.2}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}\mathcal{B}_{kj}=X_{kk}\cdot z_j\ ;\ \mathcal{B}_{k+1j}=X_{k+1k}\cdot z_j,\\ \text{если } 1\le j\le k-1.\end{cases}\\[2ex] \begin{cases}\mathcal{B}_{ik}=\tau_i\cdot X_{kk}\ ;\ \mathcal{B}_{ik+1}=\tau_i\cdot X_{kk+1},\\ \text{если } 1\le i\le k-1.\end{cases}\end{cases}\qquad \begin{cases}\begin{cases}\mathcal{B}_{kj}=X_{kk+1}\cdot F_j\ ;\ \mathcal{B}_{k+1j}=X_{k+1k+1}\cdot F_j,\\ \text{если } k+2\le j\le m.\end{cases}\\[2ex] \begin{cases}\mathcal{B}_{ik}=\xi_i\cdot X_{k+1k}\ ;\ \mathcal{B}_{ik+1}=\xi_i\cdot X_{k+1k+1},\\ \text{если } k+2\le i\le m.\end{cases}\end{cases}\tag{2.3}$$

$$\begin{cases}[\mathcal{B}_{ij}(\Lambda)]_{21}=\xi_i\cdot X_{k+1k}\cdot z_j,\\ \text{если } k+2\le i\le m\quad 1\le j\le k-1\ ;\end{cases}\qquad \begin{cases}[\mathcal{B}_{ij}(\Lambda)]_{12}=\tau_i\cdot X_{kk+1}\cdot F_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1\quad k+2\le j\le m,\end{cases}\tag{2.3'}$$

где

$$\Big\{\tau_i=\prod_{s=i+1}^{k}c_s\Big\}_{i=1}^{k-1},\ \Big\{z_j=\prod_{s=j+1}^{k}\beta_s\Big\}_{j=1}^{k-1},\ \Big\{\xi_i=-\tilde{\mathcal{B}}_{ii}(\Lambda)\cdot\prod_{s=k+3}^{i}\beta_s\cdot p_{k+2}\Big\}_{i=k+2}^{m},\ \Big\{F_j=-2_{k+2}\cdot\prod_{s=k+3}^{j}c_s\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj}(\Lambda)\Big\}_{j=k+2}^{m}.\tag{2.4}$$

Здесь (в соответствии с /I$_7$)/) $\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)$ – элементы-блоки усечённых обратных подматриц $\tilde{\mathcal{B}}_1^{k-1}=[\mathbb{C}_1^{k-1}(\Lambda)]^{-1}$, $\tilde{\mathcal{B}}_{k+2}^{m}=[\mathbb{C}_{k+2}^{m}(G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде

$$\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)=\begin{cases}\prod_{s=i+1}^{j}c_s\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj}(\Lambda),\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1\ ;\ k+2\le i<j\le m,\\ \sum_{\ell=i}^{k-1}\prod_{s=i+1}^{\ell}c_s\cdot\Lambda_{\ell+1}^{-1}\cdot\prod_{s=i+1}^{\ell}\beta_s;\ \sum_{\ell=i}^{m}\prod_{s=i+1}^{\ell}c_s\cdot\Lambda_{\ell+1}^{-1}\cdot\prod_{s=i+1}^{\ell}\beta_s,\\ \text{если } 1\le(i=j)\le k-1\ ;\ k+2\le(i=j)\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}(\Lambda)\cdot\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s,\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1\ ;\ k+2\le j<i\le m\ ;\end{cases}\quad \underline{\text{либо}}\quad \begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)=c_{i+1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i+1j}(\Lambda),\\ \text{если } 1\le i<j\le k-1\ ;\ k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}(\Lambda)=\Lambda_{i+1}^{-1}+c_{i+1}\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{i+1i+1}(\Lambda)\cdot\beta_{i+1},\\ \text{если } 1\le(i=j)\le k-1\ ;\ k+2\le(i=j)\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ij}(\Lambda)=\tilde{\mathcal{B}}_{ij+1}(\Lambda)\cdot\beta_{j+1},\\ \text{если } 1\le j<i\le k-1\ ;\ k+2\le j<i\le m.\end{cases}\tag{2.5}$$

<u>Представления 2.2</u> (при условии П)

$$[\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(G)]_{11}=\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(G)+\hat{F}_i\cdot X_{kk}\cdot\hat{\xi}_j, & \text{если } 1\le i<j\le k-1,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}(G)+\hat{F}_i\cdot X_{kk}\cdot\hat{\xi}_i, & \text{если } 1\le(i=j)\le k-1,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ij}(G)+\hat{F}_i\cdot X_{kk}\cdot\hat{\xi}_j, & \text{если } 1\le j<i\le k-1;\end{cases}\quad [\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(G)]_{22}=\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ij}(G)+\hat{z}_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_j, & \text{если } k+2\le i<j\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}(G)+\hat{z}_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_i, & \text{если } k+2\le(i=j)\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ij}(G)+\hat{z}_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_j, & \text{если } k+2\le j<i\le m;\end{cases}\tag{2.6}$$

$$\begin{cases}\begin{cases}\mathcal{B}_{kj}=X_{kk}\cdot\hat{\xi}_j\ ;\ \mathcal{B}_{k+1j}=X_{k+1k}\cdot\hat{\xi}_j,\\ \text{если } 1\le j\le k-1.\end{cases}\\[2ex] \begin{cases}\mathcal{B}_{ik}=\hat{F}_i\cdot X_{kk}\ ;\ \mathcal{B}_{ik+1}=\hat{F}_i\cdot X_{kk+1},\\ \text{если } 1\le i\le k-1.\end{cases}\end{cases}\qquad \begin{cases}\begin{cases}\mathcal{B}_{kj}=X_{kk+1}\cdot\hat{\tau}_j\ ;\ \mathcal{B}_{k+1j}=X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_j,\\ \text{если } k+2\le j\le m.\end{cases}\\[2ex] \begin{cases}\mathcal{B}_{ik}=\hat{z}_i\cdot X_{k+1k}\ ;\ \mathcal{B}_{ik+1}=\hat{z}_i\cdot X_{k+1k+1},\\ \text{если } k+2\le i\le m.\end{cases}\end{cases}\tag{2.7}$$

$$\begin{cases}[\mathcal{B}_{ij}(G)]_{12}=\hat{F}_i\cdot X_{kk+1}\cdot\hat{\tau}_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1\ ;\ k+2\le j\le m\ ;\end{cases}\qquad \begin{cases}[\mathcal{B}_{ij}(G)]_{21}=\hat{z}_i\cdot X_{k+1k}\cdot\hat{\xi}_j,\\ \text{если } k+2\le i\le m;\ 1\le j\le k-1\end{cases}\quad \text{,где}\tag{2.8}$$

$$\Big\{\hat{\tau}_j=-\rho_\kappa\cdot\prod_{s=j+1}^{\kappa-1} c_s\cdot\tilde{B}_{jj}(G)\Big\}_{j=1}^{\kappa-1},\ \Big\{\zeta_j=\prod_{s=\kappa+2}^{j}\hat{\beta}_s\Big\}_{j=\kappa+2}^{m},\ \Big\{\hat{F}_i=-\tilde{B}_{ii}(G)\cdot\prod_{s=i+1}^{\kappa-1}\hat{\beta}_s\cdot\varepsilon_\kappa\Big\}_{i=1}^{\kappa-1},\ \Big\{\hat{Z}_i=\prod_{s=\kappa+2}^{i}\hat{c}_s\Big\}_{i=\kappa+2}^{m}. \quad (2.9)$$

Здесь (в соответствии с /I7)/ $\tilde{B}_{ij}(G)$ – элементы-блоки усечённых обратных подматриц $\tilde{B}_1^{\kappa-1}=[C_1^{\kappa-1}(G)]^{-1}$ $\tilde{B}_{\kappa+2}^{m}=[C_{\kappa+2}^{m}(G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде

$$\tilde{B}_{ij}(G)=\begin{cases}\tilde{B}_{ii}(G)\cdot\prod_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s, \\ \text{если } 1\le i<j\le\kappa-1;\ \kappa+2\le i<j\le m; \\ \sum_{\ell=1}^{i}\prod_{s=\ell+1}^{i}\hat{c}_s\cdot G_{\ell-1}^{-1}\cdot\prod_{s=\ell+1}^{i}\hat{\beta}_s;\ \sum_{\ell=\kappa+2}^{m}\prod_{s=\ell+1}^{i}\hat{c}_s\cdot G_{\ell-1}^{-1}\cdot\prod_{s=\ell+1}^{i}\hat{\beta}_s, \\ \text{если } 1\le(i=j)\le\kappa-1;\ \kappa+2\le(i=j)\le m; \\ \prod_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\tilde{B}_{jj}(G), \\ \text{если } 1\le j<i\le\kappa-1;\ \kappa+2\le j<i\le m;\end{cases}\quad \text{либо}\quad \begin{cases}\tilde{B}_{ij}(G)=\tilde{B}_{ij-1}(G)\cdot\hat{\beta}_j, \\ \text{если } 1\le i<j\le\kappa-1;\ \kappa+2\le i<j\le m; \\ \tilde{B}_{ii}(G)=G_{i-1}^{-1}+\hat{C}_i\cdot\tilde{B}_{i-1i-1}(G)\cdot\hat{\beta}_i, \\ \text{если } 1\le(i=j)\le\kappa-1;\ \kappa+2\le(i=j)\le m; \\ \tilde{B}_{ij}(G)=\hat{c}_i\cdot\tilde{B}_{i-1j}(G), \\ \text{если } 1\le j<i\le\kappa-1;\ \kappa+2\le j<i\le m.\end{cases}\quad (2.10)$$

Представления 2.3 (при условии Ш)

$$[B_{ij}(A,G)]_{11}=\begin{cases}B_{ij}(A,G)+\hat{F}_i\cdot X_{\kappa\kappa}\cdot Z_j, & \text{если } 1\le i<j\le\kappa-1, \\ B_{ij}(A,G)+\hat{F}_i\cdot X_{\kappa\kappa}\cdot Z_i, & \text{если } 1\le(i=j)\le\kappa-1, \\ B_{ij}(A,G)+\hat{F}_i\cdot X_{\kappa\kappa}\cdot Z_j, & \text{если } 1\le j<i\le\kappa-1;\end{cases}\quad [B_{ij}(A,G)]_{22}=\begin{cases}\tilde{B}_{ij}(A,G)+\hat{Z}_i\cdot X_{\kappa+1\kappa+1}\cdot F_j, & \text{если } \kappa+2\le i<j\le m, \\ \tilde{B}_{ii}(A,G)+\hat{Z}_i\cdot X_{\kappa+1\kappa+1}\cdot F_i, & \text{если } \kappa+2\le(i=j)\le m, \\ \tilde{B}_{ij}(A,G)+\hat{Z}_i\cdot X_{\kappa+1\kappa+1}\cdot F_j, & \text{если } \kappa+2\le j<i\le m.\end{cases}\quad (2.11)$$

$$\begin{cases}\begin{cases}B_{\kappa j}=X_{\kappa\kappa}\cdot Z_j;\ B_{\kappa+1j}=X_{\kappa+1\kappa}\cdot Z_j, \\ \text{если } 1\le j\le\kappa-1.\end{cases} \\ \begin{cases}B_{i\kappa}=\hat{F}_i\cdot X_{\kappa\kappa};\ B_{i\kappa+1}=\hat{F}_i\cdot X_{\kappa\kappa+1}, \\ \text{если } 1\le i\le\kappa-1.\end{cases}\end{cases}\quad \begin{cases}\begin{cases}B_{\kappa j}=X_{\kappa\kappa+1}\cdot F_j;\ B_{\kappa+1j}=X_{\kappa+1\kappa+1}\cdot F_j, \\ \text{если } \kappa+2\le j\le m.\end{cases} \\ \begin{cases}B_{i\kappa}=\hat{Z}_i\cdot X_{\kappa+1\kappa};\ B_{i\kappa+1}=\hat{Z}_i\cdot X_{\kappa+1\kappa+1}, \\ \text{если } \kappa+2\le i\le m.\end{cases}\end{cases}\quad (2.12)$$

$$\begin{cases}[B_{ij}(A,G)]_{12}=\hat{F}_i\cdot X_{\kappa\kappa+1}\cdot F_j, \\ \text{если } 1\le i\le\kappa-1;\ \kappa+2\le j\le m;\end{cases}\quad \begin{cases}[B_{ij}(A,G)]_{21}=\hat{Z}_i\cdot X_{\kappa+1\kappa}\cdot Z_j, \\ \text{если } \kappa+2\le i\le m;\ 1\le j\le\kappa-1\end{cases}\ \text{, где}\quad (2.13)$$

$$\Big\{\hat{F}_i=-B_{ii}(A,G)\cdot\prod_{s=i+1}^{\kappa-1}\hat{\beta}_s\cdot\varepsilon_\kappa\Big\}_{i=1}^{\kappa-1},\ \Big\{\hat{Z}_i=\prod_{s=\kappa+2}^{i}\hat{c}_s\Big\}_{i=\kappa+2}^{m},\ \Big\{Z_j=\prod_{s=j+1}^{\kappa}\beta_s\Big\}_{j=1}^{\kappa-1},\ \Big\{F_j=-\varepsilon_{\kappa+2}\cdot\prod_{s=\kappa+3}^{j}c_s\cdot\tilde{B}_{jj}(A,G)\Big\}_{j=\kappa+2}^{m}. \quad (2.14)$$

Здесь (в соответствии с /I7)/) $\tilde{B}_{ij}(A,G)$ – элементы-блоки усечённых обратных подматриц $\tilde{B}_1^{\kappa-1}=[C_1^{\kappa-1}(A,G)]^{-1}$ и $\tilde{B}_{\kappa+2}^{m}=[C_{\kappa+2}^{m}(A,G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде

$$\tilde{B}_{ij}(A,G)=\begin{cases}\prod_{s=i+1}^{j}c_s\cdot\tilde{B}_{jj}(A,G), \\ \text{если } 1\le i\le j\le\kappa-1;\ \kappa+2\le i\le j\le m, \\ \tilde{B}_{ii}(A,G)\cdot\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s, \\ \text{если } 1\le j\le i\le\kappa-1;\ \kappa+2\le j\le i\le m;\end{cases}\quad \tilde{B}_{ij}(A,G)=\begin{cases}\tilde{B}_{ii}(A,G)\cdot\prod_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s, \\ \text{если } 1\le i\le j\le\kappa-1;\ \kappa+2\le i\le j\le m, \\ \prod_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\tilde{B}_{jj}(A,G), \\ \text{если } 1\le j\le i\le\kappa-1;\ \kappa+2\le j\le i\le m;\end{cases}\quad (2.15)$$

$$\tilde{B}_{ij}(A,G)=\begin{cases}\prod_{s=i+1}^{j}c_s\cdot\tilde{B}_{jj}(A,G), \\ \text{если } 1\le i\le j\le\kappa-1;\ \kappa+2\le i\le j\le m, \\ \prod_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\tilde{B}_{jj}(A,G), \\ \text{если } 1\le j\le i\le\kappa-1;\ \kappa+2\le j\le i\le m;\end{cases}\quad \tilde{B}_{ij}(A,G)=\begin{cases}\tilde{B}_{ii}(A,G)\cdot\prod_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s, \\ \text{если } 1\le i\le j\le\kappa-1;\ \kappa+2\le i\le j\le m; \\ \tilde{B}_{ii}(A,G)\cdot\prod_{s=j+1}^{i}\beta_s, \\ \text{если } 1\le\ \le\ \le\kappa-1;\ \kappa+2\le j\le i\le m.\end{cases}\quad (2.16)$$

где $\widetilde{\mathbb{B}}_{\zeta\zeta}(\Lambda,G)=(\Lambda_{\zeta+1}+G_{\zeta-1}-q_{\zeta})^{-1}$, $\zeta=1,2,\ldots,k-1$; $\zeta=k+2,k+3,\ldots,m$. (2.16′)

А также

<u>Представления 2.4</u> (при условии Ш)

$$[\mathbb{B}_{ij}(\Lambda,G)]_{11}=\begin{cases}\widetilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)+\tau_i\cdot X_{kk}\cdot\hat{\xi}_j, & \text{если } 1\le i<j\le k-1,\\ \widetilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G)+\tau_i\cdot X_{kk}\cdot\hat{\xi}_i, & \text{если } 1\le(i=j)\le k-1,\\ \widetilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)+\tau_i\cdot X_{kk}\cdot\hat{\xi}_j, & \text{если } 1\le j<i\le k-1;\end{cases}\quad [\mathbb{B}_{ij}(\Lambda,G)]_{22}=\begin{cases}\widetilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)+\xi_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_j, & \text{если } k+2\le i<j\le m,\\ \widetilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G)+\xi_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_i, & \text{если } k+2\le(i=j)\le m,\\ \widetilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)+\xi_i\cdot X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_j, & \text{если } k+2\le j<i\le m.\end{cases}\qquad(2.17)$$

$$\begin{cases}\begin{cases}\mathbb{B}_{kj}=X_{kk}\cdot\hat{\xi}_j\;;\;\mathbb{B}_{k+1j}=X_{k+1k}\cdot\hat{\xi}_j,\\ \text{если } 1\le j\le k-1.\end{cases}\\ \begin{cases}\mathbb{B}_{ik}=\tau_i\cdot X_{kk}\;;\;\mathbb{B}_{ik+1}=\tau_i\cdot X_{kk+1},\\ \text{если } 1\le i\le k-1.\end{cases}\end{cases}\quad \begin{cases}\begin{cases}\mathbb{B}_{kj}=X_{kk+1}\cdot\hat{\tau}_j\;;\;\mathbb{B}_{k+1j}=X_{k+1k+1}\cdot\hat{\tau}_j,\\ \text{если } k+2\le j\le m.\end{cases}\\ \begin{cases}\mathbb{B}_{ik}=\xi_i\cdot X_{k+1k}\;;\;\mathbb{B}_{ik+1}=\xi_i\cdot X_{k+1k+1},\\ \text{если } k+2\le i\le m.\end{cases}\end{cases}\qquad(2.18)$$

$$\begin{cases}[\mathbb{B}_{ij}(\Lambda,G)]_{12}=\tau_i\cdot X_{kk+1}\cdot\hat{\tau}_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1\;;\;k+2\le j\le m;\end{cases}\quad \begin{cases}[\mathbb{B}_{ij}(\Lambda,G)]_{21}=\xi_i\cdot X_{k+1k}\cdot\hat{\xi}_j,\\ \text{если } 1\le i\le k-1\;;\;k+2\le j\le m,\end{cases}\qquad(2.19)$$

где

$$\Big\{\tau_i=\prod_{\zeta=i+1}^{k}c_\zeta\Big\}_{i=1}^{k-1},\ \Big\{\hat{\tau}_j=\prod_{\zeta=k+2}^{j}\hat{\beta}_\zeta\Big\}_{j=k+2}^{m},\ \Big\{\xi_i=-\widetilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda,G)\cdot\prod_{\zeta=k+3}^{i}\beta_\zeta\cdot z_{k+2}\Big\}_{i=k+2}^{m},\ \Big\{\hat{\xi}_j=-p_k\cdot\prod_{\zeta=j+1}^{k-1}\hat{c}_\zeta\cdot\widetilde{\mathbb{B}}_{jj}(\Lambda,G)\Big\}_{j=1}^{m}.\qquad(2.20)$$

Здесь также $\widetilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)$ – элементы-блоки усечённых обратных подматриц $\widetilde{\mathbb{B}}_1^{k-1}=[\mathbb{C}_1^{k-1}(\Lambda,G)]^{-1}$ и $\widetilde{\mathbb{B}}_{k+1}^{m}=[\mathbb{C}_{k+1}^{m}(\Lambda,G)]^{-1}$ соответственно могут быть представлены в виде (2.15)÷(2.16′).

При этом неизвестные $\{[X_{kk}(\Lambda),X_{kk+1}(\Lambda),X_{k+1k}(\Lambda),X_{k+1k+1}(\Lambda)]$, $[X_{kk}(G),X_{kk+1}(G),X_{k+1k}(G),X_{k+1k+1}(G)]$ и $[X_{kk}(\Lambda,G),X_{kk+1}(\Lambda,G),X_{k+1k}(\Lambda,G),X_{k+1k+1}(\Lambda,G)]\}$ – элементы-блоки $\mathbb{B}$(2.1), при соответствующих условиях, могут быть найдены из следующих матричных уравнений

<u>При условии</u> I

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\Lambda_{k+1} & z_{k+1}\\ p_{k+1} & (q_{k+1}-\theta_{k+1})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{kk}(\Lambda) & X_{kk+1}(\Lambda)\\ X_{k+1k}(\Lambda) & X_{k+1k+1}(\Lambda)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{kk} & 0_{kk+1}\\ 0_{k+1k} & E_{k+1k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{kk}(\Lambda) & X_{kk+1}(\Lambda)\\ X_{k+1k}(\Lambda) & X_{k+1k+1}(\Lambda)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_{k+1} & z_{k+1}\\ p_{k+1} & (q_{k+1}-\theta_{k+1})\end{bmatrix}, \text{ где}\\ \theta_{k+1}(\Lambda)=z_{k+2}\cdot\widetilde{\mathbb{B}}_{k+2k+2}(G)\cdot p_{k+2}.\ \text{При этом } (q_{k+1}-\theta_{k+1})=G_k\ \text{, если } \{det(G_\zeta)\ne0\}_{\zeta=k+1}^{m-1}.\end{cases}\qquad(2.21)$$

<u>При условии</u> II

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}(q_k-\hat{\theta}_k) & z_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{kk}(G) & X_{kk+1}(G)\\ X_{k+1k}(G) & X_{k+1k+1}(G)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{kk} & 0_{kk+1}\\ 0_{k+1k} & E_{k+1k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{kk}(G) & X_{k+1k}(G)\\ X_{k+1k}(G) & X_{k+1k+1}(G)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(q_k-\hat{\theta}_k) & z_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{bmatrix}, \text{где}\\ \hat{\theta}_k(G)=p_k\cdot\widetilde{\mathbb{B}}_{k-1k-1}\cdot z_k.\ \text{При этом } (q_k-\hat{\theta}_k)=\Lambda_{k+1},\ \text{если } \{det(\Lambda_\zeta)\ne0\}_{\zeta=2}^{k}.\end{cases}\qquad(2.22)$$

<u>При условии</u> Ш

$$\begin{bmatrix}\Lambda_{k+1} & z_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{kk}(\Lambda,G) & X_{kk+1}(\Lambda,G)\\ X_{k+1k}(\Lambda,G) & X_{k+1k+1}(\Lambda,G)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E_{kk} & 0_{kk+1}\\ 0_{k+1k} & E_{k+1k+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{kk}(\Lambda,G) & X_{kk+1}(\Lambda,G)\\ X_{k+1k}(\Lambda,G) & X_{k+1k+1}(\Lambda,G)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Lambda_{k+1} & z_{k+1}\\ p_{k+1} & G_k\end{bmatrix}.\qquad(2.23)$$

Доказательство. Сначала получим представления 2.I. Для этого, с учётом определения последовательности $\{\Lambda\}$ (I.2), а также матриц $\mathbb{B}_{ii}$ (I.I6)$_2$), представление I.I (при условии I) перепишем в виде

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & & & \\ (-z)_1 & \dots & & (-z)_{k-1} & E_k & & & & \\ & & & & & E_{k+1} & (-F)_{k+2} & \dots & (-F)_m \\ & & & & & & E_{k+2} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix}}_{S_1} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & p_{k-1} & q_{k-1} \end{bmatrix} = \mathbb{C}_1^{k-1} & & \\ & \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & r_{k+1} \\ p_{k+1} & (q-\theta)_{k+1} \end{bmatrix} & \\ & & \mathbb{C}_{k+2}^{m} = \begin{bmatrix} q_{k+2} & r_{k+3} & & \\ p_{k+3} & q_{k+3} & r_{k+4} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & p_m & q_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{S_2} \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & & & (-\tau)_1 & & & & \\ & E_2 & & (-\tau)_2 & & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & & \\ & & E_{k-1} & (-\tau)_{k-1} & & & & \\ & & & E_k & & & & \\ & & & & E_{k+1} & & & \\ & & & & (-\xi)_{k+2} & E_{k+2} & & \\ & & & & (-\xi)_{k+3} & & E_{k+3} & \\ & & & & \vdots & & & \ddots \\ & & & & (-\xi)_m & & & & E_m \end{bmatrix}}_{S_3} = \mathbb{C}(\Lambda) = \mathbb{C} \quad (2.24)$$

, где

$$\Big\{ z_j = \prod_{s=j+1}^{k} \beta_s \Big\}_{j=1}^{k-1}, \Big\{ F_j = -r_{k+2} \cdot \prod_{s=k+3}^{j} c_s \cdot \tilde{\mathbb{B}}_{jj}(\Lambda) \Big\}_{j=k+2}^{m}, \Big\{ \tau_i = \prod_{s=i+1}^{k} c_s \Big\}_{i=1}^{k-1}, \Big\{ \xi_i = -\tilde{\mathbb{B}}_{ii}(\Lambda) \cdot \prod_{s=k+3}^{i} \beta_s \cdot p_{k+2} \Big\}_{i=k+2}^{m} \quad (2.24')$$

Отметим, что для усечённых блочно-трёхдиагональных подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}$, верхние ведущие блочные угловые миноры которых отличны от нуля по условии I, имеют место представления вида (I.I7) для $\mathbb{C}_1^{k-1}(\Lambda)$ и вида (I.I8) для $\mathbb{C}_{k+2}^{m}(\Lambda)$ соответственно. Теперь, учитывая невырожденность матриц S_1, S_2, S_3, при $det(\mathbb{C}) \neq 0$ формально имеем

$\mathbb{B}(\Lambda) = [\mathbb{C}(\Lambda)]^{-1} = S_3^{-1} \cdot S_2^{-1} \cdot S_1^{-1}$,где $S_3^{-1}, S_2^{-1}, S_1^{-1}$ - соответствующие обратные матрицы.

Далее, воспользовавшись элементарностью матриц S_1 и S_3, а также представлением $\mathbb{C}_1^{k-1}(\Lambda)$ в виде (I.I7) и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}(\Lambda)$ в виде (I.I8) для усечённых подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}$ соответственно с учётом блочной структуры матрицы S_2, имеем

$$\underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & & & (\tau)_1 & & & \\ & E_2 & & (\tau)_2 & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & E_{k-1} & (\tau)_{k-1} & & & \\ & & & E_k & & & \\ & & & & E_{k+1} & & \\ & & & & (\xi)_{k+2} & E_{k+2} & \\ & & & & \vdots & & \ddots \\ & & & & (\xi)_m & & & E_m \end{bmatrix}}_{S_3^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda)]_{11} \end{bmatrix} & & \\ & \begin{bmatrix} X_{kk}(\Lambda) & X_{kk+1}(\Lambda) \\ X_{k+1k}(\Lambda) & X_{k+1k+1}(\Lambda) \end{bmatrix} & \\ & & \begin{bmatrix} [\tilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda)]_{22} \end{bmatrix} \end{bmatrix}}_{S_2^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} E_1 & & & & & & & & \\ & E_2 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & E_{k-1} & & & & & \\ (z)_1 & \dots & & (z)_{k-1} & E_k & & & & \\ & & & & & E_{k+1} & (F)_{k+2} & \dots & (F)_m \\ & & & & & & E_{k+2} & & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & E_m \end{bmatrix}}_{S_1^{-1}} = \mathbb{B}(\Lambda) = \mathbb{B} \quad (2.25)$$

, где

для $[\tilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda)]_{11}$ и $[\tilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda)]_{22}$ - элементов-блоков усечённых обратных матриц $\tilde{\mathbb{B}}_1^{k-1}$ и $\tilde{\mathbb{B}}_{k+2}^{m}$ в соответствии с /I$_7$)/ имеют место представления вида (2.5). Неизвестные $\{X_{kk}(\Lambda), X_{kk+1}(\Lambda), X_{k+1k}(\Lambda), X_{k+1k+1}(\Lambda)\}$ - элементы-блоки $\mathbb{B}$ являются решением систем блочных уравнений (2.2I). Теперь, выполнив матричные умножения в (2.25), получим представление для $\mathbb{B}(\Lambda)$ в виде (2.I), $\mathbb{B}_{ij}(\Lambda)$ - элементы-блоки которых определяются в виде (2.2)÷(2.5).

Аналогично, воспользовавшись представлением I.2 для $\mathbb{C}$ (I.I) и учитывая при этом факторизации $\mathbb{C}_1^{k-1}(G)$ и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}(G)$ для усечённых подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}$, получаем представление $\mathbb{B}(G)=\mathbb{C}^{-1}$ в виде (2.I); $\mathbb{B}_{ij}(G)$ - элементы-блоки, которые определяются в виде (2.6)÷(2.I0).

Далее, воспользовавшись представлениями $\mathbb{C}(\Lambda,G)$ I.3 и $\mathbb{C}(\Lambda,G)$ I.4 (при условии Ш), получаем соответствующие им представления 2.3 и 2.4. При этом (в соответствии с /I7)/ для получения $[\tilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)]_{11}$ и $[\tilde{\mathbb{B}}_{ij}(\Lambda,G)]_{22}$ - элементов-блоков усечённых обратных подматриц $\tilde{\mathbb{B}}_1^{k-1}(\Lambda,G)$ и $\mathbb{B}_{k+2}^{m}(\Lambda,G)$, следует воспользоваться различными представлениями $\tilde{\mathbb{C}}(\Lambda,G)$ (I.I0) и $\tilde{\mathbb{C}}(\Lambda,G)$ (I.II) для усечённых блочно-трёхдиагональных подматриц $\mathbb{C}_1^{k-1}$ и $\mathbb{C}_{k+2}^{m}$ соответственно. Отметим, что выше мы остановились на получении различных представлений $\mathbb{B}=\mathbb{C}^{-1}$ при соответствующих условиях. Справедливость же представлений 2.I; 2.2; 2.3 и 2.4 устанавливается на основе равенств $\mathbb{C}\cdot\mathbb{B}=E=\mathbb{C}\cdot\mathbb{B}$ при соответствующих условиях. При этом, с учётом структуры $\mathbb{B}$ (2.I), последние равенства эквивалентны следующим системам матричных равенств

$\underline{(\mathbb{C}\cdot\mathbb{B}=E)\ \text{для всех}\ 1\le i<j\le m}$

$$\left[\begin{array}{l}
P_i\cdot[\mathbb{B}_{i-1j}]_{11}+q_i\cdot[\mathbb{B}_{ij}]_{11}+r_{i+1}\cdot[\mathbb{B}_{i+1j}]_{11}=[\mathbb{O}_{ij}]_{11}\ ,\text{если}\ 1\le i<j\le k-1;\\
\begin{cases}P_i\cdot\mathbb{B}_{i-1k}+q_i\cdot\mathbb{B}_{ik}+r_{i+1}\,\mathbb{B}_{i+1k}=\mathbb{O}_{ik}\ ,\text{если}\ 1\le i\le k-1\ \text{при}\ (j=k),\\ P_i\cdot\mathbb{B}_{i-1k+1}+q_i\cdot\mathbb{B}_{ik+1}+r_{i+1}\,\mathbb{B}_{i+1k+1}=\mathbb{O}_{ik+1}\ ,\ \text{если}\ 1\le i\le k\ \text{при}\ (j=k+1);\end{cases}\\
\begin{cases}P_i\cdot[\mathbb{B}_{i-1j}]_{12}+q_i\cdot[\mathbb{B}_{ij}]_{12}+r_{i+1}\cdot[\mathbb{B}_{i+1j}]_{12},\ \text{если}\ 1\le i\le k-2\ \text{и}\ k+2\le j\le m,\\ P_{k-1}[\mathbb{B}_{k-2j}]_{12}+q_{k-1}[\mathbb{B}_{k-1j}]_{12}+r_k\cdot\mathbb{B}_{kj}=[\mathbb{O}_{k-1j}]\ ,\text{если}\ k+2\le j\le m\ \text{при}\ (i=k-1);\end{cases}\\
\begin{cases}P_k\cdot[\mathbb{B}_{k-1j}]_{12}+q_k\cdot\mathbb{B}_{kj}+r_{k+1}\cdot\mathbb{B}_{k+1j}=\mathbb{O}_{kj}\ ,\text{если}\ k+2\le j\le m\ \text{при}\ (i=k),\\ P_{k+1}\mathbb{B}_{kj}+q_{k+1}\mathbb{B}_{k+1j}+r_{k+2}[\mathbb{B}_{k+2j}]_{22}=\mathbb{O}_{k+1j}\ ,\text{если}\ k+2\le j\le m\ \text{при}\ (i=k+1);\end{cases}\\
\begin{cases}P_{k+2}\,\mathbb{B}_{k+1j}+q_{k+2}[\mathbb{B}_{k+2j}]_{22}+r_{k+3}[\mathbb{B}_{k+3j}]_{22}=[\mathbb{O}_{k+2j}]_{22},\text{если}\ k+3\le j\le m\ \text{при}\ (i=k+2),\\ P_i\cdot[\mathbb{B}_{i-1j}]_{22}+q_i\cdot[\mathbb{B}_{ij}]_{22}+r_{i+1}[\mathbb{B}_{i+1j}]_{22}=[\mathbb{O}_{ij}]_{22},\text{если}\ (k+3)\le i<j\le m;\end{cases}
\end{array}\right. \quad (2.26)$$

$\underline{(\mathbb{C}\cdot\mathbb{B}=E)\ \text{для всех}\ 1\le(i=j)\le m}$

$$\left[\begin{array}{l}
\begin{cases}P_i\cdot[\mathbb{B}_{i-1i}]_{11}+q_i\cdot[\mathbb{B}_{ii}]_{11}+r_{i+1}[\mathbb{B}_{i+1i}]_{11}=[E_i]_{11},\text{если}\ 1\le(i=j)\le k-2,\\ P_{k-1}[\mathbb{B}_{k-2k-1}]+q_{k-1}[\mathbb{B}_{k-1k-1}]_{11}+r_k\cdot\mathbb{B}_{kk-1}=[E_{k-1}]_{11}\ ,\text{если}\ (i=j)=k-1;\end{cases}\\
\begin{cases}P_k\cdot\mathbb{B}_{k-1k}+q_k\cdot(\mathbb{B}_{kk}=X_{kk})+r_{k+1}\cdot(\mathbb{B}_{k+1k}=X_{k+1k})=E_k\ ,\text{если}\ (i=j)=k,\\ P_{k+1}(\mathbb{B}_{kk+1}=X_{kk+1})+q_{k+1}(\mathbb{B}_{k+1k+1}=X_{k+1k+1})+r_{k+2}\mathbb{B}_{k+2k+1}=E_{k+1},\text{если}\ (i=j)=k+1;\end{cases}\\
\begin{cases}P_{k+2}\mathbb{B}_{k+1k+2}+q_{k+2}[\mathbb{B}_{k+2k+2}]_{22}+r_{k+3}[\mathbb{B}_{k+3k+2}]_{22}=[E_{k+2}]_{22}\ ,\text{если}\ (i=j)=k+2,\\ P_i\cdot[\mathbb{B}_{i-1i}]_{22}+q_i\cdot[\mathbb{B}_{ii}]_{22}+r_{i+1}\cdot[\mathbb{B}_{i+1i}]_{22}=[E_i]_{22}\ ,\text{если}\ k+3\le(i=j)\le m;\end{cases}
\end{array}\right. \quad (2.27)$$

$(C\cdot B=E)$ для всех $1\le j<i\le m$

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
z_{i+1}\cdot[B_{i+1j}]_{11}+q_i\cdot[B_{ij}]_{11}+p_i\cdot[B_{i-1j}]_{11}=[\Theta_{ij}]_{11} & \text{, если } 1\le j<i\le k-2,\\
z_k\cdot B_{kj}+q_{k-1}[B_{k-1j}]_{11}+p_{k-1}\cdot[B_{k-2j}]_{11}=[\Theta_{k-1j}]_{11} & \text{, если } 1\le j\le k-2 \text{ при } (i=k-1);
\end{cases}\\
\begin{cases}
z_{k+1}B_{k+1j}+q_k\cdot B_{kj}+p_k\cdot[B_{k-1j}]_{11}=\Theta_{kj} & \text{, если } 1\le j\le k-1 \text{ при } (i=k),\\
z_{k+2}[B_{k+2j}]_{21}+q_{k+1}\cdot B_{k+1j}+p_{k+1}\cdot B_{kj}=\Theta_{k+1j} & \text{, если } 1\le j\le k-1 \text{ при } (i=k+1);
\end{cases}\\
z_{k+3}\cdot[B_{k+3j}]_{21}+q_{k+2}\cdot[B_{k+2j}]_{21}+p_{k+2}\cdot B_{k+1j}=\Theta_{k+2j} & \text{, если } 1\le j\le k-1 \text{ при } (i=k+2),\\
\begin{cases}
z_{i+1}[B_{i+1j}]_{21}+q_i\cdot[B_{ij}]_{21}+p_i\cdot[B_{i-1j}]_{21}=[\Theta_{ij}]_{21} & \text{, если } k+3\le i\le m \text{ и } 1\le j\le k-1;
\end{cases}\\
\begin{cases}
z_{i+1}\cdot B_{i+1k}+q_i\cdot B_{ik}+p_i\cdot B_{i-1k}=\Theta_{ik} & \text{, если } k+1\le i\le m \text{ при } (j=k),\\
z_{i+1}\cdot B_{i+1k+1}+q_i\cdot B_{ik+1}+p_i\cdot B_{i-1k+1}=\Theta_{ik+1} & \text{, если } k+2\le i\le m \text{ при } (j=k+1);
\end{cases}\\
z_{i+1}\cdot[B_{i+1j}]_{22}+q_i\cdot[B_{ij}]_{22}+p_i\cdot[B_{i-1j}]_{22}=[\Theta_{ij}]_{22} & \text{, если } k+2\le j<i\le m.
\end{cases}
\tag{2.28}
$$

$(B\cdot C=E)$ для всех $1\le i<j\le m$

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
[B_{ij+1}]_{11}\cdot p_{j+1}+[B_{ij}]_{11}\cdot q_j+[B_{ij-1}]_{11}\cdot z_j=[\Theta_{ij}]_{11} & \text{, если } 1\le i<j\le k-2,\\
B_{ik}\cdot p_k+[B_{ik-1}]_{11}\cdot q_{k-1}+[B_{ik-2}]_{11}\cdot z_{k-1}=[\Theta_{ik-1}]_{11} & \text{, если } 1\le i\le k-2 \text{ при } (j=k-1);
\end{cases}\\
\begin{cases}
B_{ik+1}p_{k+1}+B_{ik}\cdot q_k+[B_{ik-1}]_{11}\cdot z_k=\Theta_{ik} & \text{, если } 1\le i\le k-1 \text{ при } (j=k),\\
[B_{ik+2}]_{12}p_{k+2}+B_{ik+1}q_{k+1}+B_{ik}\cdot z_{k+1}=\Theta_{ik+1} & \text{, если } 1\le i\le k-1 \text{ при } (j=k+1);
\end{cases}\\
\begin{cases}
[B_{ik+3}]_{12}\cdot p_{k+3}+[B_{ik+2}]_{12}\cdot q_{k+2}+B_{ik+1}\cdot z_{k+2}=[\Theta_{ik+2}]_{12} & \text{, если } 1\le i\le k-1 \text{ при } (j=k+2),\\
[B_{ij+1}]_{12}\cdot p_{j+1}+[B_{ij}]_{12}\cdot q_j+[B_{ij-1}]_{12}\cdot z_j=[\Theta_{ij}]_{12} & \text{, если } 1\le i\le k-1 \text{ и } k+3\le j\le m;
\end{cases}\\
\begin{cases}
B_{kj+1}\cdot p_{j+1}+B_{kj}\cdot q_j+B_{kj-1}z_j=\Theta_{kj} & \text{, если } k+2\le j\le m \text{ при } (i=k),\\
B_{k+1j+1}\cdot p_{j+1}+B_{k+1j}\cdot q_j+B_{k+1j-1}z_j=\Theta_{k+1j} & \text{, если } k+3\le j\le m \text{ при } (i=k+1);
\end{cases}\\
[B_{ij+1}]_{22}\cdot p_{j+1}+[B_{ij}]_{22}\cdot q_j+[B_{ij-1}]_{22}\cdot z_j=[\Theta_{ij}]_{22} & \text{, если } k+2\le i<j\le m.
\end{cases}
\tag{2.29}
$$

$(B\cdot C=E)$ для всех $1\le(i=j)\le m$

$$
\begin{cases}
\begin{cases}
[B_{ii-1}]_{11}\cdot z_i+[B_{ii}]_{11}\cdot q_i+[B_{ii+1}]_{11}\cdot p_{i+1}=[E_i]_{11} & \text{, если } 1\le(i=j)\le k-2,\\
[B_{k-1k-2}]_{11}\cdot z_{k-1}+[B_{k-1k-1}]_{11}\cdot q_{k-1}+B_{k-1k}\cdot p_k=[E_{k-1}]_{11} & \text{, если } (i=j)=k-1;
\end{cases}\\
\begin{cases}
B_{kk-1}\cdot z_k+(B_{kk}=X_{kk})\cdot q_k+(B_{kk+1}=X_{kk+1})\cdot p_{k+1}=[E_k] & \text{, если } (i=j)=k,\\
(B_{k+1k}=X_{k+1k})\cdot z_{k+1}+(B_{k+1k+1}=X_{k+1k+1})\cdot q_{k+1}+B_{k+1k+2}\cdot p_{k+2}=[E]_{k+1} & \text{, если } (i=j)=k+1;
\end{cases}\\
\begin{cases}
B_{k+2k+1}\cdot z_{k+2}+[B_{k+2k+2}]_{22}\cdot q_{k+2}+[B_{k+2k+3}]_{22}\cdot p_{k+3}=[E_{k+2}]_{22} & \text{, если } (i=j)=k+2,\\
[B_{ii-1}]_{22}\cdot z_i+[B_{ii}]_{22}\cdot q_i+[B_{ii+1}]_{22}\cdot p_{i+1}=[E_i]_{22} & \text{, если } k+3\le(i=j)\le m.
\end{cases}
\end{cases}
\tag{2.30}
$$

$(B\cdot C=E)$ для всех $1\le j<i\le m$

$$
\begin{cases}
[B_{ij-1}]_{11}\cdot z_j+[B_{ij}]_{11}\cdot q_j+[B_{ij+1}]_{11}\cdot p_{j+1}=[\Theta_{ij}]_{11} & \text{, если } 1\le j<i\le k-1,\\
\begin{cases}
B_{kj-1}\cdot z_j+B_{kj}\cdot q_j+B_{kj+1}\cdot p_{j+1}=\Theta_{kj} & \text{, } 1\le j\le k-1 \text{ при } (i=k),\\
B_{k+1j-1}\cdot z_j+B_{k+1j}\cdot q_j+B_{k+1j+1}\cdot p_{j+1}=\Theta_{k+1j} & \text{, } 1\le j\le k-1 \text{ при } (i=k+1);
\end{cases}\\
\begin{cases}
[B_{ij-1}]_{21}\cdot z_j+[B_{ij}]_{21}\cdot q_j+[B_{ij+1}]_{21}\cdot p_{j+1}=[\Theta_{ij}]_{21} & \text{, если } k+2\le i\le m \text{ и } 1\le j\le k-2,\\
[B_{ik-2}]_{21}\cdot z_{k-1}+[B_{ik-1}]_{21}\cdot q_{k-1}+B_{ik}\cdot p_k=[\Theta_{ik-1}]_{21} & \text{, если } k+2\le i\le m \text{ при } (j=k-1);
\end{cases}\\
\begin{cases}
B_{ik+1}\cdot z_{k+2}+[B_{ik+2}]_{22}\cdot q_{k+2}+[B_{ik+3}]_{22}\cdot p_{k+3}=[\Theta_{ik+2}]_{22} & \text{, если } k+3\le i\le m \text{ при } (j=k+2),\\
B_{ik}\cdot z_{k+1}+B_{ik+1}\cdot q_{k+1}+[B_{ik+2}]_{22}\cdot p_{k+2}=\Theta_{ik+1} & \text{, если } k+2\le i\le m \text{ при } (j=k+1);
\end{cases}
\end{cases}
\tag{2.31}
$$

$$\left\{\begin{cases}[\mathcal{B}_{ik-1}]_{21}\cdot z_k+\mathcal{B}_{ik}\cdot q_k+\mathcal{B}_{ik+1}\cdot P_{k+1}=0_{ik} & \text{, если } k+2\le i\le m \quad \text{при } (j=k),\\ [\mathcal{B}_{ij-1}]_{22}\cdot z_j+[\mathcal{B}_{ij}]_{22}\cdot q_j+[\mathcal{B}_{ij+1}]_{22}\cdot P_{j+1}=[0_{ij}]_{22} & \text{, если } k+3\le j<i\le m.\end{cases}\right.$$

Далее, проверив[x)] справедливость равенств (2.26)÷(2.31) для представлений 2.2 (при условии П), получаем следующие матричные равенства

При условии I

$$\begin{cases}\Lambda_{k+1}\cdot X_{kk}(\Lambda)+z_{k+1}\cdot X_{k+1k}(\Lambda)=E_{kk},\\ \Lambda_{k+1}\cdot X_{kk+1}(\Lambda)+z_{k+1}\cdot X_{k+1k+1}(\Lambda)=0_{kk+1},\\ P_{k+1}\cdot X_{kk}(\Lambda)+(q_{k+1}-\Theta_{k+1})\cdot X_{k+1k}(\Lambda)=0_{k+1k},\\ P_{k+1}\cdot X_{kk+1}(\Lambda)+(q_{k+1}-\Theta_{k+1})\cdot X_{k+1k+1}(\Lambda)=E_{k+1k+1};\end{cases} \qquad \begin{cases}X_{kk}(\Lambda)\cdot\Lambda_{k+1}+X_{kk+1}(\Lambda)\cdot P_{k+1}=E_{kk},\\ X_{kk}(\Lambda)\cdot z_{k+1}+X_{kk+1}(\Lambda)\cdot(q_{k+1}-\Theta_{k+1})=0_{kk+1},\\ X_{k+1k}(\Lambda)\cdot\Lambda_{k+1}+X_{k+1k+1}(\Lambda)\cdot P_{k+1}=0_{k+1k},\\ X_{k+1k}(\Lambda)\cdot z_{k+1}+X_{k+1k+1}(\Lambda)\cdot(q_{k+1}-\Theta_{k+1})=E_{k+1k+1}.\end{cases} \tag{2.32}$$

При условии П

$$\begin{cases}(q_k-\hat{\Theta}_k)\cdot X_{kk}(G)+z_{k+1}\cdot X_{k+1k}(G)=E_{kk},\\ (q_k-\hat{\Theta}_k)\cdot X_{kk+1}(G)+z_{k+1}\cdot X_{k+1k+1}(G)=0_{kk+1},\\ P_{k+1}\cdot X_{kk}(G)+G_k\cdot X_{k+1k}(G)=0_{k+1k},\\ P_{k+1}\cdot X_{kk+1}(G)+G_k\cdot X_{k+1k+1}(G)=E_{k+1k+1};\end{cases} \qquad \begin{cases}X_{kk}(G)\cdot(q_k-\hat{\Theta}_k)+X_{kk+1}(G)\cdot z_{k+1}=E_{kk},\\ X_{kk}(G)\cdot z_{k+1}+X_{kk+1}(G)\cdot G_k=0_{kk+1},\\ X_{k+1k}(G)\cdot(q_k-\hat{\Theta}_k)+X_{k+1k+1}(G)\cdot P_{k+1}=0_{k+1k},\\ X_{k+1k}(G)\cdot z_{k+1}+X_{k+1k+1}(G)\cdot G_k=E_{k+1k+1}.\end{cases} \tag{2.33}$$

Аналогично из проверки равенств (2.26)÷(2.31) для представлений 2.3 и 2.4 при условии Ш получаем следующие матричные равенства:

При условии Ш

$$\begin{cases}\Lambda_{k+1}\cdot X_{kk}(\Lambda,G)+z_{k+1}\cdot X_{k+1k}(\Lambda,G)=E_{kk},\\ \Lambda_{k+1}\cdot X_{kk+1}(\Lambda,G)+z_{k+1}\cdot X_{k+1k+1}(\Lambda,G)=0_{kk+1},\\ P_{k+1}\cdot X_{kk}(\Lambda,G)+G_k\cdot X_{k+1k}(\Lambda,G)=0_{k+1k},\\ P_{k+1}\cdot X_{kk+1}(\Lambda,G)+G_k\cdot X_{k+1k+1}(\Lambda,G)=E_{k+1k+1};\end{cases} \qquad \begin{cases}X_{kk}(\Lambda,G)\cdot\Lambda_{k+1}+X_{kk+1}(\Lambda,G)\cdot P_{k+1}=E_{kk},\\ X_{kk}(\Lambda,G)\cdot z_{k+1}+X_{kk+1}(\Lambda,G)\cdot G_k=0_{kk+1},\\ X_{k+1k}(\Lambda,G)\cdot\Lambda_{k+1}+X_{k+1k+1}(\Lambda,G)\cdot P_{k+1}=0_{k+1k},\\ X_{k+1k}(\Lambda,G)\cdot z_{k+1}+X_{k+1k+1}(\Lambda,G)\cdot G_k=E_{k+1k+1}.\end{cases} \tag{2.34}$$

Замечание 2.I. Отметим, что при проверке равенств (2.26)÷(2.31) для представлений 2.3 и 2.4 (при условии Ш) необходимо воспользоваться следующими коммутационными соотношениями (и основными равенствами) для $\tilde{\mathcal{B}}_{ij}$ – элементов-блоков усечённых подматриц $\tilde{\mathcal{B}}_1^{k-1}=[\mathcal{C}_1^{k-1}(\Lambda,G)]^{-1}$ и $\tilde{\mathcal{B}}_{k+2}^{m}=[\mathcal{C}_{k+2}^{m}(\Lambda,G)]^{-1}$, соответственно:

$$\begin{cases}\tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod\limits_{s=i+1}^{j}\hat{\beta}_s=[\tilde{\mathcal{B}}_{ij}]=\prod\limits_{s=i+1}^{j}c_s\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj} & \text{, для всех } 1\le i\le j\le k-1;\ k+2\le i\le j\le m,\\ \tilde{\mathcal{B}}_{ii}\cdot\prod\limits_{s=j+1}^{i}\beta_s=[\tilde{\mathcal{B}}_{ij}]=\prod\limits_{s=j+1}^{i}\hat{c}_s\cdot\tilde{\mathcal{B}}_{jj} & \text{, для всех } 1\le j\le i\le k-1;\ k+2\le j\le i\le m.\end{cases} \tag{2.35}$$

---

x) Мы опускаем здесь технику проверки равенств (2.28)+(2.3I), поскольку аналогичную работу мы уже проводили ранее /I₇₎/.

$$\begin{cases} \hat{C}_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{ii} = [\widetilde{B}_{i+1i}] = \widetilde{B}_{i+1i+1}\cdot\beta_{i+1}, \\ \widetilde{B}_{ii}\cdot\hat{\beta}_{i+1} = [\widetilde{B}_{ii+1}] = C_{i+1}\cdot\widetilde{B}_{i+1i+1}, \\ 1 \le i \le k-2\ ;\ k+2 \le i \le m-1\ ; \end{cases} \qquad \begin{cases} C_i\cdot\widetilde{B}_{ii} = [\widetilde{B}_{i-1i}] = \widetilde{B}_{i-1i-1}\cdot\hat{\beta}_i\ , \\ \widetilde{B}_{ii}\cdot\beta_i = [\widetilde{B}_{ii-1}] = \hat{C}_i\cdot\widetilde{B}_{i-1i-1}\ , \\ 2 \le i \le k-1\ ;\ k+3 \le i \le m\ , \end{cases} \tag{2.36}$$

$$\begin{cases} \text{где } \{\widetilde{B}_{11} = G_0^{-1},\ \widetilde{B}_{ss} = (\Lambda_{s+1} + G_{s-1} - q_s)^{-1}\}_{s=2}^{k-1},\ \{\widetilde{B}_{k+2k+2} = G_{k+1}^{-1},\ \widetilde{B}_{ss} = (\Lambda_{s+1} + G_{s-1} - q_s)\}_{s=k+3}^{m}, \\ \text{а соответствующие матрицы } \{c, \hat{c}; \beta, \hat{\beta}\} \text{ есть (I.9).} \end{cases} \tag{2.37}$$

А также следует воспользоваться равенствами

$$\begin{cases} -P_k\cdot\prod_{s=j+1}^{k-1}\hat{c}_s\cdot\widetilde{B}_{jj} = (\hat{\xi}_j = z_j) = \prod_{s=j+1}^{k}\beta_s\ , \text{для всех } 1 \le j \le k-1, \\ \prod_{s=k+2}^{j}\hat{\beta}_s = (\hat{\tau}_j = F_j) = -2_{k+2}\cdot\prod_{s=k+3}^{j}c_s\cdot\widetilde{B}_{jj}\ , \text{ для всех } k+2 \le j \le m; \end{cases} \tag{2.38}$$

$$\begin{cases} -\widetilde{B}_{ii}\cdot\prod_{s=i+1}^{k-1}\hat{\beta}_s\cdot 2_k = (\hat{F}_i = \tau_i) = \prod_{s=i+1}^{k}c_s\ , \text{ для всех } 1 \le i \le k-1, & (2.39) \\ \prod_{s=k+2}^{i}\hat{c}_s = (\hat{z}_i = \xi_i) = -\widetilde{B}_{ii}\cdot\prod_{s=k+3}^{i}\beta_s\cdot P_{k+2}\ , \text{ для всех } k+2 \le i \le m. & (2.40) \end{cases}$$

Равенства (2.38) и (2.40) следуют из коммутационных соотношений (2.35) с учётом определений $\widetilde{B}_{ss}$ (2.37) и $\{\Lambda\}$ (I.2), $\{G\}$ (I.3).

На самом деле, имеем

$$(\hat{\xi}_i = -P_k\cdot\prod_{s=j+1}^{k-1}\hat{c}_s\cdot\widetilde{B}_{jj}) \overset{(2.35)}{=\!=\!=} (-P_k\cdot\widetilde{B}_{k-1k-1}\cdot\prod_{s=j+1}^{k-1}\beta_s) \overset{(2.37)}{=\!=\!=} (-P_k\cdot\Lambda_k^{-1})\cdot\prod_{s=j+1}^{k-1}\beta_s = (\prod_{s=j+1}^{k}\beta_s = z_j),$$

для всех $1 \le j \le k-1$.

$$(\hat{\tau}_i = \prod_{s=k+2}^{j}\hat{\beta}_s) = (-2_{k+2}\cdot G_{k+1}^{-1})\cdot\prod_{s=k+3}^{j}\hat{\beta}_s \overset{(2.37)}{=\!=\!=} (-2_{k+2}\cdot\widetilde{B}_{k+2k+2}\cdot\prod_{s=k+3}^{j}\hat{\beta}_s) \overset{(2.35)}{=\!=\!=} (-2_{k+2}\cdot\prod_{s=k+3}^{j}c_s\cdot\widetilde{B}_{jj} = F_j),$$

для всех $k+2 \le j \le m$.

Аналогично показывается справедливость равенств (2.40). Теорема доказана.

Отметим, что в общем случае $\mathbb{C}$ вида (I.I) B_{ij} – элементы-блоки обратной матрицы $B = \mathbb{C}^{-1}$ (при соответствующих условиях являются функциями от неизвестных матриц $\{B_{kk} = X_{kk}\ ,\ B_{kk+1} = X_{kk+1}\ ,\ B_{k+1k} = X_{k+1k}\ ,\ B_{k+1k+1} = X_{k+1k+1}\}$. В свою очередь, указанные неизвестные матрицы являются элементами-блоками невырожденных (в силу $det(\mathbb{C}) \ne 0$) обратных матриц $[\mathcal{M}_{\Lambda_{k+1}}]^{-1}$, $[\mathcal{M}_{G_k}]^{-1}$ и $[\mathcal{M}_{\Lambda_{k+1},G_k}]^{-1}$, где

$$\mathcal{M}_{\Lambda_k} = \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & 2_{k+1} \\ P_{k+1} & (q_{k+1} - \theta) \end{bmatrix},\quad \mathcal{M}_{G_k} = \begin{bmatrix} (q_k - \theta) & 2_{k+1} \\ P_{k+1} & G_k \end{bmatrix},\quad \mathcal{M}_{\Lambda_{k+1},G_k} = \begin{bmatrix} \Lambda_{k+1} & 2_{k+1} \\ P_{k+1} & G_k \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

С учётом сказанного выше и при дополнительных ограничениях на элементы матриц (2.41)имеет место

Следствие 2.I. Неизвестные $\{B_{kk} = X_{kk}\ ,\ B_{kk+1} = X_{kk+1}\ ,\ B_{k+1k} = X_{k+1k}\ ,\ B_{k+1k+1} = X_{k+1k+1}\}$ – элементы-блоки обратной матрицы $B = \mathbb{C}^{-1}$, при соответствующих условиях, могут быть представлены в виде[x)]:

---

x) В общем случае X_{kk}, X_{kk+1}, X_{k+1k} и X_{k+1k+1} могут быть найдены с учётом явного вида (2.41) одним из известных методов.

При условии I и если $det(q_{k+1}-\theta_{k+1})\neq 0$

$$\begin{cases} [X_{kk}(\Lambda)=\mathrm{B}_{kk}(\Lambda)]=[\Lambda_{k+1}-r_{k+1}\cdot(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}\cdot p_{k+1}]^{-1},\ [X_{kk+1}(\Lambda)=\mathrm{B}_{kk+1}(\Lambda)]=-\mathrm{B}_{kk}(\Lambda)\cdot r_{k+1}\cdot(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}; \\ [X_{k+1k}(\Lambda)=\mathrm{B}_{k+1k}(\Lambda)]=-(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}\cdot p_{k+1}\cdot\mathrm{B}_{kk}(\Lambda);\ [X_{k+1k+1}(\Lambda)=\mathrm{B}_{k+1k+1}(\Lambda)]=\{(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}+(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}\cdot p_{k+1}\cdot\mathrm{B}_{kk}(\Lambda)\cdot r_{k+1}\cdot(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}\}. \end{cases} \tag{2.42}$$

При этом

а). $(q_{k+1}-\theta_{k+1})=G_k$, если $\{det(G_j)\neq 0\}_{j=k+1}^{m}$.

б). $[det(\mathbb{C})\neq 0 \Rightarrow det(\mathcal{M}_{\Lambda_{k+1}})\neq 0] \Rightarrow det[\Lambda_{k+1}-r_{k+1}\cdot(q_{k+1}-\theta_{k+1})^{-1}\cdot p_{k+1}]\neq 0$.

При условии II и если $det(q_k-\theta_k)\neq 0$

$$\begin{cases} [X_{kk}(G)=\mathrm{B}_{kk}(G)]=\{(q_k-\hat\theta_k)^{-1}+(q_k-\hat\theta_k)^{-1}\cdot r_{k+1}\cdot\mathrm{B}_{k+1k+1}(G)\cdot p_{k+1}\cdot(q_k-\hat\theta_k)^{-1}\};\ [X_{kk+1}(G)=\mathrm{B}_{kk+1}(G)]=-(q_k-\hat\theta_k)^{-1}\cdot r_{k+1}\cdot\mathrm{B}_{k+1k+1}(G), \\ [X_{k+1k}(G)=\mathrm{B}_{k+1k}(G)]=-\mathrm{B}_{k+1k+1}(G)\cdot p_{k+1}\cdot(q_k-\hat\theta_k)^{-1},\ [X_{k+1k+1}(G)=\mathrm{B}_{k+1k+1}(G)]=[G_k-p_{k+1}\cdot(q_k-\hat\theta_k)^{-1}\cdot r_{k+1}]^{-1}. \end{cases} \tag{2.43}$$

При этом

а). $(q_k-\hat\theta_k)=\Lambda_{k+1}$, если $\{det(\Lambda_j)\neq 0\}_{j=1}^{k}$.

б). $[det(\mathbb{C})\neq 0 \Rightarrow det(\mathcal{M}_{G_k})\neq 0] \Rightarrow det[G_k-p_{k+1}\cdot(q_k-\hat\theta_k)^{-1}\cdot r_{k+1}]\neq 0$.

При условии III и если $det(p_{k+1})\neq 0 \neq det(r_{k+1})$

$$\begin{cases} p_{k+1}^{-1}\cdot G_k\cdot(\Lambda_{k+1}\cdot p_{k+1}^{-1}\cdot G_k-r_{k+1})^{-1}=[\mathrm{B}_{kk}(\Lambda,G)=X_{kk}(\Lambda,G)]=(G_k\cdot r_{k+1}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}-p_{k+1})^{-1}\cdot G_k\cdot r_{k+1}^{-1}, \\ r_{k+1}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}\cdot(G_k\cdot r_{k+1}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}-p_{k+1})^{-1}=[\mathrm{B}_{k+1k+1}(\Lambda,G)=X_{k+1k+1}(\Lambda,G)]=(\Lambda_{k+1}\cdot p_{k+1}^{-1}\cdot G_k-r_{k+1})^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}\cdot p_{k+1}^{-1}, \\ [\mathrm{B}_{kk+1}(\Lambda,G)=X_{kk+1}(\Lambda,G)]=-(G_k\cdot r_{k+1}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}-p_{k+1})^{-1},\ [\mathrm{B}_{k+1k}(\Lambda,G)=X_{k+1k}(\Lambda,G)]=-(\Lambda_{k+1}\cdot p_{k+1}^{-1}\cdot G_k-r_{k+1})^{-1}. \end{cases} \tag{2.44}$$

При этом

а). $\Lambda_{k+1}=(q_k-\hat\theta_k)$, $G_k=(q_{k+1}-\theta_{k+1})$;

б). $[det(\mathbb{C})\neq 0 \Rightarrow det(\mathcal{M}_{\Lambda_{k+1},G_k})\neq 0] \Rightarrow [det(\Lambda_{k+1}\cdot p_{k+1}^{-1}\cdot G_k-r_{k+1})\neq 0\neq det(G_k\cdot r_{k+1}^{-1}\cdot\Lambda_{k+1}-p_{k+1})]$, но $[det(\mathrm{B}_{kk}(\Lambda,G))=0$ из-за $det(G_k)=0$; $[det(\mathrm{B}_{k+1k+1}(\Lambda,G))=0$ из-за $det(\Lambda_{k+1})=0$.

Представления (2.42), (2.43) и (2.44) получаются из решений матричных уравнений (2.32), (2.33) и (2.34) при соответствующих условиях и при указанных дополнительных ограничениях на элементы матриц (2.41).

Справедливость этих представлений устанавливается проверкой равенств (2.32), (2.33) и (2.34) соответственно.

Заключение

В работе обобщены ранее полученные результаты по изучению явного вида структуры и множества представлений для элементов-блоков матриц, обратных к неособенным блочно-трёхдиагональным общего вида $\mathbb{C}(1.1)$, при наличии у них нулевого верхнего (либо нижнего) или одновременно верхнего и соответствующего нижнего ведущих блочных угловых миноров.

Литература

1. Емельяненко Г.А., Рахмонов Т.Т. Препринты ОИЯИ:
Р11-89-203, Дубна 1989; Р11-88-922, Дубна 1988;
Р11-89-340, Дубна 1989; Р11-86-504, Дубна 1986;
Р11-88-786, Дубна 1988; Р11-88-598, Дубна 1988;
Р11-87-533, Дубна 1987.

2. Емельяненко Г.А. Блочно-трёхдиагональные матрицы и методы численного решения спектральных задач. Автореферат докторской диссертации. ВЦ СО АН СССР. Новосибирск 1992; ОИЯИ 11-92-4. Дубна 1992.

3. Рахмонов Т.Т. О свойствах блочно-трёхдиагональных (и им обратных) матриц и их роли в решении некоторых задач линейной алгебры и обработки экспериментальных данных в физике высоких энергий. Автореферат кандидатской диссертации. ИВМ АН ГССР. Тбилиси 1990.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июля 1993 года.