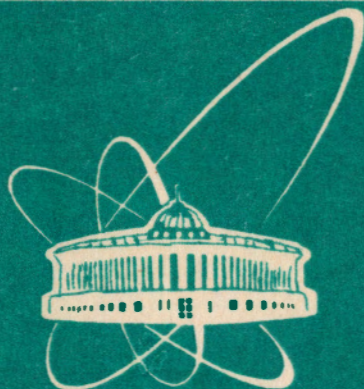


93-210



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-93-210

Е.П.Жидков, Т.М.Макаренко, Б.Н.Хоромский

**РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ИТЕРАЦИЙ
КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ
ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ
С НЕЛИНЕЙНЫМ ВХОЖДЕНИЕМ
СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА**

1993

Исследование ряда задач теоретической физики требует дальнейшей разработки численных методов решения квазипотенциальных уравнений для волновой функции системы двух частиц. В предыдущей нашей работе /1/ рассматривался класс интегральных уравнений с потенциалами взаимодействий, зависящими от полной энергии системы, являющейся в данном случае спектральным параметром задачи. Уравнения с потенциалом, обладающим таким свойством, были получены в /2/ посредством последовательного построения ядер, описывающих взаимодействие между частицами, из матричных элементов релятивистской амплитуды рассеяния. Для решения такого рода уравнений нами был предложен метод итераций, обеспечивающий необходимую точность расчетов. В /1/ приводятся спектры значений энергий связи для интегрального уравнения с двумя видами потенциалов: нерелятивистским и релятивистским. В настоящей статье мы рассмотрим некоторые вопросы применения метода итераций к нелинейной задаче на собственные значения, к которой сводятся интересующие нас интегральные уравнения.

Нами исследовалось уравнение

$$G_0^{-1} \Psi(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} v_1(x, y; \mu) \Psi(y) D(y) dy. \quad (1)$$

Здесь α - электродинамическая константа связи $\alpha = \frac{1}{137}$;

G_0^{-1} - обратная функция к свободной функции Грина двухчастичной системы,

$$G_0^{-1} = k_1(x) - \mu,$$

$k_1(x)$ - кинетическая энергия системы,

$D(y) = c_1(y) dy$ - элемент объема интегрирования,

μ - спектральный параметр.

В релятивистском случае

$$v_1(x, y; \mu) = \ln \left(\frac{x+y + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \mu}{|x-y| + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \mu} \right), \quad (2)$$

$$k_1(x) = 2\sqrt{1+x^2},$$

$$c_1(y) = (1+y^2)^{-1}.$$

В нерелятивистском случае

$$v_2(x, y; \mu) = \ln \left(\frac{x+y+2-\mu}{|x-y|+2-\mu} \right), \quad (3)$$

$$k_2(x) = x^2 + 2,$$

$$c_2(y) = 1.$$

Один из способов решения уравнения (I) рассматривался авторами работы^{/3/} и заключался в следующем.

Пусть задано одномерное уравнение вида

$$G(x, \mu) f(x) = \lambda \int_a^b v(x, y; \mu) f(y) dy, \quad (4)$$

где $G(x, \mu)$ и $v(x, y; \mu)$ — известные функции, μ — задаваемый параметр, λ — искомое собственное значение, $f(y)$ — искомая функция. Зададим некоторую последовательность значений μ . Для каждого μ_i решим уравнение (4) и найдем соответствующие ему собственные значения $\lambda_n = \lambda_n(\mu_i)$. Рассмотрим, как изменяется собственное значение λ_i , имеющее номер i в зависимости от изменения μ . Возьмем достаточно малое $\Delta\mu = \mu_i - \mu_{i-1}$ и отметим на графике точки $\lambda_i(\mu_1), \lambda_i(\mu_2), \dots, \lambda_i(\mu_n)$. В областях немонотонной зависимости λ_i от μ , т.е. при выполнении условия

$$\begin{cases} \lambda_i(\mu_i) < \lambda_i(\mu_{i+1}) \\ \lambda_i(\mu_i) < \lambda_i(\mu_{i-1}), \end{cases} \quad (5)$$

решим уравнение (4) для последовательности μ_i такой, что

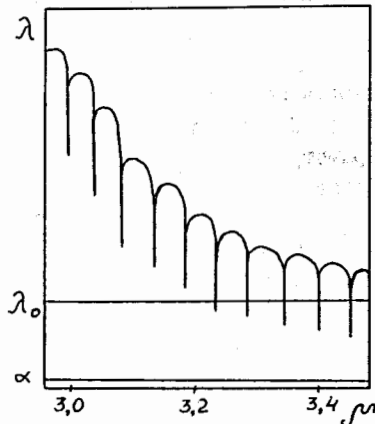


Рис. I

$\Delta\mu' = \frac{1}{p} \Delta\mu$. В нашем случае $p=10$. Снова найдем такие

значения μ_i' , для которых выполняется условие (5), уменьшим значение $\Delta\mu' = \mu_i' - \mu_{i-1}'$ в p раз и решим уравнение (4) для набора значений μ_i'' . Повторив такую последовательность действий несколько раз и соединив между собой все полученные точки λ_i , построим кривую, изображенную на рис. I. Такую же операцию проделаем с другими собственными числами λ и получим набор функций $\lambda_n(\mu)$, зависящих сложным образом от μ . Кривые $\lambda(\mu)$ имеют узкие и глубокие провалы. Пересечение этих кривых с нужным нам значением λ_0 должно давать уровни μ_n , рассматриваемые авторами работы^{/3/} как резонансные состояния двухчастичной системы e^+e^-, p^+p^+, e^-e^- с положительной энергией связи. Однако кривые $\lambda_n(\mu)$ не достигают значения $\lambda_0 = \alpha = \frac{1}{137}$, представляющего практический интерес при исследовании двухчастичной системы, даже если решать уравнение (4) в областях провалов при такой последовательности μ_i , что $\Delta\mu = \mu_i - \mu_{i-1}$ очень мало, в нашем случае $\Delta\mu$ достигало значения $\Delta\mu = 10^{-32}$. То есть точность метода позволяет говорить только о предположительном пересечении кривых $\lambda_n(\mu)$ прямой $\lambda_0 = \frac{1}{137}$, основываясь на анализе поведения функции и ее первой производной в этих критических точках. Поэтому проведение исследования уравнения (I) более точным методом позволило бы с большей достоверностью находить спектры значений μ_n .

Для решения этой проблемы нами был предложен метод итераций. С помощью дискретизации по Галеркину^{/1,4/} интегральное уравнение (I) сводится к задаче на собственные значения

$$A(\mu)u = \mu u, \quad (6)$$

где u — вектор неизвестных,

$$A(\mu) = k(x_1) - \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^n \int_0^n v(x_1, y; \mu) c(y) \varphi_j(y) dy, \quad (7)$$

$$x = ih, \quad i = 1, \dots, n.$$

Таким образом, μ входит и в левую, и в правую часть выражения (6).

Применение метода итераций к нелинейной задаче (6) заключалось в следующем.

1. Выбиралось некоторое значение $\mu^{(0)}$.
2. Для выбранного $\mu^{(0)}$ решалась задача на собственные значения

$$A(\mu^{(0)})u = \mu^{(1)}u.$$

3. Из набора полученных собственных чисел $\mu^{(1)}$ выбиралось $\mu_k^{(1)}$

с учетом того факта, что искомые μ имеют некоторые допустимые границы, зависящие от вида потенциала.

4. $\mu_k^{(1)}$ подставлялось в $A(\mu)$ и решалась задача $A(\mu_k^{(1)})u = \mu_k^{(2)}u$,

где верхний индекс - номер итерации, нижний индекс - номер собственного числа.

$$A(\mu_k^{(i-1)})u = \mu_k^{(i)}u$$

Процесс продолжался до тех пор, пока не выполнялось условие

$$|\mu_k^{(n)} - \mu_k^{(n-1)}| < \varepsilon$$

где ε - заранее заданное число, определяющее точность решения задачи.

О существенно более высокой эффективности метода итераций по сравнению с решением линейной однородной системы, к которой сводится уравнение (4), и исследованием поведения кривых $\lambda(\mu)$, как это делалось в [3], говорит тот факт, что задача на собственные значения (6) решалась при уже зафиксированном значении $\alpha = \frac{1}{137}$.

Таким способом в [1] были получены энергетические спектры для связанной электродинамической системы двух частиц. Высокую точность метода итераций показывают результаты сравнения величин уровней энергии в случае двухчастичного уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом, для которого известны точные решения, - и их значений, полученных численно.

Чтобы теоретически обосновать возможность применения метода итераций к решению уравнения (1), необходимо рассмотреть вопрос о его сходимости. Для этого нами были проведены численные эксперименты по исследованию поведения расстояния между элементами множеств, в качестве которых выбирались собственное значение и собственная функция задачи (6).

Если $\bar{\mu}$ и $\bar{\mu}$ - собственные числа, а $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$ и $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \dots, \bar{u}_N)$ - собственные функции, то расстояние определялось следующим образом:

$$\rho(\mu; u) = |\bar{\mu} - \bar{\mu}| + \sup_{1 \leq n \leq N} |\bar{u}_n - \bar{u}_n|$$

1. Решаем задачу с одним начальным приближением μ^0 . Пусть $\bar{\mu}$ - любое собственное число, например, минимальное, \bar{u} - соот-

ветствующая ему собственная функция при (n) -й итерации, а $\bar{\mu}$ - минимальное собственное число, \bar{u} - соответствующая ему собственная функция при $(n+1)$ -й итерации. Тогда формулу, по которой вычисляется расстояние в таком случае, можно записать в следующем виде

$$\rho_1 = |(\mu_{i, u_i}^{(n)}) - (\mu_{i, u_i}^{(n+1)})|$$

где верхний индекс - номер итерации, нижний индекс - номер собственного числа и собственной функции.

Результаты расчетов представлены в таблицах № 1 (в нерелятивистском случае) и № 2 (в релятивистском случае), в которых приведены значения расстояния ρ_1 для нескольких процессов итераций с различными начальными приближениями μ_0 , расположенными в первой горизонтальной строке таблицы, в зависимости от номера итерации n (номера итераций занимают первую колонку таблицы).

Таблица I

$n \backslash \mu_0$	-0.001	-0.1	0.5	1.1
1	0.999475 · 10 ⁻³	0.110109	0.370010	0.750547
2	0.126512 · 10 ⁻⁴	0.101569 · 10 ⁻¹	0.112547	0.238207
3	0.200687 · 10 ⁻⁶	0.347740 · 10 ⁻⁴	0.134855 · 10 ⁻¹	0.123398 · 10 ⁻¹
4	0.318417 · 10 ⁻⁸	0.551740 · 10 ⁻⁶	0.315862 · 10 ⁻⁴	0.340613 · 10 ⁻⁴
5	0.505210 · 10 ⁻¹⁰	0.875402 · 10 ⁻⁸	0.671814 · 10 ⁻⁶	0.540435 · 10 ⁻⁶
6	0.801581 · 10 ⁻¹²	0.138894 · 10 ⁻⁹	0.894271 · 10 ⁻⁸	0.857466 · 10 ⁻⁸
7	0.127179 · 10 ⁻¹³	0.220373 · 10 ⁻¹¹	0.112912 · 10 ⁻⁹	0.136048 · 10 ⁻⁹
8	0.127179 · 10 ⁻¹³	0.358147 · 10 ⁻¹³	0.275411 · 10 ⁻¹¹	0.291562 · 10 ⁻¹¹

Из таблиц № 1 и № 2 видно, что расстояние с каждым шагом последовательно уменьшается, пока процесс итераций не сойдется к решению задачи.

2. Также мы рассматривали одновременно два процесса итераций с различными начальными приближениями для нахождения одного и того же собственного числа и собственной функции. Введем следующие обозначения. $\bar{\mu}_i$ - собственное число с номером i , \bar{u}_i - соответствующая ему собственная функция, полученные в результате (n) -й итерации при решении задачи с начальным приближением $\bar{\mu}^{(0)}$. А $\bar{\mu}_i$ и \bar{u}_i - собственное число и собственная функция, также полученные в результате (n) -й итерации, но при решении задачи с начальным приближением $\bar{\mu}^{(0)}$.

Таблица 4

$\bar{\mu}_0$	-3	-100	-100	-100
$\bar{\mu}_0$	3	-3	6	100
1	0.112714.10 ⁻²	0.987135.10 ⁻¹	0.100157	0.251314
2	0.174128.10 ⁻⁴	0.851151.10 ⁻³	0.941538.10 ⁻³	0.411328.10 ⁻¹
3	0.894115.10 ⁻⁷	0.736514.10 ⁻⁵	0.851613.10 ⁻⁵	0.831145.10 ⁻³
4	0.751123.10 ⁻⁹	0.591627.10 ⁻⁷	0.745714.10 ⁻⁷	0.141837.10 ⁻⁴
5	0.581514.10 ⁻¹¹	0.441883.10 ⁻⁹	0.519411.10 ⁻⁹	0.102813.10 ⁻⁶
6	0.214415.10 ⁻¹³	0.287187.10 ⁻¹¹	0.410005.10 ⁻¹¹	0.951744.10 ⁻⁹
7	0.214415.10 ⁻¹³	0.117455.10 ⁻¹³	0.331735.10 ⁻¹³	0.713318.10 ⁻¹¹

Чем дальше друг от друга отстоят первоначальные приближения $\bar{\mu}_0$ и $\bar{\mu}_0$, тем больше значение ρ_2 для первых шагов итераций. Поэтому если заранее, до решения математической задачи, возможно провести физический анализ данных, то следует определить область, в границах которой должно находиться решение задачи, и выбирать начальное приближение из этой области.

Полученные результаты численных экспериментов показывают, что рассматриваемое нами отображение элементов множеств, в качестве которых выбирались собственные значения и собственные функции задачи, является сжимающим. Здесь приведена лишь часть полученных данных. Из таблиц видно, что коэффициент сжатия $k \ll 1$. Это означает, что исследуемое отображение удовлетворяет теореме о сжимающих отображениях.

Дальнейшим нашим шагом будет теоретическое доказательство сходимости метода итераций в применении к решению нелинейной задачи на собственные значения, к которой сводятся интегральные уравнения, применяемые при изучении спектральной задачи для двухчастичной системы.

Таблица 2

$\bar{\mu}_0$	-100	3	6	100
1	102.008	0.999556	3.999557	97.9996
2	0.111206.10 ⁻³	0.111474.10 ⁻³	0.110607.10 ⁻³	0.110941.10 ⁻³
3	0.482469.10 ⁻⁵	0.332533.10 ⁻⁵	0.375900.10 ⁻⁵	0.451718.10 ⁻⁵
4	0.929928.10 ⁻⁷	0.641626.10 ⁻⁷	0.724918.10 ⁻⁷	0.981435.10 ⁻⁷
5	0.180056.10 ⁻⁸	0.124323.10 ⁻⁸	0.140463.10 ⁻⁸	0.172614.10 ⁻⁸
6	0.348853.10 ⁻¹⁰	0.240882.10 ⁻¹⁰	0.272132.10 ⁻¹⁰	0.314569.10 ⁻¹⁰
7	0.675681.10 ⁻¹²	0.468459.10 ⁻¹²	0.528133.10 ⁻¹²	0.618514.10 ⁻¹²
8	0.131000.10 ⁻¹³	0.513318.10 ⁻¹³	0.611835.10 ⁻¹³	0.145966.10 ⁻¹³

Значения расстояния ρ_2 представлены в таблице 3 (для уравнения с нерелятивистским потенциалом) и № 4 (для релятивистского уравнения), где в первой колонке, как и прежде, приведены номера итераций n , а в первых двух строках - значения начальных приближений $\bar{\mu}_0$ и $\bar{\mu}_0$ для двух процессов итераций.

Таблица 3

$\bar{\mu}_0$	-0.0001	-0.001	-0.001	-0.5
$\bar{\mu}_0$	-0.0002	-0.003	-0.5	1.05
1	0.933018.10 ⁻¹	0.256152	1.051804	1.960343
2	0.623951.10 ⁻³	0.309873.10 ⁻¹	0.526811	0.808124
3	0.633000.10 ⁻⁵	0.283604.10 ⁻³	0.720686.10 ⁻²	0.490544
4	0.454010.10 ⁻⁷	0.105727.10 ⁻⁵	0.670794.10 ⁻⁴	0.279452
5	0.251723.10 ⁻⁹	0.975416.10 ⁻⁸	0.574112.10 ⁻⁶	0.205349.10 ⁻²
6	0.172841.10 ⁻¹¹	0.808124.10 ⁻¹⁰	0.492815.10 ⁻⁸	0.132144.10 ⁻⁴
7	0.514120.10 ⁻¹³	0.460140.10 ⁻¹²	0.332337.10 ⁻¹⁰	0.101517.10 ⁻⁶
8	0.514120.10 ⁻¹³	0.112113.10 ⁻¹³	0.217532.10 ⁻¹²	0.942115.10 ⁻⁹
9	0.514120.10 ⁻¹³	0.112113.10 ⁻¹³	0.101274.10 ⁻¹³	0.812045.10 ⁻¹¹

Литература

1. Грегус М.М., Жидков Е.П., Макаренко Т.М., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, РИ-92-142, Дубна, 1992.
2. Капшай В.Н., Саврин В.И., Скачков Н.Б. ТМФ, 69(1986), № 3, 400.
3. Arbusov V.A., Boos E.E., Savrin V.I. and Shichanin S.A. Phys. Lett. A, 5(1990), 1441.
4. Atkinson K.E. A survey of numerical methods for the solution of Fredholm equations of the second kind (SIAM, Philadelphia, PA, 1976).

Рукопись поступила в издательский отдел
8 июня 1993 года.