СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р11 - 9222

С.Р.Аврамов

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА

1975

P11 - 9222

С.Р.Аврамов

К ВОПРОСУ О СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕННОГО МЕТОДА НЬЮТОНА

Аврамов С.Р. P11 - 9222

К вопросу о сходимости обобщенного метода Ньютона

Исследованы условия, при которых сходится нелокально обобщенный метод Ньютона для решения уравнения $P(x)=0$, без предположения о выпуклости P.

Работа выполнена в Лаборатории ядерных проблем ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна 1975

Avramov S.P. P11 - 9222

On the Convergence of the Generalized Newton Method

The problems of nonlocal convergence of the generalized Newton method for the case of the Banach spaces are investigated. A theorem on total convergence of the generalized Newton method is obtained.

The investigation has been performed at the Laboratory of Nuclear Problems, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research
Dubna 1975

1. Введение

Обобщенным методом Ньютона для решения уравнения

$$P(x)=0, \qquad /1/$$

где P - оператор, отображающий нормированное пространство X в нормированном пространстве Y и удовлетворяющий некоторым условиям гладкости, принято называть /см.[1,2] / способ, при котором последовательность $\{x_n\}, (n=0,1,...)$ элементов из X, являющихся последовательными приближениями к решению /1/, определяется итерационным процессом /ИП/

$$x_0 : x_{n+1} = x_n - \beta_n [P'(x_n)]^{-1} P(x_n), \qquad /2/$$

/вещественные числа $0<\beta_n\le 1$ выбраны подходящим образом/.

Обобщенный метод Ньютона предложен Л.В.Канторовичем в работе[3]. Канторович показал, что обобщенный метод Ньютона сходится при тех же условиях, что и обычный метод Ньютона.

Вопрос о сходимости обобщенного метода Ньютона рассматривался в[4,5] и др. /см. обзоры [1,2]/, в предположении, что P -потенциальный оператор. В таком случае ИП /2/ сходится нелокально, в чем его преимущество перед обычным методом Ньютона.

Недостатком ИП /2/ в некоторых случаях является необходимость обращения первой производной P. Вопрос о ее замене близкими в определенном смысле операторами рассматривался во многих работах /см.[5,6,7,8]

и др./ в разных пространствах. При этом на операторы, подставляемые вместо $[P'(x)]^{-1}$ в /2/, накладывались жесткие ограничения либо предполагалась выпуклость P.

В настоящей работе исследовался вопрос о сходимости ИП

$$x_0;\ x_{n+1} = x_n - \beta_n\,[G_{x_n}]^{-1} P(x_n), \qquad /3/$$

где $0 < \beta_n^a \le \beta_n \le \beta_n^b \le 1$, а β_n^a и β_n^b выбраны подходящим образом. Оператор G_x предполагается линейным, ограниченным, обратимым, зависящим от x и удовлетворяющим условию

$$\| P'(x) G_x^{-1} - I \| \le \lambda < 1. \qquad /4/$$

Выпуклость P не предполагается. Предварительно доказываются две теоремы: для общего случая и для дважды непрерывно-дифференцируемых по Фреше операторов, обобщающие известную теорему Мысовских [9] о методе Ньютона. На основе этих результатов затем доказываются два утверждения о ИП /3/.

Аналогичные результаты, по-видимому, можно получить на основе непрерывного аналога метода Ньютона [10,11].

2. Общие утверждения

Теорема 1

Пусть непрерывный, вообще говоря, нелинейный оператор P отображает замкнутое подмножество Ω Банахова пространства X в Банахово пространство Y. Пусть существуют: последовательность $\{x_n\}$, $(n = 0,1,\dots)$ элементов из Ω, функционал p, отображающий Ω на множестве $(0,\infty)$ и постоянная $0 < \gamma < \infty$, удовлетворяющие при каждом n соотношениям:

$$\| P(x_{n+1}) \| \le p(x_n)\, \| P(x_n) \|, \qquad /5/$$

$$0 \le p(x_n) \le \delta_n \le \delta < 1, \qquad /6/$$

$$\| x_{n+1} - x_n \| \le \gamma \| P(x_n) \|. \qquad /7/$$

Тогда последовательность $\{x_n\}$ сходится к точке $x^* \in \Omega$, которая является решением уравнения /1/ и имеют место оценки:

$$\| x^* - x_0 \| \le \gamma \frac{1}{1-\delta} \| P(x_0) \| \qquad /8/$$

$$\| x^* - x_n \| \le \gamma \frac{\delta^n}{1-\delta} \| P(x_0) \|. \qquad /9/$$

Доказательство:
Из /5/ и /6/ следует соотношение

$$\| P(x_n) \| \le \delta^n \| P(x_0) \|, \qquad /10/$$

так что

$$\| P(x_{n+k}) - P(x_n) \| \le \sum_{i=n}^{n+k-1} \| P(x_{i+1}) - P(x_i) \| \le$$

$$\le \sum_{i=n}^{n+k-1} (\| P(x_{i+1}) \| + \| P(x_i) \|) \le \| P(x_0) \| \sum_{i=n}^{n+k-1} \delta^i (\delta + 1) \le$$

$$\le \| P(x_0) \| \delta^n (\delta + 1) \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i = \delta^n \frac{1+\delta}{1-\delta} \| P(x_0) \|.$$

Последнее выражение стремится к нулю при любом k, когда $n \to \infty$, а значит, последовательность $\{P(x_n)\}$ сходится в себе. Следовательно, она сходится и, в силу полноты пространства Y, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n) = y^*. \qquad /11/$$

Из /10/, при $n\to\infty$, получается, что $y^*=0$. Из /7/ и /10/ вытекает неравенство

$$\| x_{n+1} - x_n \| \le \gamma \delta^n \| P(x_0) \|,$$

так что

$$\| x_{n+k} - x_n \| \le \sum_{i=n}^{n+k-1} \| x_{i+1} - x_i \| \le \gamma \| P(x_0) \| \sum_{i=n}^{n+k-1} \delta^i \le$$

$$\le \gamma \| P(x_0) \| \delta^n \sum_{i=0}^{\infty} \delta^i = \gamma \frac{\delta^n}{1-\delta} \| P(x_0) \| . \qquad /12/$$

Из этого соотношения и предположения о замкнутости Ω вытекает, что последовательность $\{x_n\}, (n=0,1,\dots)$ сходится к точке $x^* \in \Omega$. В силу непрерывности P и /11/ получается, что $P(x^*)=0$. Из /12/, при $k\to\infty$, получается оценка

$$\| x^* - x_n \| \le \gamma \frac{\delta^n}{1-\delta} \| P(x_0) \|,$$

откуда, при $n=0$,

$$\| x^* - x_0 \| \le \gamma \frac{1}{1-\delta} \| P(x_0) \| .$$

Теорема доказана.

Применение этого результата затруднительно, так как не ясен способ построения нужной последовательности $\{x_n\}, (n=0,1,\dots)$ элементов из Ω и функционала $p(x)$. Следующая теорема дает ответ на этот вопрос для класса достаточно гладких операторов.

Теорема 2

Пусть оператор P отображает открытое множество Ω Банахова пространства X в Банахово пространство Y и на замкнутом шаре $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0 = \{x / \| x - x_0 \| \le r\}$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше. Пусть существует линейный, ограниченный, обратимый, зависящий от x оператор Γ_x из Ω_0 в Y такой, что при $x \in \Omega_0$

$$\| \Gamma_x^{-1} \| \le \gamma < \infty . \qquad /13/$$

Пусть последовательность $\{x_n\}, (n=0,1,\dots)$ элементов X определяется итерациями

$$x_0 ; \; x_{n+1} = x_n - \Gamma_{x_n}^{-1} P(x_n), \qquad /14/$$

а

$$\sup_{x\in\Omega_0} \| P''(x) \| \le K \qquad /14'/$$

и при каждом n, при котором $x_n \in \Omega_0$,

$$\| P'(x_n) \Gamma_{x_n}^{-1} - I_y \| + \frac{1}{2} K \| \Gamma_{x_n}^{-1} \|^2 \| P(x_n) \| \le \delta_n \le \delta < 1 . \qquad /15/$$

Тогда, если

$$r \ge \gamma \frac{\| P(x_0) \|}{1-\delta}, \qquad /16/$$

уравнение /1/ имеет по крайней мере одно решение. Последовательность $\{x_n\}, (n=0,1,\dots)$ определяемая ИП /14/, сходится к точке x^*, являющейся решением этого уравнения и имеет место оценка

$$\| x^* - x_n \| \le \gamma \frac{\delta^n}{1-\delta} \| P(x_0) \| .$$

Доказательство

Доказательство сводится к проверке выполнения условий теоремы 1. Согласно /14/, /15/, /16/

$$\| x_1 - x_0 \| \le \gamma \| P(x_0) \| \le r ,$$

следовательно, $x_1 \in \Omega_0$ и имеет место неравенство /7/. Пусть $\Delta x_0 = x_1 - x_0 = -\Gamma_{x_0}^{-1} P(x_0)$. По формуле Тейлора

$$P(x_1) = P(x_0) + P'(x_0)\Delta x_0 + \int_{x_0}^{x_1} P''(x)(x_1 - x, .)\, dx ,$$

где по определению /6/ стр. 596/

$$\int_{x_0}^{x_1} P''(x)\,(x_1 - x, .)\, dx = \int_0^1 P''(x_0 + t\Delta x)(x_1 - x_0 - t\Delta x_0, \Delta x_0)\, dt ,$$

так что

$$\| P(x_1) \| \le \| P(x_0) + P'(x_0)\Delta x_0 \| +$$

$$+ \| \int_0^1 P''(x_0 + t\Delta x_0)(\Delta x_0 - t\Delta x_0, \Delta x_0)\, dt \| . \qquad /17/$$

Из /14/ получается оценка

$$\|P(x_0)+P'(x_0)\Delta x_0\| = \|(P'(x_0)-\Gamma_{x_0})\Delta x_0\|,$$

так как $P(x_0)+\Gamma_{x_0}\Delta x_0=0$. Для второго члена в правой части /17/ с учетом свойств интегралов от операторов из R в нормированных пространствах /6 стр. 598/ получается

$$\left\|\int_0^1 P''(x_0+t\Delta x_0)(\Delta x_0 - t\Delta x_0, \Delta x_0)\,dt\right\| \le$$

$$\le \int_0^1 \|P''(x_0+t\Delta x_0)((1-t)\Delta x_0, \Delta x_0)\|\,dt \le$$

$$\le \int_0^1 \|P''(x_0+t\Delta x_0)\|\,\|\Delta x_0\|^2(1-t)\,dt.$$

Отсюда, согласно /14/ и определению Δx_0,

$$\left\|\int_0^1 P''(x_0)+t\Delta x_0)(\Delta x_0 - t\Delta x_0, \Delta x_0)\,dt\right\| \le \frac{1}{2}K\|\Gamma_{x_0}\|^2\|P(x_0)\|^2.$$

Таким образом,

$$\|P(x_1)\| \le \{\|P'(x_0)\Gamma^{-1}_{x_0} - I_y\| + \frac{1}{2}K\|\Gamma^{-1}_{x_0}\|^2\|P(x_0)\|\}\,\|P(x_0)\| = p(x_0)\|P(x_0)\|, \qquad /18/$$

где

$$p(x) = \|P'(x)\Gamma'_x - I_y\| + \frac{1}{2}\|\Gamma_x^{-1}\|\,\|P(x)\|.$$

Тем самым показано, что из /18/ и /15/ вытекают /5/ и /6/, т.е. при $n=0$ выполняются все условия теоремы 1. Пусть они выполняются при $n=k$. Тогда $x_k \in \Omega_0$ и, следовательно, имеет смысл x_{k+1}

$$x_{k+1} = x_k - \Gamma^{-1}_{x_k}P(x_k),$$

так что

$$\|x_{k+1} - x_0\| = \left\|\sum_{i=0}^{k}(x_{i+1}-x_i)\right\| \le \gamma\|P(x_0)\|\sum_{i=0}^{k}\delta^k \le \gamma\frac{\|P(x_0)\|}{1-\delta},$$

а значит $x_{k+1} \in \Omega$ и выполняется /7/. Выполнение /6/ и /6/ проверяется аналогично случаю $n=0$. Теорема доказана.

Теорема 2 не дает представления о том, как следует выбирать оператор Γ_x. Ниже приводится утверждение, определяющее класс операторов Γ_x. При его доказательстве используется следующее предложение:

Лемма 1

Пусть δ - произвольное число в отрезке

$$\left[\max\left(\frac{1-\lambda}{2},\ 1-\frac{(1-\lambda)^2}{2C}\right),\ 1\right)$$

где $\lambda < 1$ и $0 < C < \infty$. Тогда найдутся числа $0 < \beta^a \le \beta^b \le 1$ такие, что при $\beta^a \le \beta \le \beta^b$ функция

$$\delta(\beta) = \frac{1}{2}C\beta^2 - (1-\lambda)\beta + 1 \le \delta.$$

Доказательство

Уравнение $\delta(\beta)=\delta$ имеет два вещественных корня

$$\beta_{1,2} = \frac{1-\lambda}{C}\left(1 \pm \sqrt{1-2C\frac{1-\delta}{(1-\lambda)^2}}\right),$$

так как $1-\frac{(1-\lambda)^2}{2C} \le \delta$, а значит

$$1-2C\frac{1-\delta}{(1-\lambda)^2} \ge 1-2C\frac{1-1+\frac{(1-\lambda)^2}{2C}}{(1-\lambda)^2} = 0.$$

С другой стороны, из условия $\beta \le 1$ получается

$$\frac{1-\lambda}{C}\left(1-\sqrt{1-C\frac{1-\delta}{(1-\lambda)^2}}\right) \le 1,$$

откуда, в силу неотрицательности подкоренного выражения,

$$-\sqrt{1-2C\frac{1-\delta}{(1-\lambda)^2}} \le \frac{C}{1-\lambda} - 1,$$

так что

$$-\left(1-2C\frac{1-\delta}{(1-\lambda)^2}\right) \le \frac{C}{1-\lambda} - 1$$

и $2\frac{1-\delta}{1-\lambda} \le 1$, следовательно $\delta \ge \frac{1+\lambda}{2}$. Но по предположению δ всегда удовлетворяет этому соотношению. Остается положить $\beta^a = \beta_1$, $\beta^b = \min(1,\beta_2)$. Лемма доказана.

Теорема 3

Пусть оператор P отображает открытое множество Ω Банахова пространства X в Банахово пространство Y и на замкнутом шаре $\Omega_0 : \{x / \|x - x_0\| \le r\}$ имеет непрерывные первую и вторую производные Фреше. Пусть существует линейный, ограниченный и обратимый оператор G_x из Ω_0 в Y, зависящий от x и при каждом $x \in \Omega_0$ удовлетворяющий условиям:

$$\|G_x^{-1}\| \le g < \infty, \tag{19}$$

$$\|P'(x)G_x^{-1} - I_y\| \le \lambda < 1. \tag{20}$$

Пусть $\|P(x_0)\| \le \eta_0 < \infty$, а

$$\sup_{x \in \Omega_0} \|P''(x)\| \le K < \infty. \tag{21}$$

Тогда, если δ произвольное число в отрезке

$$\left[\max\left(\frac{\lambda+1}{2}, 1 - \frac{(1-\lambda)^2}{2Kg^2\beta^2\eta_0}\right), 1\right) \tag{22}$$

и

$$g\frac{\eta_0}{1-\delta} \le r, \tag{23}$$

то существуют последовательности чисел $\{\beta_n^a\}$, $\{\beta_n^b\}$, $(0 < \beta_n^a \le \beta_n^b \le 1)$, $(n = 0,1,\dots)$ такие, что при любом β_n: $\beta_n^a \le \beta_n \le \beta_n^b$ итерационный процесс

$$x_0, \quad x_{n+1} = x_n - \beta_n G_{x_n}^{-1} P(x_n) \tag{24}$$

сходится к точке $x^* \in \Omega_0$, являющейся решением уравнения /1/ и имеет место оценка

$$\|x^* - x_n\| \le g\frac{\delta^n}{1-\delta}\|P(x_0)\|.$$

Доказательство

Пусть $\Gamma_x = 1/\beta\, G_x$, где $0 < \beta \le 1$ произвольно. Очевидно Γ_x линеен, ограничен и обратим. Кроме того, $\|\Gamma_x^{-1}\| \le \gamma = g$. При каждом $x \in \Omega_0$ имеет смысл функционал

$$p(x) = \|P'(x)\Gamma_x^{-1} - I\| + \frac{1}{2}K\|\Gamma_x^{-1}\|^2\|P(x)\|$$

и
$$p(x) \le \|\beta(P'(x)G_x^{-1} - I_y + I_y) - I_y\| + \frac{1}{2}K\beta^2\|G_x^{-1}\|^2\|P(x)\| \le$$

$$\le \|\beta(P'(x)G_x^{-1} - I_y) + (\beta - 1)I_y\| + \frac{1}{2}K\beta^2\|G_x^{-1}\|^2\|P(x)\| \le$$

$$\le \beta\lambda + (1-\beta) + \frac{1}{2}K\beta^2 g^2\|P(x)\| =$$

$$= 1 - (1-\lambda)\beta + \frac{1}{2}K\beta^2 g^2\|P(x)\| = \delta(\beta).$$

Пусть $x = x_0$. Тогда $C = K g^2\eta_0 < \infty$. Так как согласно /20/, /21/ и /22/ выполняются все условия леммы 1, то найдутся такие числа β_0^a, β_0^b, что при $\beta_0^a \le \beta_0 \le \beta_0^b$, $\delta_0 = \delta(\beta) \le \delta$, т.е. $p(x) \le \delta_0 \le \delta < 1$. С другой стороны, из /24/ следует, что $\|x_1 - x_0\| \le g\|P(x_0)\| \le g\frac{\|P(x_0)\|}{1-\delta} \le r$, а значит $x_1 \in \Omega_0$. По формуле Тейлора легко получается соотношение

$$\|P(x_1)\| \le p(x_0)\|P(x_0)\| \le \delta\|P(x_0)\|,$$

откуда следует ограниченность $\|P(x_1)\|$. Итак, показано, что при $n = 0$ выполняются все условия теоремы 2 и $x_1 \in \Omega_0$, а $\|P(x_1)\|$ ограничена. Рассуждая аналогично, по индукции доказывается выполнение этих условий при любом n. Теорема доказана.

Таким же образом доказывается следующая теорема, в которой /23/ заменено граничным условием Гаврина [10].

Теорема 4

Пусть нелинейный оператор P отображает открытое множество Ω Банахова пространства X в Банахово пространство Y и на выпуклом, замкнутом, ограниченном множестве Ω_0 имеет непрерывные первую и вторую производные Фреше. Пусть существует зависящий от x линейный, ограниченный и обратимый оператор G_x, удовлетворяющий условиям

$$\sup_{x\in\Omega_0} \| G_x^{-1} \| \le g < \infty, \qquad /25/$$

$$\| P'(x) G_x^{-1} - I_y \| \le \lambda < 1 \qquad /26/$$

и пусть $\sup_{x\in\Omega_0} \| P''(x) \| \le K$. Пусть точка $x_0 \in \Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$ и

$$\eta_0 = \| P(x_0) \| < \| P(x) \| < \infty, \ (x \in \partial\Omega_0), \qquad /27/$$

а δ - произвольное число в отрезке $[\max(\frac{1+\lambda}{2}, 1-\frac{(1-\lambda)^2}{2Kg^2\eta_0}),1)$.

Тогда найдутся последовательности чисел $\{\beta_n^a\}$, $\{\beta_n^b\}$, $(0<\beta_n^a \le \beta_n^b \le 1)$, $(n=0,1\ldots)$ такие, что при любом $\beta_n : \beta_n^a \le \beta_n \le \beta_n^b$ итерационный процесс

$$x_0 : x_{n+1} = x_n - \beta_n G_{x_n}^{-1} P(x_n) \qquad /28/$$

сходится к точке $x^* \in \Omega_0$, являющейся решением уравнения /1/ и имеют место оценки :

$$\| x^* - x_0 \| \le g \frac{\| P(x_0) \|}{1-\delta}, \qquad /29/$$

$$\| x^* - x_n \| \le g \frac{\delta^n}{1-\delta} \| P(x_0) \|. \qquad /30/$$

Доказательство

Доказательство сводится к проверке условий теоремы 1. Из /25/ и /28/ вытекает, что при достаточно малом β_0

$$x_1 = x_0 - \beta_0 G_{x_0}^{-1} P(x_0) \in \Omega_0 \ \partial\Omega_0,$$

так как $x_0 \in \Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$. Тогда весь отрезок $[x_0, x_1]$ принадлежит $\Omega_0 \ \partial\Omega_0$ и согласно формуле Тейлора

$$\| P(x_1) \| \le p(x_0) \| P(x_0) \|, \qquad /31/$$

где

$$p(x) = \| P'(x) \Gamma_x^{-1} - I_y \| + \frac{1}{2} K \| \Gamma_x^{-1} \|^2 \| P(x_0) \|,$$

а $\Gamma_{x_0}^{-1} = \beta_0 G_{x_0}^{-1}$. С другой стороны, при каждом $x \in \Omega_0$

$$p(x) \le 1-(1-\lambda)\beta + \frac{1}{2} K\beta^2 g^2 \| P(x) \| = \delta(\beta).$$

Так как $\eta_0 < \infty$, согласно лемме 1, найдутся числа β_0^a, β_0^b такие, что $\beta_0^a \le \beta_0 \le \beta_0^b \rightarrow \delta(\beta) \le \delta < 1$. x есть непрерывная функция β, а в силу непрерывности $P(x)$ и $\|P(x)\|$ есть непрерывная функция β, то в $\Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$ определена непрерывная кривая от точки x_0 до точки x_1, вдоль которой $\| P(x_1) \| \le \delta(\beta) \| P(x_0) \|$. Отсюда и из /27/ вытекает, что весь отрезок $[x_1(\beta_0^a), x_1(\beta_0^b)]$ принадлежит $\Omega_0 \ \partial\Omega_0$. Следовательно, при $n=0$ все условия теоремы 1 выполнены. Пусть они выполнены при $n=k$. Тогда $x_k \in \Omega_0 \setminus \partial\Omega_0$ и $\| P(x_k) \| \le \delta^k \| P(x_0) \|$. Далее, аналогично тому, как это сделано выше, проверяется выполнение всех условий теоремы 1 при $n=k+1$. Теорема доказана.

3. Примеры

3.1. При любом $0<\beta\le 1$ оператор $\Gamma_x^{-1} = \beta [P'(x)]^{-1}$ удовлетворяет условию $\| P'(x) \Gamma_x^{-1} - I_y \| \le \lambda < 1$.

3.2. Пусть P такой, что при любом $\alpha > 0$

$$\|(P'(x)+\alpha I)^{-1}\| \le \frac{1}{m_0+\alpha},$$

где $\|[P'(x)]^{-1}\| \le \frac{1}{m_0}$, $m_0 > 0$. Тогда $\|P'_x(P'_x+\alpha I)^{-1} - I_y\| \le \lambda = \frac{\alpha}{m_0+\alpha} < 1$.

Исходя из этого результата, можно получить известные /[8]/гл. VIII // утверждения о сходимости итерационного процесса Левенберга-Марквардта:

$$x_0 : x_{n+1} = x_n - \beta_n [P'(x_n) + \alpha_n I]^{-1} P(x_n), (n = 0,1,\ldots)$$

и процесса:

$$x_0 : x_{n+1} = x_n - [P'(x_n) + \alpha_n I]^{-1} P(x_n),$$

где оператор P отображает n-мерное Эвклидово пространство в себя.

3.3. Пусть снова $P : \Omega_0 \subset X \to Y$, где X и Y - Банаховы пространства и P дважды непрерывно-дифференцируем. Пусть, кроме того, $P(x) = \Pi(x) + R(x)$. Тогда, если $\|R'(x)[\Pi'(x)]^{-1}\| \le \lambda < 1$ и выполнены, например, условия теоремы 4, то ИП

$$x_0 : x_{n+1} = x_n - \beta_n [\Pi'(x_n)]^{-1} P(x_n), \ (n = 0,1,\ldots)$$

сходится к решению x^* уравнения /1/.

В заключение автор выражает глубокую признательность проф. Е.П.Жидкову за поддержку и полезные дискуссии.

Литература

1. *В.К.Саульев, И.И.Самойлова. В сб. "Итоги науки и техники". Мат. анализ, т. II, М., 1973 /91-128/.*
2. *Б.Т.Поляк. "Методы минимизации функций многих переменных". Экономика и мат. методы, т. 3, вып. 6, 1967 /881-902/.*
3. *Л.В.Канторович. "О методе Ньютона". Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1949, т. 48 /104-135/.*
4. *J.B.Grockett, A.Chernoff. "Gradient Methods of Maximisation". Pacific J.Math., 1955, vol.28 (104-135).*
5. *М.Н.Яковлев. "О некоторых методах решения нелинейных уравнений". Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1965, т. 84 /8-40/.*
6. *Л.В.Канторович, Г.П.Акилов. "Функциональный анализ в нормированных пространствах". М., Физматгиз, 1959.*
7. *Л.Александров. "Регуляризованные вычислительные процессы Ньютона-Канторовича. ЖВМиМФ, т.10, №5, 1970 /1285-1287/.*
8. *J.M.Ortega, W.C.Rheinboldt. "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables". A.P., New York, 1970.*
9. *И.П.Мысовских. "К вопросу о сходимости метода Ньютона". Тр. мат. ин-та им. В.А.Стеклова АН СССР, 1949, т. 28 /145-147/.*
10. *М.К.Гавурин. "Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов". Изв. ВУЗов, Математика, №5, 1958.*
11. *Е.П.Жидков, Б.Н.Хоромский. "Некоторые нелокальные условия сходимости непрерывного аналога метода Ньютона". ОИЯИ, Р5-8244, Дубна, 1974.*

Рукопись поступила в издательский отдел 15 октября 1975 года.