сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-92-80

П.Г.Акишин

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПОСТАНОВКЕ

1992

Акишин П.Г. P11-92-80

Об одном методе решения задачи магнитостатики в дифференциальной постановке

Предлагается метод решения задачи магнитостатики в дифференциальной постановке в трехмерном случае. Даются некоторые теоретические утверждения для предлагаемого метода. Формулируется метод решения нелинейных дискретизованных уравнений. Приводятся результаты численных расчетов.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод автора

Akishin P.G. P11-92-80

A Method of a Differential Approach to the Solving Magnetostatics Problem

The method of a differential approach to solving the three-dimensional magnetostatics problem is proposed. Some theoretical statements for this method are given. The method for solving nonlinear discretized equations is suggested. Some numerical results are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992

Наиболее популярными методами решения задачи магнитостатики являются методы, основанные на дифференциальной постановке /I-3/. К числу достоинств дифференциальной постановки необходимо отнести относительную простоту вычислений коэффициентов матриц дискретизованных уравнений, разреженность этих матриц, быструю процедуру определения поля в расчетной области по сравнению с интегральными методами решения задачи магнитостатики. К недостаткам следует отнести проблему генерации сетки, стыковку раздела сред, задание граничных условий, необходимость во многих случаях решения задачи в области, значительно превышающей область, где необходимо знать распределение поля. Для достижения удовлетворительной точности вычислений приходится дробить расчетную область на большое количество элементов, что приводит к нелинейным дискретизованным системам большой размерности. Решение подобных систем является узловым моментом всей проблемы.

В данной работе предпринята попытка использовать алгоритмы, развитые для метода объемных интегральных уравнений, для решения задачи магнитостатики в дифференциальной постановке.

§ I. Постановка задачи

Пусть $\bar{B}$, $\bar{H}$, $\bar{M}$ есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля. Имеет место следующее уравнение:

$$\bar{H}(\bar{a}) = \bar{H}^s(\bar{a}) + \nabla_a \varphi \quad , \qquad (I)$$

где $\bar{H}^s(\bar{a})$ – поле токовых обмоток. Выписывая явный вид φ, мы получаем интегральную постановку задачи магнитостатики

$$\varphi(a) = \frac{1}{4\pi} \int_G \left(\bar{M}(\bar{x}), \nabla_{\bar{a}} \frac{1}{|\bar{x}-\bar{a}|}\right) dv_{\bar{x}} \quad , \qquad (2)$$

где G – область, заполненная ферромагнетиком.

Величины $\bar{B}, \bar{H}, \bar{M}$ связаны нелинейными соотношениями

$$\bar{H}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu_0 \mu(|\bar{B}(\bar{x})|)}, \tag{3}$$

$$\bar{M}(\bar{x}) = \frac{\bar{B}(\bar{x})}{\mu_0} - \bar{H}(\bar{x}),$$

где $\mu = \mu(|\bar{B}|)$ – магнитная проницаемость, μ_0 – магнитная проницаемость вакуума.

Сформулируем задачу А.

<u>Задача А</u>

Рассмотрим $\varphi(x)$, удовлетворяющую следующим уравнениям:

$$\Delta_{\bar{x}} \varphi(\bar{x}) + div_{\bar{x}} \bar{M}(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in \operatorname{Int} G, \tag{4}$$

$$\Delta_{\bar{x}} \varphi(\bar{x}) = 0, \quad \bar{x} \in R^3 \setminus G. \tag{5}$$

Нормальная производная φ на границе области DG терпит разрыв

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n^-} - \frac{\partial \varphi}{\partial n^+} = (\bar{M}, \bar{n}), \tag{6}$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial n^-}$ – предел нормальной производной φ снаружи области G, а $\frac{\partial \varphi}{\partial n^+}$ предел нормальной производной изнутри области G.

На поведение $\varphi(\bar{x})$ на бесконечности накладывается следующее условие:

$$\lim_{|\bar{x}| \to \infty} \varphi(\bar{x}) \equiv 0. \tag{7}$$

Потенциал $\varphi(\bar{x})$ из (2) есть решение задачи А.

Вследствие того, что мы не в состоянии решать задачу во всем пространстве R^3, рассмотрим достаточно большую выпуклую область K ($G \subset K$). Сформулируем задачу В.

<u>Задача В</u>

Рассмотрим $\varphi(\bar{x})$, удовлетворяющую уравнениям (4), (6) в области K. Уравнение (5) заменим уравнением

$$\Delta_{\bar{x}} \varphi(\bar{x}) \equiv 0, \quad \bar{x} \in K \setminus G. \tag{8}$$

Для выполнения условия (7) потребуем равенства $\varphi(x)$ нулю на границе области K:

$$\varphi(\bar{x}) \equiv 0, \quad \bar{x} \in DK. \tag{9}$$

В дальнейшем будет проведена оценка уклонения решения задачи А от решения задачи В.

§ 2. <u>Дискретизация</u>

Для дискретизации задачи разобъем область K на объединение гексаэдров $\{G_i\}$ $K = \bigcup_{i=1}^{N} G_i$ так, как это делается при использовании метода конечных элементов, при этом будем предполагать, что $G = \bigcup_{i=1}^{L} G_i$. От разбиения K на элементы потребуем, чтобы граница DG состояла из граней гексаэдров (т.е. ни одна точка границы DG не принадлежала внутренности ни одного гексаэдра G_i). Пусть $\{\bar{P}_j, j=1,I\}$ – набор вершин разбиения. Пусть $\{\bar{P}_{i_1}, \bar{P}_{i_2}, \ldots, \bar{P}_{i_8}\}$ есть вершины некоторого G_i (рис.I).

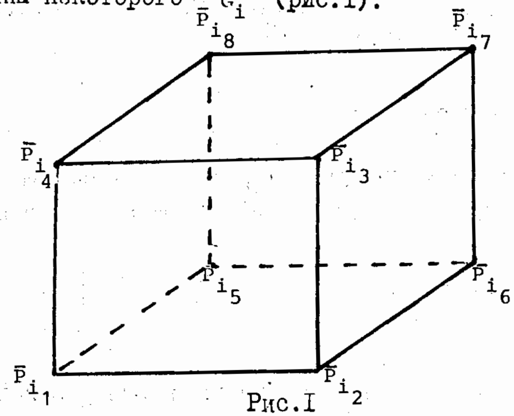

Рис.I

Рассмотрим единичный куб G_0:

$$G_0 = \{\bar{x}(x_1, x_2, x_3) : 0 \le x_i \le 1, \quad i=\overline{1,3}\}.$$

Введем следующие функции формы /4/:

$$f_1(x_1,x_2,x_3) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3),$$

$$f_2(x_1,x_2,x_3) = x_1(1-x_2)(1-x_3),$$

$$f_3(x_1,x_2,x_3) = x_1 x_2 (1-x_3),$$

$$f_4(x_1,x_2,x_3) = (1-x_1) x_2 (1-x_3),$$

$$f_5(x_1,x_2,x_3) = (1-x_1)(1-x_2) x_3,$$

$$f_6(x_1,x_2,x_3) = x_1(1-x_2)x_3,$$

$$f_7(x_1,x_2,x_3) = x_1\cdot x_2\cdot x_3,$$

$$f_8(x_1,x_2,x_3) = (1-x_1)x_2x_3.$$

Введем параметризацию G_i следующим образом. Каждой точке (α,β,γ) единичного куба G_o поставим в соответствие $\bar{x}$ из G_i следующим образом:

$$\bar{x}(\alpha,\beta,\gamma) = \sum_{k=1}^{8} \bar{P}_{i_k}\, f_k(\alpha,\beta,\gamma).$$

Пусть $\{v_j\}$ – набор значений некой функции $v(\bar{x})\ (v(\bar{x})\equiv 0,\ \bar{x}\in DK$ в вершинах $\{P_j\}$ $(v_j=v(\bar{P}_j))$. Аппроксимируем функцию $v(\bar{x})$ в G_i (рис.I) следующей функцией $v^h(\bar{x})$:

$$v^h(\bar{x}(\alpha,\beta,\gamma)) = \sum_{k=1}^{8} v_{i_k}\, f_k(\alpha,\beta,\gamma) \quad .$$

Обозначим S^h пространство функций $\{v^h\}$. Отметим, что для решения φ_B задачи В для любого $v^h\in S^h$ имеет место тождество

$$\int_k (\nabla\varphi_B,\nabla v^h)+\int_k(\nabla v^h,\bar{M})\equiv 0 \qquad (\mathrm{I0})$$

Пусть $\{\tilde{P}_j,\ j=\overline{1,J}\}$ есть набор внутренних вершин разбиения k . Определим набор базисных функций $\{v_j^h\}$ в пространстве S^h:

$$v_j^h(\tilde{P}_i) = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases}$$

Приблизим намагниченность $\bar{M}$ в области G кусочно-постоянной вектор-функцией $\bar{M}^h(\bar{x})$ ($\bar{M}^h(\bar{x})\equiv\bar{M}(\bar{a}_i)$, $\bar{x}\in G_i$; $\bar{a}_i$ –центроид G_i). В качестве приближенного решения задачи В будем рассматривать $\varphi^h(\bar{x})$ из S^h , удовлетворяющей для любой v_j^h из (I0) следующему уравнению:

$$\int_k(\nabla\varphi^h(\bar{x}),\nabla v_j^h)dv_{\bar{x}}+\int_k(\nabla v_j^h,\bar{M}^h(\bar{x}))dv_{\bar{x}}\ .$$

Отсюда для $\{\varphi_j\}$ получаем следующую систему уравнений:

$$\sum_{j=1}^{J}\varphi_j\int_k(\nabla v_j^h,\nabla v_i^h)dv_{\bar{x}}+\int_k(\nabla v_i^h,\bar{M}^h(\bar{x}))dv_{\bar{x}} = 0\ , \qquad (\mathrm{II})$$

$$i=\overline{1,J}\ .$$

Для того, чтобы определить распределение намагниченности в G, проинтегрируем (I) по отдельному гексаэдру G_i . Приближая напряженность $\bar{H}(x)$ кусочно-постоянной вектор функцией $\bar{H}^h(x)$ $(\bar{H}^h(x)=\bar{H}(\bar{a}_j)$ в G_i) и заменяя $\varphi(x)$ на $\varphi^h(x)$ из (II), получаем следующую систему уравнений:

$$\int_{G_i}\bar{H}^h(x)dv_{\bar{x}} = \int_{G_i}\bar{H}^S(x)dv_{\bar{x}}+\int_{G_i}\nabla\varphi^h(\bar{x})dv_{\bar{x}}\ , \qquad (\mathrm{I2})$$

$$i=\overline{1,L}\ .$$

Пусть $\bar{M}_i$ есть значение $\bar{M}^h(x)$ в G_i $(i=\overline{1,L})$. Аналогично, $\bar{B}_i$ и $\bar{H}_i$ есть значения $\bar{B}^h(x)$ и $\bar{H}^h(x)$ в G_i . Введем следующие обозначения:

$$\hat{B} = (\bar{B}_1,\bar{B}_2,\ldots,\bar{B}_L)^T,$$

$$\hat{H} = (\bar{H}_1,\bar{H}_2,\ldots,\bar{H}_L)^T,$$

$$\hat{M} = (\bar{M}_1,\bar{M}_2,\ldots,\bar{M}_L)^T,$$

$$\hat{H}^S = \left(\int_{G_1}\bar{H}^S(\bar{x})dv_{\bar{x}},\ldots,\int_{G_L}\bar{H}^S(\bar{x})dv_{\bar{x}}\right)^T.$$

Ввиду того, что $\varphi^h(x)$ линейно зависит от $\bar{M}^h(x)$, систему (I2) можно сокращенно записать следующим образом:

$$[C]\,\hat{H} = \hat{H}^S+[A]\,\hat{M}\ . \qquad (\mathrm{I3})$$

Матрица $[A]$ в (I3) есть матрица размера $[3L\times 3L]$, а $[C]$ – диагональная матрица вида

$$
\begin{bmatrix}
V_1 V_1 V_1 & & & & 0\\
& V_2 V_2 V_2 & & & \\
& & \ddots & & \\
0 & & & & V_L V_L V_L
\end{bmatrix},
$$

где V_i есть объем G_i.

Учитывая (3), перепишем (I3) следующим образом:

$$[C]\hat{B} = \mu_o(\hat{H}^S + ([C]+[A])\hat{M}(\hat{B})). \qquad (I4)$$

Для решения нелинейной системы (I4), предлагается следующий итерационный процесс:

$$[C]\hat{B}_{k+1} = \mu_o(\hat{H}^S + ([C]+[A])\hat{M}(\hat{B}_k)),$$

$$\hat{B}_o = \hat{H}^S, \qquad (I5)$$

$$k=0,1,2,\ldots.$$

§ 3. Обоснование рассматриваемой дискретизованной постановки

В дальнейшем нам потребуются общие свойства индукции магнитного поля $\bar{B}$, напряженности $\bar{H}$ и намагниченности $\bar{M}$. Пусть B, H, M есть модули, соответственно $\bar{B}, \bar{H}, \bar{M}$. В дальнейшем будем предполагать, что для напряженности $H=H(B)$ имеет место неравенство

$$0 < \alpha \leq \mu_o \frac{\partial H}{\partial B} \leq 1, \qquad (I6)$$

где α постоянно для данного типа железа и не зависит от B. Как правило, это неравенство имеет место. Намагниченность M, добавочное поле, создаваемое железом по модулю ограничено:

$$M \leq M_{max}. \qquad (I7)$$

Имеет место лемма /5/:

Лемма I. При выполнении условия (I6) для любых $\bar{B}_1$ и $\bar{B}_2$ имеет место неравенство

$$\mu_o \| \bar{M}(\bar{B}_1) - \bar{M}(\bar{B}_2) \| \leq q \| \bar{B}_1 - \bar{B}_2 \|, \qquad (I8)$$

где $0 \leq q < 1$.

Из определения $\varphi^h(x)$ следует, что любой $v^h(x)$ из пространства S^h имеет место тождество

$$\int_k (\nabla \varphi^h(\bar{x}), \nabla v^h(\bar{x})) + \int_k (\nabla v^h(\bar{x}), M^h(\bar{x}))\, dv_{\bar{x}} = 0. \qquad (I9)$$

Очевидно, что это тождество имеет место и для $v^h(\bar{x}) = \varphi^h(\bar{x})$:

$$\int_K \|\nabla \varphi^h(\bar{x})\|^2 + \int_K (\nabla \varphi^h(\bar{x}); \bar{M}^h(\bar{x}))\, dv_{\bar{x}} = 0. \qquad (20)$$

Используя неравенство Гельдера, получаем следующее соотношение:

$$\int_K \| \nabla \varphi^h (M^h(\bar{x})) \|^2 dv_{\bar{x}} \leq \int_G \| \bar{M}^h(\bar{x}) \|^2 dv_{\bar{x}}. \qquad (21)$$

Учитывая (20), (21) можно получить неравенство

$$\int_G \| \nabla \varphi^h (\bar{M}^h(\bar{x})) + \bar{M}^h(\bar{x}) \|^2 dv_{\bar{x}} \leq \int_G \| M^h(\bar{x}) \|^2 dv_{\bar{x}}. \qquad (22)$$

Рассмотрим некоторую кусочно постоянную вектор функцию $\bar{D}^h(\bar{x})$. Используя неравенство Гельдера из (22), получаем

$$\int_G ((\nabla \varphi^h(\bar{M}^h(\bar{x})) + \bar{M}^h(\bar{x}), \bar{D}^h(\bar{x})\, dv_{\bar{x}} \leq \left[\left(\int_G \| \bar{M}^h(\bar{x}) \|^2 dv_{\bar{x}} \right) \left(\int_G \| \bar{D}^h(\bar{x}) \|^2 dv_{\bar{x}} \right) \right]^{1/2}.$$

Данное неравенство на языке матриц $[C]$ и $[A]$ можно записать следующим образом:

$$(([C]+[A])\hat{M}, \hat{D}) \leq \left[([C]\hat{M}, \hat{M})\ ([C]\hat{D}, \hat{D}) \right]^{1/2}, \qquad (23)$$

где $\hat{D}$ – вектор, ассоциированный с $\bar{D}^h(\bar{x})$.

Имеет место следующая лемма:

Лемма 2. Система уравнений (II) имеет единственное решение.

Доказательство леммы следует из (21) и равенства $\varphi^h(\bar{x})$ нулю на границе области DK.

Имеет место теорема:

Теорема I

Нелинейная система уравнений (I2) имеет решение.

Доказательство

Ввиду того, что для любого i мера G_i больше нуля, получаем обратимость матрицы $[C]$ в (I4). Учитывая (I7), получаем ограниченность

$$\| \hat{M}(\hat{B}) \| \le c_1 .$$

Рассмотрим оператор

$$F(\hat{B}) = [C]^{-1} (\mu_0(\hat{H}^S + ([C]+[A])\hat{M}(\hat{B})).$$

Очевидно, что оператор $F(\hat{B})$ непрерывен в R^{3L}.
Рассмотрим шар U в R^{3L}:

$$U = \{\hat{B}: \|\hat{B}\| \le \mu_0 \|[C]^{-1}\| \ (\|\hat{H}^S\| + (\|[C]\| + \|[A]\|) c_1)\} .$$

Оператор $F(\hat{B})$ переводит выпуклое множество U само в себе:

$$F(U) \subset U .$$

Шар U компактен в R^{3L}. Используя принцип Шаудера /9/, получаем, что оператор F имеет неподвижную точку. Системы (I4) и, как следствие, (I2) имеют решение.

Имеет место теорема:

Теорема 2

Система уравнений (I4) имеет единственное решение.

Доказательство

Допустим, что существуют два решения $\hat{B}_1$ и $\hat{B}_2$:

$$[C]\hat{B}_1 = \mu_0(\hat{H}^S + ([C]+[A])\hat{M}(\hat{B}_1)) , \tag{24}$$

$$[C]\hat{B}_2 = \mu_0(\hat{H}^S + ([C]+[A])\hat{M}(\hat{B}_2)). \tag{25}$$

Вычитая (24) из (25) и умножая скалярно на $\hat{B}_2 - \hat{B}_1$, получаем

$$([C](\hat{B}_2-\hat{B}_1), (\hat{B}_2-\hat{B}_1)) = \mu_0(([C]+[A])(\hat{M}(\hat{B}_2)-\hat{M}(\hat{B}_1)), (\hat{B}_2-\hat{B}_1)).$$

Учитывая (23), имеем

$$([C](\hat{B}_2-\hat{B}_1), (\hat{B}_2-\hat{B}_1)) \le \mu_0^2 ([C](\hat{M}(\hat{B}_2)-\hat{M}(\hat{B}_1)), \ (\hat{M}(\hat{B}_2)-\hat{M}(\hat{B}_1))).$$

Из неравенства (I8) следует

$$(1-q^2)([C](\hat{B}_2-\hat{B}_1), (\hat{B}_2-\hat{B}_1)) \le 0 .$$

Ввиду того, что $0 \le q < 1$, получаем $\hat{B}_2 = \hat{B}_1$, и теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается теорема:

Теорема 3

Итерационный процесс (I5) сходится от любого начального приближения со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем q из (I8).

Доказательство

Из (I5) следует

$$[C](\hat{B}_{k+1}-\hat{B}_k) = \mu_0([C]+[A])(\hat{M}(\hat{B}_k)-\hat{M}(\hat{B}_{k-1}))).$$

Учитывая (23) и (I8), получаем

$$([C](\hat{B}_{k+1}-\hat{B}_k), (\hat{B}_{k+1}-\hat{B}_k)) \le q^2([C](\hat{B}_k-\hat{B}_{k-1}), (\hat{B}_k-\hat{B}_{k-1})). \tag{26}$$

Обозначим $\Delta\hat{B}_k = \hat{B}_k - \hat{B}_{k-1}$, $\Delta\hat{M}_k = \hat{M}(\hat{B}_k) - \hat{M}(\hat{B}_{k-1})$.
Рассмотрим ряды $\hat{\hat{B}}$, $\hat{\hat{M}}$:

$$\hat{\hat{B}} = \hat{B}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\hat{B}_k , \tag{27}$$

$$\hat{\hat{M}} = \hat{M}(\hat{B}_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\hat{M}_k .$$

Из (26) следует, что

$$\|[C]^{1/2} \Delta\hat{B}_k\| \le q^{k-1} \|[C]^{1/2} \Delta\hat{B}_1\| , \tag{28}$$

$$\|[C]^{1/2} \Delta\hat{M}_k\| \le q^k \|[C]^{1/2} \Delta\hat{B}_1\| .$$

Из (27) и (28) следует, что ряды $\hat{\hat{B}}, \hat{\hat{M}}$ сходятся абсолютно к $\hat{B}_T$ и $\hat{M}(\hat{B}_T)$, которые являются решением (I4). Имеют место оценки

$$\|\hat{B}_T - \hat{B}_N\| \le \frac{q^N}{1-q} \|[C]^{-1/2}\| \, \|[C]^{1/2} \Delta\hat{B}_1\| ,$$

$$\|\hat{M}(\hat{B}_T) - \hat{M}(\hat{B}_N)\| \le \frac{q^{N+1}}{1-q} \|[C]^{-1/2}\| \, \|[C]^{1/2} \Delta\hat{B}_1\| .$$

Оценим уклонение решения φ_A задачи А от решения φ_B задачи В. Разность $u(x)=\varphi_A(x)-\varphi_B(x)$ есть функция гармоническая в k:

$$\Delta u \equiv 0, \qquad \bar{x}\in K, \tag{29}$$

$$u(\bar{x}) \equiv \varphi_A(\bar{x}), \qquad \bar{x}\in DK. \tag{30}$$

Из принципа максимума для гармонических функций [6] следует, что

$$|u(\bar{x})| \le \max_{x\in DK}|\varphi_A(\bar{x})|. \tag{31}$$

Из (2) следует, что

$$|u(\bar{x})| \le \frac{\frac{1}{4\pi}\int_G \|M(\bar{y})\|dv_{\bar{y}}}{(|\bar{x}|-d)^2}, \tag{32}$$

где d – диаметр области G. Предполагая, что граница области k достаточно удалена от области G, учитывая (17), определим константу ε_1:

$$\varepsilon_1 = \max_{x\in DK}\frac{1}{4\pi}\frac{\text{mes } G\cdot M_{max}}{(|\bar{x}|-d)^2}, \tag{33}$$

которая будет мажорировать $|u(\bar{x})|$ во всей области k.
Аналогичным образом определим константу

$$\varepsilon_2 = \max_{x\in DK}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\text{mes } G\cdot M_{max}}{(|\bar{x}|-d)^3}, \tag{34}$$

которая будет мажорировать $\left|\frac{\partial}{\partial n_x}\varphi_A(\bar{x})\right|$ на границе области K.

Имеет место следующая теорема:

<u>Теорема 4</u>

Пусть $\varepsilon_3 = \int_G |div(\bar{M}(\bar{x}))|dv_{\bar{x}}$, тогда

$$\int_K \|\nabla u(x)\|^2 dv_{\bar{x}} \le \varepsilon_1\cdot(\varepsilon_2 L_K+\varepsilon_3+L_G\cdot M_{max}),$$

где L_k, L_G – мера границы DK и DG.

<u>Доказательство</u>

Из (29) следует, что

$$\int_K \|\nabla u(x)\|^2 dv_{\bar{x}} = \int_{DK}\left(\frac{\partial}{\partial n_{\bar{x}}}u(\bar{x})\right)\cdot u(\bar{x})dv_{\bar{x}}. \tag{35}$$

Из постановки задачи А и задачи В получаем

$$\int_K (\Delta\varphi_B+div(M)\,\varphi_A-(\Delta\varphi_A+div(M))\,\varphi_B)\,dv_{\bar{x}}=0. \tag{36}$$

Учитывая скачок нормальной производной на границе DG функций φ_A и φ_B и равенство нулю функций $\varphi_B(x)$ на DK, имеем

$$\oint_{\partial k}\frac{\partial\varphi_B}{\partial n_{\bar{x}}}\varphi_A = -\int_G div(M)(\varphi_A-\varphi_B)dv_{\bar{x}} + \oint_{DG}(\bar{M},\bar{n}(\bar{x}))(\varphi_A-\varphi_B)ds_{\bar{x}}. \tag{37}$$

Отсюда и из (31)-(35) следует утверждение теоремы.

Из теоремы 4 вытекает, что при увеличении области K существует константа c_0, что имеет место неравенство

$$\int_K \|\nabla\varphi_A(\bar{x})-\nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le \frac{c_0}{R^2}, \tag{38}$$

где R есть $\min_{\bar{x}\in DK}|\bar{x}|$.

Имеет место лемма:

<u>Лемма 3</u>

В предположении ограниченности обобщенных вторых производных $\varphi_A(\bar{x})$ и $M(\bar{x})$ имеет место неравенство

$$\int_K \|\nabla\varphi^h(\bar{x})-\nabla\varphi_A(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le \frac{c_1}{R^2}+c_2h^2,$$

где c_1 и c_2 зависят только от $\varphi_A(\bar{x})$ и $\bar{M}(\bar{x})$;

h – максимальный диаметр $\{G_i\}$.

<u>Доказательство</u>

Рассмотрим вспомогательную функцию $\tilde{\varphi}^h(\bar{x})$. Отличие $\tilde{\varphi}^h(\bar{x})$ от $\varphi^h(\bar{x})$ состоит в том, что при определении $\tilde{\varphi}^h(x)$ вместо $\bar{M}^h(\bar{x})$ берется $\bar{M}(\bar{x})$:

$$\int_K (\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x}),\nabla v_i^h(\bar{x}))\,dv_{\bar{x}} + \int_K(\nabla v_i^h(\bar{x}),\bar{M}(\bar{x}))dv_{\bar{x}} = 0, \quad i=\overline{1,J}. \tag{39}$$

Из (10),(39) следует, что для $\forall\ v^h(\bar{x})\in S^h$ имеет место тождество

$$\int_k\|\nabla\tilde{\varphi}^h(x)+\nabla v^h(\bar{x})-\nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} = \int_k\|\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x})-\nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} + \int\|\nabla v^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}}.$$

Отсюда для произвольной $v^h\in S^h$ имеем

$$\int_K\|\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x})-\nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le \int_K\|\nabla v^h(\bar{x})-\nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}}.$$

Далее следует:

$$\int\limits_k \|\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x})-\nabla\varphi_B(x)\|^2 dv_{\bar{x}} \le 2\Big(\int\limits_k \|\nabla\varphi_A(\bar{x})-\nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} + \int\limits_k \|\nabla\varphi_A(\bar{x}) - \nabla v^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}}\Big). \qquad (40)$$

Предполагая, что разбиение области K на элементы $\{G_i\}$ достаточно хорошее (т.е. нет вырождения элементов), беря в качестве $v^h(\bar{x})$ интерполянт $\varphi_A(\bar{x})$, из (38),(40) получаем

$$\int\limits_k \|\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x}) - \nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le \frac{C_3}{R^2} + C_4 h^2 , \qquad (41)$$

где c_3 и c_4 зависят только от $\bar{M}(\bar{x})$ и $\varphi_A(\bar{x})$. Учитывая ограниченность обобщенной второй производной $\bar{M}(x)$ из (21) имеем

$$\int\limits_k \|\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x}) - \nabla\varphi^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le c_5 h^2 . \qquad (42)$$

Далее из (38), (41), (42) и неравенства

$$\int\limits_k \|\nabla\varphi^h(\bar{x}) - \nabla\varphi_A(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le 3\Big(\int\limits_k \big(\|\nabla\varphi^h(\bar{x})-\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x})\|^2 + \|\nabla\tilde{\varphi}^h(\bar{x}) - \nabla\varphi_B(\bar{x})\|^2 + \|\nabla\varphi_B(\bar{x}) - \nabla\varphi_A(x)\|^2\big) dv_{\bar{x}}\Big)$$

получаем утверждение леммы.

Имеет место теорема:

Теорема 5

В предположении ограниченности обобщенных вторых производных $\varphi_A(\bar{x})$, $\bar{M}(\bar{x})$, $\bar{B}(\bar{x})$ и интеграла $\int\limits_c |div(\bar{M}(\bar{x}))| dV_{\bar{x}}$ дискретизованное решение $\bar{B}^h(x)$ сходится к непрерывному $\bar{B}(\bar{x})$, и выполняется неравенство

$$\int\limits_k \|\bar{B}^h(\bar{x}) - \bar{B}(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le ah^2 + \frac{b}{R^2} ,$$

где константа a и b не зависят от h и R.

Доказательство

Из (12) следует

$$\int\limits_{G_i} \bar{B}^h(\bar{x}) dv_{\bar{x}} = \Big(\int\limits_{G_i} \bar{H}^S(\bar{x}) dv_{\bar{x}} + \int\limits_{G_i} \bar{M}^h(\bar{x}) dv_{\bar{x}} + \int\limits_{G_i} \nabla\varphi^h(\bar{M}^h(\bar{x})) dv_{\bar{x}}\Big)\mu_0, \qquad (43)$$

$$i = \overline{1,L} .$$

Для непрерывного решения имеют места следующие соотношения:

$$\int\limits_{G_i} \bar{B}(\bar{x}) dv_{\bar{x}} = \Big(\int\limits_{G_i} \bar{H}^S(\bar{x}) dv_{\bar{x}} + \int\limits_{G_i} \bar{M}(\bar{x}) dv_{\bar{x}} + \int\limits_{G_i} \nabla\varphi_A(\bar{M}(\bar{x})) dv_{\bar{x}}\Big)\mu_0, \qquad (44)$$

$$i = \overline{1,L} .$$

Пусть $\bar{B}_i^*$, $\bar{M}_i^*$ есть значения $\bar{B}(\bar{x})$, $\bar{M}(\bar{x})$ в центроидах G_i, $\bar{B}_i$, $\bar{M}_i$ – значения $\bar{B}^h(\bar{x})$, $\bar{M}^h(\bar{x})$ в G_i. Рассмотрим кусочно-постоянные вектор-функции $\bar{M}^*(\bar{x})$, $\bar{B}^*(\bar{x})$ ($\bar{M}^*(\bar{x})=\bar{M}_i^*$, $\bar{B}^*(\bar{x})=B_i^*$, $x\in G_i$). Из (44) следует

$$\int\limits_{G_i} \bar{B}^*(\bar{x}) dv_{\bar{x}} = \Big(\int\limits_{G_i} \bar{H}^S(\bar{x}) dv_{\bar{x}} + \int\limits_{G_i} (\bar{M}^*(\bar{x}) + \nabla\varphi^h(\bar{M}^*(\bar{x}))) dv_{\bar{x}} + \bar{R}(\bar{x})\Big)\mu_0, \qquad (45)$$

где $R(x) = \int\limits_{G_i} (\bar{M}(\bar{x}) - \bar{M}^*(\bar{x})) dv_{\bar{x}} - \int\limits_{G_i} \frac{(\bar{B}(\bar{x}) - \bar{B}^*(\bar{x}))}{\mu_0} dv_{\bar{x}} + \int\limits_{G_i} (\nabla\varphi_A(\bar{M}(\bar{x})) - \nabla\varphi^h(\bar{M}^h(x))) dv_{\bar{x}}$.

Вычитая (43) из (45), умножая скалярно на ($\bar{B}_i^*-\bar{B}_i$) и суммируя по i получаем

$$\int\limits_k \|\bar{B}^*(\bar{x})-\bar{B}^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} = \Big(\int\limits_k \big((\bar{B}^*(\bar{x})-B^h(\bar{x})),\ (\nabla\varphi^h(\bar{M}^*(\bar{x})) + \bar{M}^*(\bar{x}) - \nabla\varphi^h(\bar{M}^h(\bar{x})) - \bar{M}^h(\bar{x}))\big) dv_x + \int\limits_k (\bar{R}(\bar{x}),\ (\bar{B}^*(\bar{x}) - \bar{B}^h(x))) dv_{\bar{x}}\Big)\mu_0 .$$

Отсюда следует

$$\int\limits_k \|\bar{B}^*(\bar{x})-\bar{B}^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} = \Big(\int\limits_k \big((\bar{B}^*(\bar{x})-\bar{B}^h(\bar{x})),\ (\nabla\varphi^h(\bar{M}^*(\bar{x})-\bar{M}^h(\bar{x})) + (\bar{M}^*(\bar{x})-\bar{M}^h(\bar{x}))\big) dv_{\bar{x}} + \int\limits_k (\bar{R}(\bar{x}),\ (\bar{B}^*(\bar{x})-B^h(\bar{x}))) dv_{\bar{x}}\Big)\mu_0 .$$

Из (22) получаем

$$\int\limits_k \|\bar{B}^*(\bar{x}) - \bar{B}^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le 0.5 \int\limits_k \|\bar{B}^*(\bar{x})-\bar{B}^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} + 0.5\mu_0^2 \int\limits_k \|\bar{M}^*(\bar{x}) - \bar{M}^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} + \Big(\int\limits_k (R(x), (\bar{B}^*(\bar{x}) - B^h(x))) dv_{\bar{x}}\Big)\mu_0 .$$

Предполагая ограниченность обобщенных вторых производных $\bar{M}(\bar{x})$ и $\bar{B}(\bar{x})$, а также ограниченность интегралов от квадрата модулей этих производных по R^3 и учитывая результат Леммы 3, имеем

$$0.5 \int\limits_K \|\bar{B}^*(\bar{x})-\bar{B}^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}} \le 0.5\Big(\int\limits_G \|\bar{M}^*(\bar{x})-\bar{M}^h(x)\|^2 dv_x\Big)\mu_0^2 + \Big[\Big(\int\limits_K \|\bar{B}^*(\bar{x})-B^h(\bar{x})\|^2 dv_{\bar{x}}\Big)\Big(C_1 h^2 + \frac{C_2}{R^2}\Big)\Big]^{1/2} .$$

Отсюда и из (18) получаем утверждение теоремы.

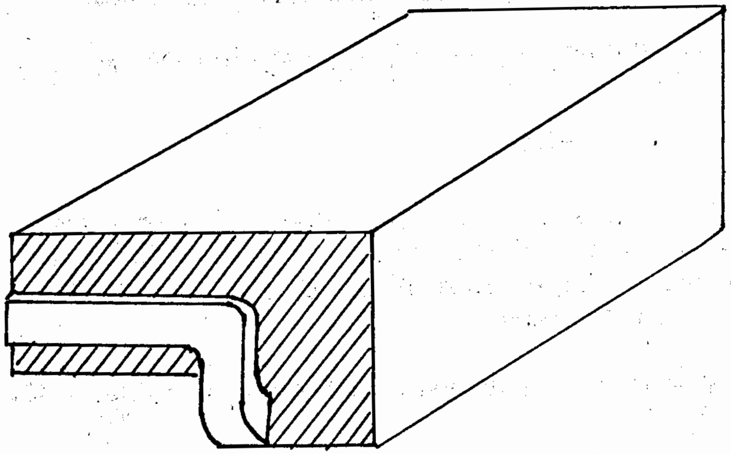

Рис.2
Восьмая часть дипольного магнита

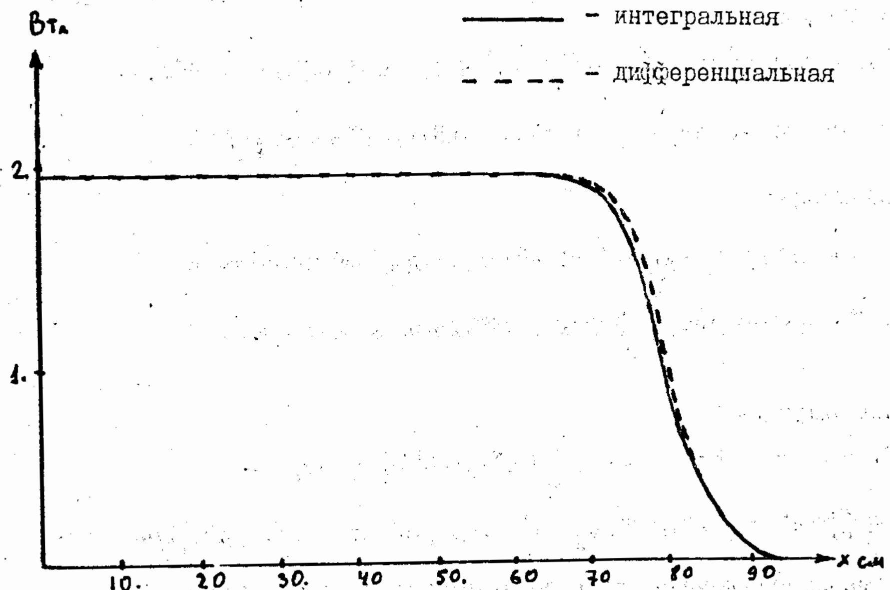

Рис.3
Сравнение результатов расчета по интегральной и дифференциальной постановке

§ 4. Численные результаты

Предложенная методика была использована для создания комплекса программ расчета трехмерных магнитостатических полей MAGDA. Для решения линейной системы уравнений (II) использовался метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов /7/. Комплекс программ MAGDA использовался для расчета поля дипольного магнита (рис.2). Ввиду симметрии распределения поля задача решалась на I/8 области K. Расчетная область разбивалась на 20736 элементов, при этом область ферромагнетика разбивалась на 5184 элемента. Общее число узлов равнялось 23275. Суммарное время центрального процессора ЕС I066, затраченное на вычисление матриц дискретизованных уравнений, поля от токовых обмоток и 80 шагов итерационного процесса (I5), составило около 4.5 часа. На рис.3 приведено сравнение результатов расчета данного метода с результатами расчетов того же магнита по интегральной методике /8/.

Литература

I. Simkin J., Trowbridge C.W. – Three Dimensional Computer Programs (TOSCA) for Nonlinear Electromagnetic Fields. Rutherford Laboratory Report NRL-79-097.

2. Pissanetzky S. Solution of Three-Dimensional Anisotropic Non-Linear Problems of (Magnetostatics Using Two Scalar Potentials and Finite and Infinite Multipolar Elements and Automatic Mesh Generation. IEEE Trans on Magnetics v.MAG-18, p. 346-350 (1982).

3. Дойников Н.И., Ламзин Е.А., Симаков А.С., Сычевский С.Е. Программный комплекс КОМПОТ для расчета пространственных магнитостатических полей электромагнитных систем. Препринт ЦНИИатоминформ, Б-0741, М., 1986.

4. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.:Мир, 1976.

5. Акишин П.Г., Жидков Е.П. Сообщение ОИЯИ, II-83-427, Дубна, 1983.

6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.:Наука, 1972.

7. Meijerink J.A., Van der Vorst H.A. An Iterative Solution Method for Linear Systems of Which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-Matrix.Math. of Comput. V31, No 137, 1977.

8. Акишин П.Г. Сообщение ОИЯИ, Р11-86-522, Дубна, 1986.

9. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. М.:Наука,1984.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 февраля 1992 года.