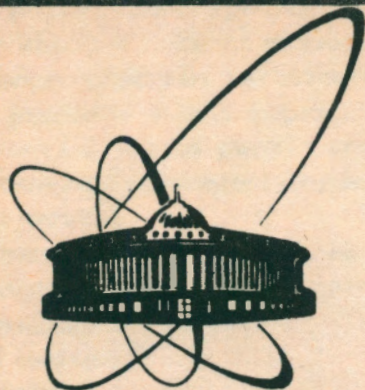


92-490



**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

**P11-92-490**

**Е.П.Жидков, С.Лима, Р.В.Полякова, И.П.Юдин**

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
НЕКОТОРЫХ МОДИФИКАЦИЙ  
СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКОГО МАГНИТА СП-40**

**1992**

1. Формирование требуемого магнитного поля в магнитной системе является сложной инженерной проблемой и часто приводит к решению обратных магнитостатических задач. В настоящей работе решается задача формирования однородного поля в магнитах типа СП-40 (см. рис.1) с помощью подбора параметров железного полюса и проводится анализ поля существующих модификаций этого магнита.

Спектрометрический магнит СП-40 активно используется в экспериментальных установках для исследования распадных процессов заряженных частиц высоких энергий. Проектирование, оптимизация и создание подобных физических установок наряду с процессом длительного и трудоемкого физического моделирования в значительной мере опирается на численное моделирование распределения магнитного поля в рабочей апертуре установки.

Численное моделирование наряду с измерениями магнитного поля является важным этапом при создании (и в дальнейшем при эксплуатации) подобных установок. В нашем исследовании мы отталкивались от опыта создания и эксплуатации установки ЭКСЧАРМ [1] (ОИЯИ-ИФВЭ, г. Протвино), важным элементом которой является магнит СП-40 (рис. 1).

Распределение магнитного поля различных модификаций этого магнита исследовалось с помощью комплекса программ POISCR [2]. В данной работе приведены сравнительные характеристики этих модификаций.

2. Задача численного моделирования магнитных полей для стационарного случая математически описывается системой известных уравнений Максвелла [3]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \vec{H} = c_0 \cdot \vec{j}, \\ \operatorname{div} \vec{B} = 0, \\ \vec{B} = \mu_0 \cdot \mu(|\vec{B}|^2) \cdot \vec{H}, \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} H(x) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{B}$  — вектор магнитной индукции,  $\vec{H}$  — вектор напряженности ма-

гнитного поля,  $\vec{j}$ —вектор объёмной плотности тока,  $c_0$ —константа, зависящая от системы единиц (для системы СИ  $c_0 = 4\pi$ ),  $\mu_0$ —магнитная проницаемость вакуума,  $\mu = \mu(|\vec{B}|^2)$ —магнитная проницаемость ферромагнетика. Уравнения (1), дополненные условиями непрерывности нормальной составляющей вектора  $\vec{B}$  и касательной составляющей вектора  $\vec{H}$  на границах раздела различных сред

$$\begin{cases} (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n}_1 = 0, \\ (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{n}_1 = \vec{0}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\vec{n}_1$ —нормаль к поверхности раздела, однозначно определяют искомые физические характеристики магнитного поля.

Достаточно полная постановка задач численного анализа полей магнитных систем дана в работе [4].

Уравнение (1), определяющее векторный потенциал  $\vec{A}$ , для нашего случая имеет вид :

$$\text{rot} \left( \frac{1}{\mu} \text{rot} \vec{A} \right) = 4\pi \vec{j} \quad (3)$$

или для плоского случая в декартовой системе координат

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{1}{\mu} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = -4\pi j(x, y), \quad (4)$$

где  $\varphi$ —скалярный потенциал. Система программ POISCR [2] позволяет находить методом конечных разностей [5] решение нелинейного уравнения Пуассона (4) в двумерном случае, т.е. в предположении, что магнит имеет бесконечную длину, причём на границе области решения задаётся значение потенциала  $\varphi$  или нормальной производной  $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ . Зависимость  $\mu(|\vec{B}|^2)$  задавалась в виде таблицы, график этой функции показан на рис. 2. Поперечные сечения расчётных конфигураций магнита СП-40, которые представляли расчётную область  $\Omega$  краевых задач для уравнения (4), показаны на рис. 3-6 (с учётом симметрии эта область составляет одну четвертую часть сечения магнита в плоскости  $z = 0$ ). Геометрия каждой конфигурации рассчитываемой магнитной системы задавалась при помощи нерегулярной треугольной сетки, которая строилась системой программ LATTCR [2] на базе регулярной сетки, задаваемой пользователем. Разностные уравнения на построенной сетке решались методом последовательной точечной верхней релаксации [6] с числом узлов сетки  $\approx 9300$ .

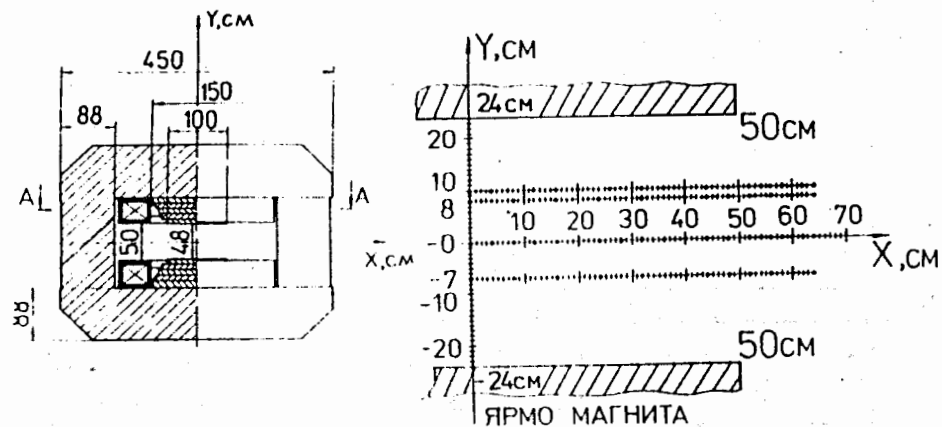


Рис. 1 : а- схема магнита СП-40, б- точки на плоскости  $z = 0$ , в которых измерялось поле

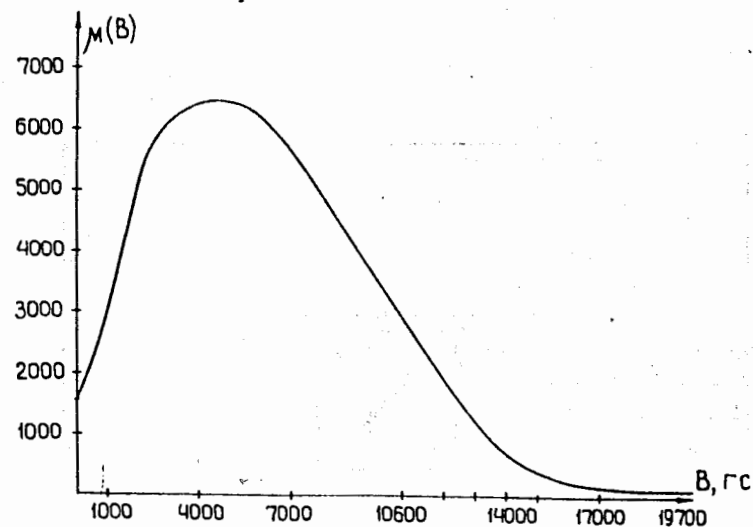
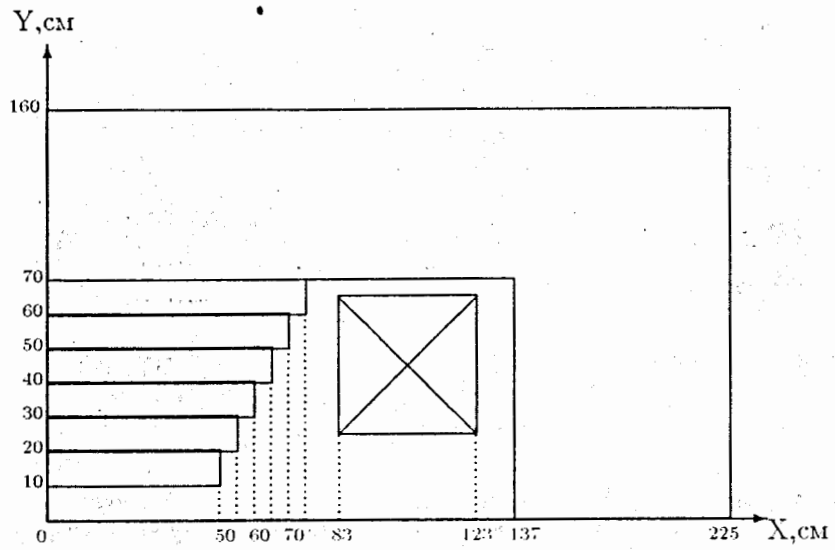
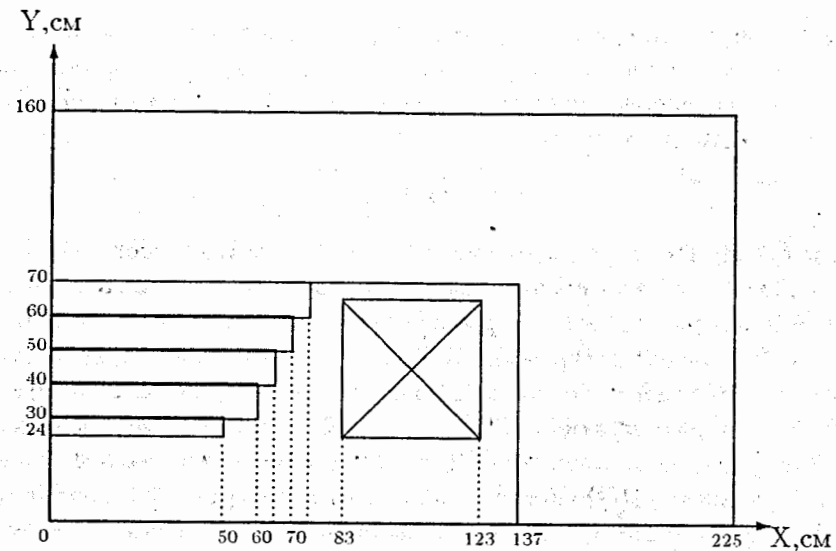


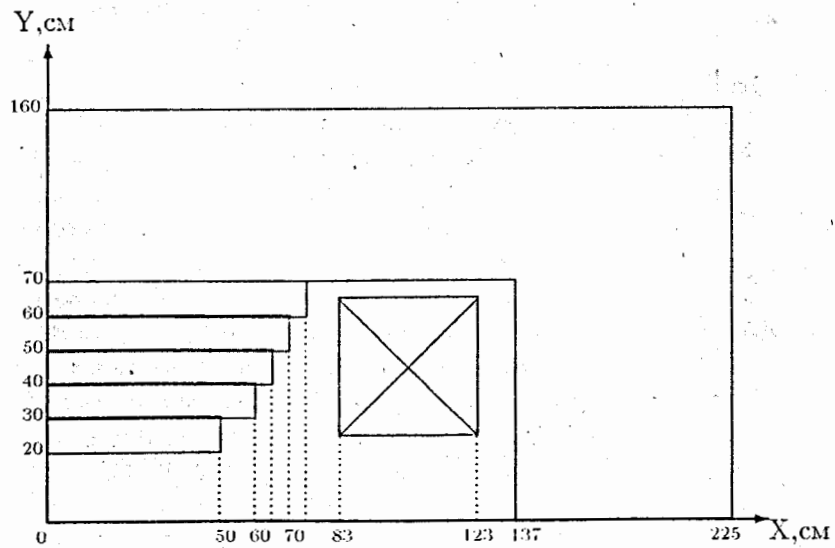
Рис. 2. Магнитная проницаемость электротехнической стали



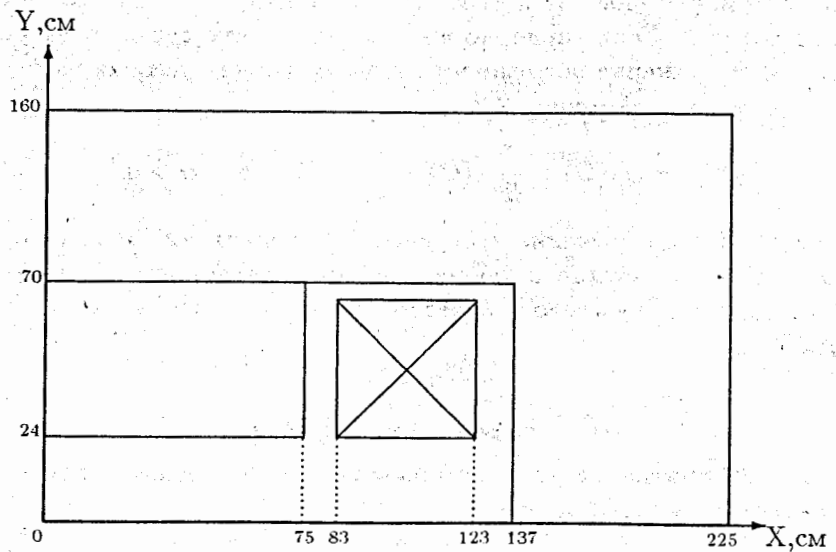
*Puc.3*



*Puc.5*



*Puc.4*



*Puc.6*

3. В процессе численных расчётов проводился дополнительный контроль точности аппроксимации по Ричардсону [7] условия  $\varphi(\infty) = 0$  на основе методики, использующей, аналогично [8], [9], экстраполяцию по параметру  $R^{-1}$ , где

$$R = \max(l_x, l_y), \quad (5)$$

а  $l_x$  и  $l_y$  — длины сторон прямоугольника, ограничивающего расчётную область  $\Omega$ . Предполагается, что погрешность аппроксимации краевого условия  $\varphi(\infty) = 0$  разлагается в ряд по степени параметра  $R^{-1}$ . Для рассматриваемой задачи использовался следующий алгоритм. Решаются последовательно краевые задачи для последовательности расширяющихся областей  $\Omega_k$ ,  $k = 1, \dots, M$ , имеющих попарно различные значения  $R_k$  из (5). Далее сравниваются значения решений  $\varphi_k(Q)$  (при различных  $k$ ) в контрольных точках  $Q$  расчётной области  $\Omega$ . Если для выбранного  $\epsilon > 0$  выполняется условие

$$|\varphi_k(Q) - \varphi_{k+1}(Q)| \leq \epsilon, \quad Q \in \Omega,$$

то полагаем, что удовлетворительно аппроксимируется краевое условие  $\varphi(\infty) = 0$ . Если априорно предположить, что существует регулярное разложение погрешности аппроксимации условия на бесконечности по параметру  $R^{-1}$

$$\varphi(Q) = \varphi_R(Q) + \frac{1}{R^\alpha} g(Q) + O(R^{-\beta}), \quad \beta > \alpha > 0, \quad (6)$$

где  $\varphi(Q)$  — точное решение уравнения (4), а функция  $g(Q)$  не зависит от  $R$ , то можно исключить второе слагаемое в (6) путём экстраполяции. Для этого определим числа  $\gamma_1, \gamma_2$  из системы уравнений

$$\begin{aligned} \gamma_1 + \gamma_2 &= 1, \\ \gamma_1 R_1^{-\alpha} + \gamma_2 R_2^{-\alpha} &= 0, \quad R_1 \neq R_2, \end{aligned}$$

где  $R_1, R_2$  соответствуют двум различным расчётным областям. Тогда линейная комбинация

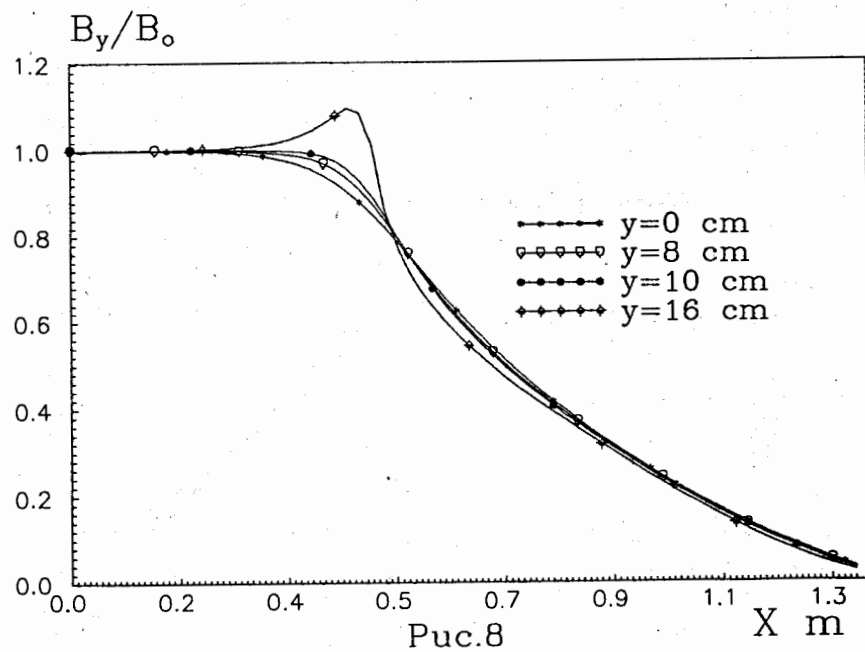
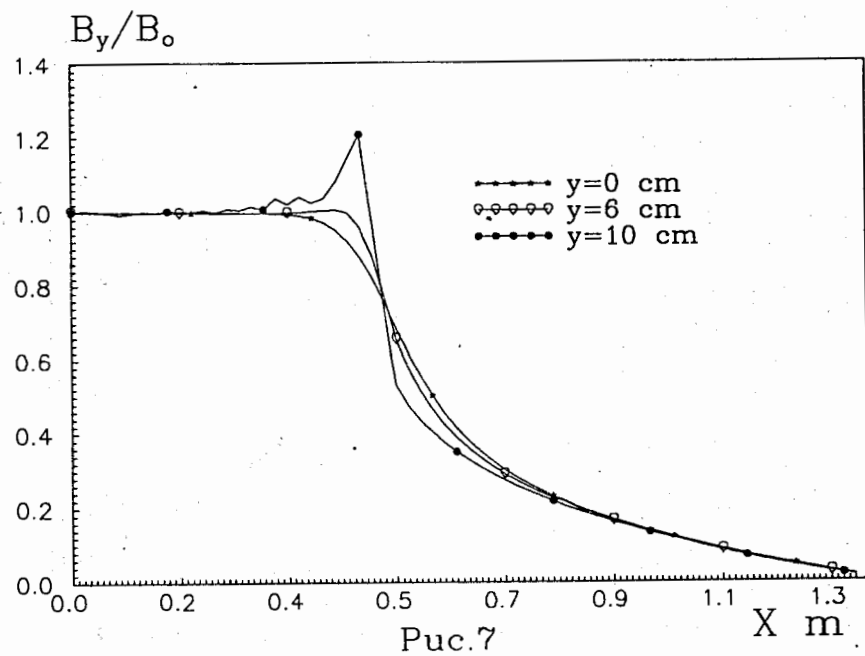
$$\bar{\varphi}(Q) = \gamma_1 \varphi_{R_1}(Q) + \gamma_2 \varphi_{R_2}(Q) \quad (7)$$

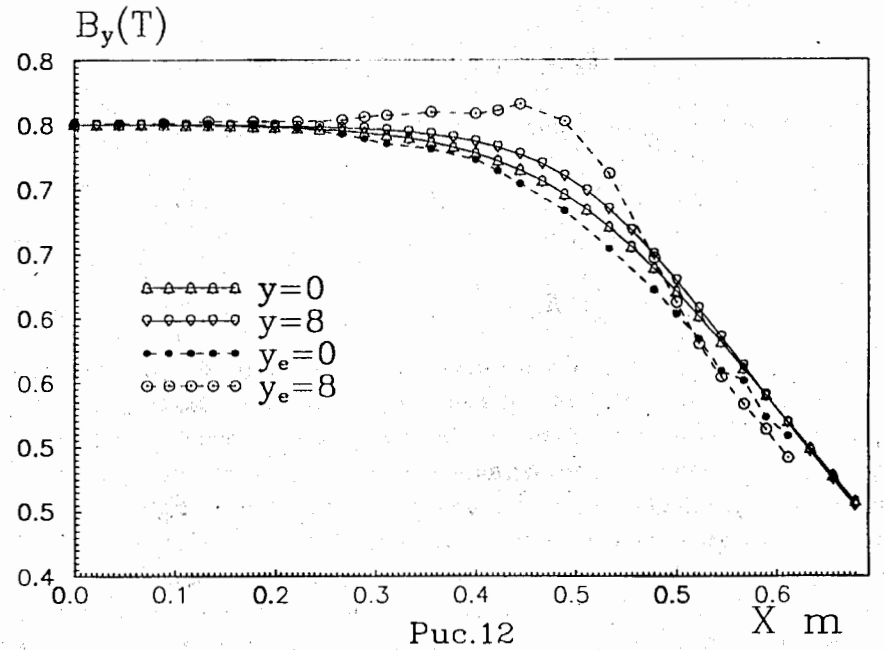
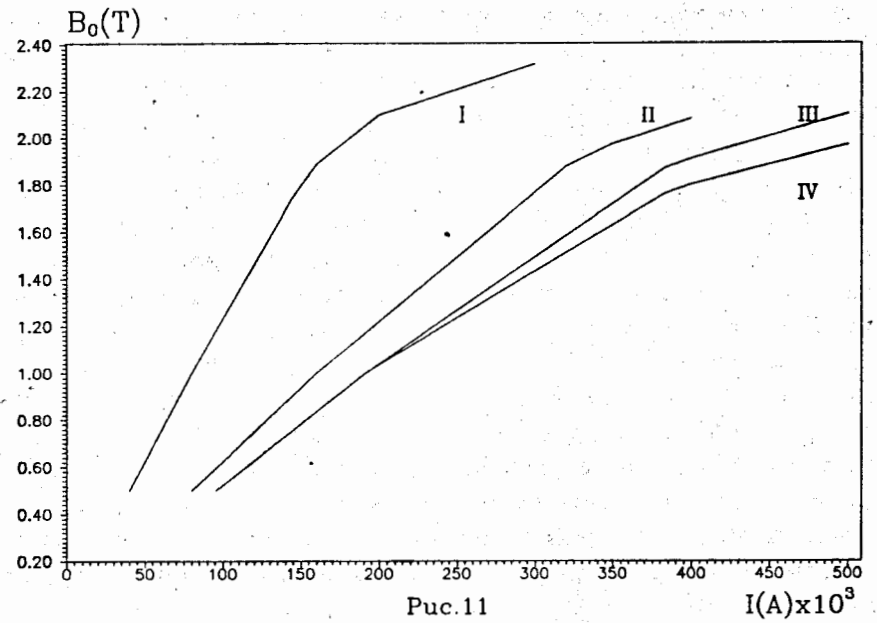
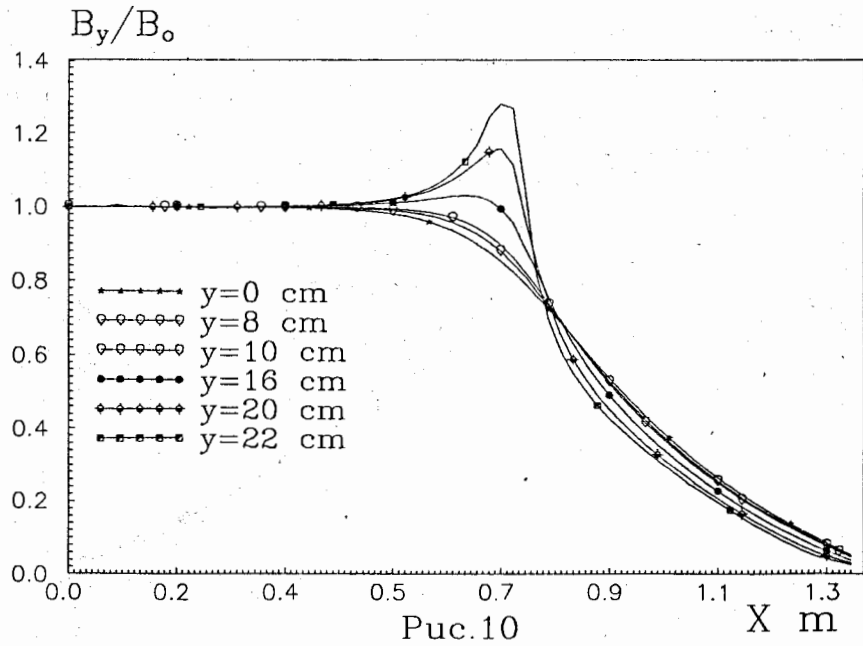
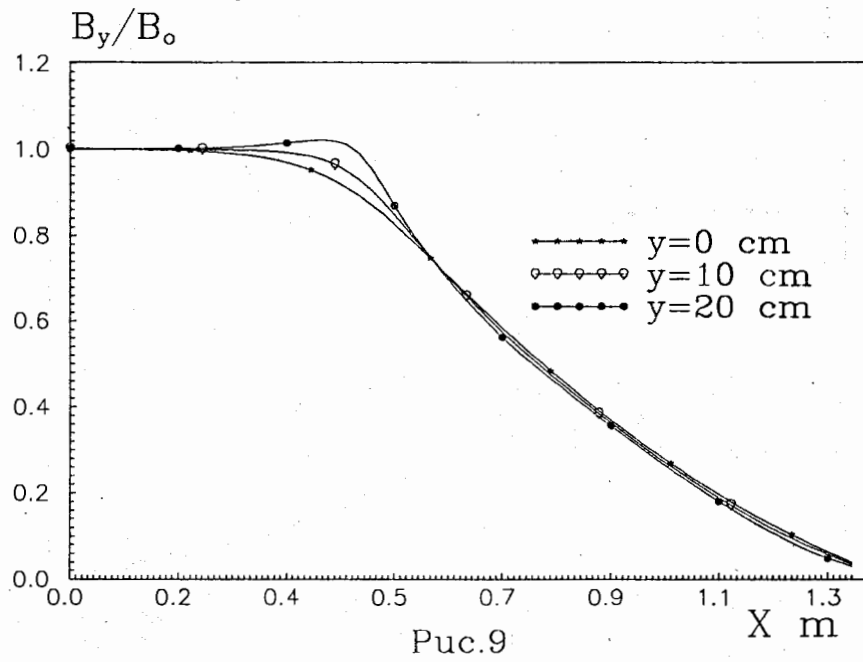
удовлетворяет оценке  $|\varphi(Q) - \bar{\varphi}(Q)| \leq O(R^{-\beta})$ , т.е. приближает условие  $\varphi(\infty) = 0$  с большей точностью, чем каждое из  $\varphi_{R_1}$  и  $\varphi_{R_2}$ .

4. Две часто используемые модификации магнита СП-40 приведены на рисунках 3 и 4: рис.3—конфигурация I, зазор между полюсами  $h=20$  см; рис.4—конфигурация II, зазор между полюсами  $h=40$  см. Рассчитанное распределение компоненты  $B_y(x, y=0)/B_0$  ( $B_0$  — поле в центре зазора,  $B_0 = B(0, 0)$ ) для конфигураций I и II дано на рис. 7 и 8 соответственно. Для  $B_0 \cong 1$  Тл соответствующее значение плотности тока  $j$  приведено в таблице Т1. При токе, равном  $I = 143615$  А, уровень поля для конфигурации I составляет  $B_{0,I} = 1,74$  Тл, для конфигурации II —  $B_{0,II} = 0,9$  Тл. Функция неоднородности поля  $f(x) = B_y(x)/B_0$  существенно зависит от протяжённости полюса вдоль оси  $x$  (в нашем случае она равна 100 см). Из рисунков 7 и 8 видно, что для конфигураций I и II эти неоднородности примерно одинаковы. С целью увеличения однородности поля была рассмотрена конфигурация III (см. рис.3) магнита, которая получена из конфигурации II путём уменьшения размеров полюса (см. рис.5). Распределение  $f(x) = B_y(x)/B_0$  для этой конфигурации приведено на рис. 9. Для  $I = 143715$  А значение поля  $B_{0,III} = 0,75$  Тл, т.е. получили небольшое падение величины поля по сравнению с конфигурациями I и II. Таким образом, сравнивая все три конфигурации, имеем  $B_{0,III} < B_{0,II} < B_{0,I}$ . Самую большую апертуру магнита имеет магнит конфигурации III СП-40, что немаловажно для набора статистики распадных процессов в одном сеансе на установке, в которой используется магнит СП-40 (например, установка ЭКСЧАРМ). С целью дальнейшего улучшения поля по однородности путём вычислительных экспериментов была определена конфигурация IV магнита СП-40 (см. рис. 6). На рис. 10 приведена  $f(x) = B_y(x)/B_0$  для этой конфигурации. Полный сравнительный анализ величины поля для всех четырёх конфигураций магнита СП-40 приведён в таблице Т1. На рис. 11 приведены кривые зависимости  $B_0(I)$  для всех четырёх конфигураций. На рис. 12 приводятся графики экспериментальных и расчётных значений  $f(x) = B_y(x)/B_0$  для конфигурации III,  $B_0 = 0.75$  Тл. Из этого рисунка видно достаточно точное ( $\cong 10^{-3} - 10^{-4}$ ) совпадение кривых расчётного и экспериментального распределения магнитного поля. Неоднородности рассчитанного и экспериментального поля в 80% ( $x = 40$  см от центра магнита) рабочей области магнита конфигурации III не превышают 1%.

ТАБЛИЦА Г1

N конф.	I	II	III	IV
$S_l$ (площадь с током)	0,172м <sup>2</sup>			
$j \left( \frac{A}{m^2} \right)$	$4,656574 \times 10^5$	$9,309859 \cdot 10^5$	$1,1140231 \times 10^6$	$1,1132564 \times 10^6$
$I(A)$	80093	160130	191612	191400
$B_0(Tл)$	0,9999995	1,000000	1,000001	0,9999995
$j \left( \frac{A}{m^2} \right)$	0,835552 $\times 10^6$			
$I(A)$	143715			
$B_0(Tл)$	1,737566	0,897462	0,750000	0,750228
$j \left( \frac{A}{m^2} \right)$	$2,328287 \cdot 10^5$	$4,654929 \cdot 10^5$	$5,570115 \cdot 10^5$	$5,566282 \cdot 10^5$
$I(A)$	40046,5	80065	95806	95700
$B_0(Tл)$	0,499632	0,499821	0,5000878	0,500006
$j \left( \frac{A}{m^2} \right)$	$9,313148 \cdot 10^5$	$1,861971 \cdot 10^6$	$2,228046 \cdot 10^6$	$2,226512 \cdot 10^6$
$I(A)$	160186	320260	383224	382800
$B_0(Tл)$	1,889061	1,878171	1,865191	1,758688
$j \left( \frac{A}{m^2} \right)$	$1,162791 \cdot 10^6$	$2,034884 \cdot 10^6$	$2,325581 \cdot 10^6$	$2,325581 \cdot 10^6$
$I(A)$	200000	350000	400000	400000
$B_0(Tл)$	2,099	1,973646	1,913891	1,795804
$j \left( \frac{A}{m^2} \right)$	$1,744186 \cdot 10^6$	$2,325581 \cdot 10^6$	$2,906977 \cdot 10^6$	$2,906977 \cdot 10^6$
$I(A)$	300000	400000	500000	500000
$B_0(Tл)$	2,315814	2,080338	2,096285	1,966999





5. Таким образом, с помощью вычислительных экспериментов удалось подтвердить, что поле однородное с точностью до 1% в 80% рабочей апертуры магнита СП-40 (конфигурация III). В результате численных экспериментов создан значительный банк данных, включающий информацию для широкого набора расчётных конфигураций с соответствующими им картами поля, что позволяет расширить "физическую" интуицию для дальнейшего развития магнитов типа СП-40, с другой стороны, предложить возможность использования накопленных данных в качестве экспериментальных "заготовок" в численных расчётах установок, использующих магниты типа СП-40 (например, установка ЭКСЧАРМ). С целью использования в дальнейшем рассчитанного магнитного поля для программ транспортировки пучков частиц и моделирования распадных процессов в экспериментальной установке ЭКСЧАРМ исследована возможность описания поля некоторыми аппроксимирующими функциями, а именно полиномами от  $x, y, z$  с небольшим набором коэффициентов. Для этого скалярный потенциал  $\varphi(x, y, z)$  представляется

$$\varphi(x, y, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{ijk} x^i y^j z^k. \quad (8)$$

Поле  $\vec{B}$  определяется как  $\vec{B} = \text{grad } \varphi$ . Окончательно  $B_y(x, y, z)$  определяется как

$$B_y(x, y, z) = B_y(0, 0, 0)[P_1(z) + P_2(z)x^2 + P_3(z)y^2 + P_4(z)x^4 + P_5(z)x^2y^2 + P_6(z)y^4], \quad (9)$$

$$P_i(z) = \sum_{k=0}^N D_{i,k} \left(\frac{z}{z_a}\right)^k, \quad (10)$$

где  $z_a$  - некоторый масштабирующий размер, а  $N$  - некоторая максимальная степень полинома. Определение коэффициентов  $a_{ijk}$  подробно описано в работе [10]. Аппроксимирующие формулы (8)-(10) дают в узлах измерения магнитного поля среднее отклонение от измеренных значений 1.5% для компоненты  $B_y(x, y, z)$ . В таблице Т2 приведены числовые значения функций  $P_i(z)$  (см. (10)) для рабочей конфигурации магнита СП-40 (конфигурация III). Предполагается дальнейшее использование результатов этой работы и работы [10] в численном моделировании распадных процессов для многочастичного спектрометра ЭКСЧАРМ.

ТАБЛИЦА Т2

N	Z см	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$
1	-158	0.7530 E-01	-0.1218 E-01	-0.3371 E-03	-0.7679 E-03	0.3923 E-04	0.46078 E-06
2	-138	0.1837	-0.3549 E-01	-0.5072 E-03	0.12187 E-02	0.88100 E-04	-0.57382 E-06
3	-118	0.4152	-0.6035 E-01	-0.7796 E-03	-0.1157 E-01	0.25936 E-03	-0.10511 E-06
4	-98	0.7472	-0.6165 E-01	0.29704 E-04	-0.5640 E-01	0.18329 E-03	0.12836 E-05
5	-78	0.9411	0.45694 E-01	0.11221 E-02	-0.1501	-0.2755 E-03	0.10353 E-06
6	-58	0.9799	0.67877 E-01	0.42627 E-03	-0.1684	-0.8731 E-05	-0.49544 E-06
7	-38	0.9839	0.70615 E-01	0.35035 E-03	-0.1705	-0.2863 E-04	-0.48139 E-06
8	-18	0.9833	0.71191 E-01	0.36565 E-03	-0.1679	-0.7838 E-04	-0.44469 E-06
9	2	0.9866	0.72768 E-01	0.33324 E-03	-0.1738	-0.2109 E-04	-0.36042 E-06
10	22	0.9821	0.78455 E-01	0.45658 E-03	-0.1711	-0.7264 E-04	-0.12070 E-05
11	42	0.9810	0.82805 E-01	0.45951 E-03	-0.1739	-0.6507 E-04	-0.12691 E-05
12	62	0.9770	0.80990 E-01	0.52767 E-03	-0.1763	0.38183 E-04	-0.16238 E-05
13	82	0.9177	0.84500 E-01	0.15683 E-02	-0.1741	-0.3191 E-03	-0.25583 E-05
14	102	0.6774	-0.1354 E-01	0.94624 E-03	-0.7660 E-01	0.20200 E-03	-0.28866 E-05
15	122	0.3542	-0.1989 E-01	-0.1170 E-04	-0.2721 E-01	0.20600 E-03	-0.34667 E-05
16	142	0.1493	-0.1536 E-01	-0.2423 E-04	-0.4016 E-02	0.39688 E-04	-0.32130 E-05



## Литература.

1. Айхнер Г. и другие. *Бесфильмовый спектрометр Бис-2 и его физические характеристики*. ОИЯИ, P1-80-644, Дубна, 1980, 17с.
2. POISCR. *User's Guide*. CERN Library Geneva, 1989.
3. Ильин В.П. *Численные методы решения задач электрофизики*, М., Наука, 1985, 334с.
4. Айрян Э.А., Жидков Е.П. и др. *ЭЧАЯ*, том 21, вып.1, 1990.
5. Вазов В., Форсайт Дж. *Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных*, М., 1963.
6. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. *Вычислительные методы линейной алгебры*, Изд.2-е, М.-Л.:Физматгиз, 1963.
7. Марчук Г.И., Шайдулов В.В. *Повышение точности решений разностных схем*. "Наука", М., 1979.
8. Е. П. Жидков, Б.Н. Хоромский. ОИЯИ, P11-84-740, Дубна, 1984.
9. Е.П.Жидков, С.В. Карташов, В.П. Овсянников, Р.В. Полякова, Б.Н. Хоромский. *Численное моделирование сверхпроводящей магнитной фокусирующей системы*, Сообщение ОИЯИ P11-88-225, Дубна, 1988.
10. Д. А. Кириллов, А. Я. Кутов, С. Лима, В. А. Панасик, Р. В. Полякова, И. П. Юдин. *Полиномиальное представление компонент измеренного магнитного поля спектрометра ЭКСЧАРМ*, Сообщение ОИЯИ P11-92-436, Дубна, 1992.

Рукопись поступила в издательский отдел  
24 ноября 1992 года.