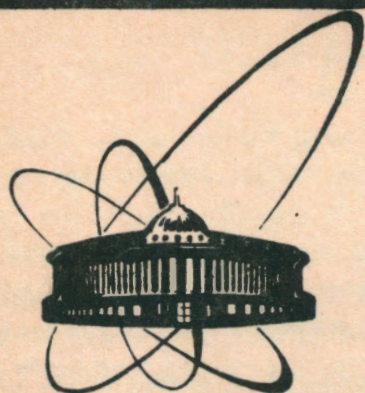


92-409



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-92-409

П. В. Зрелов, В. В. Иванов

КРИТЕРИИ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫЕ НА
ПРОВЕРОЧНОЙ СТАТИСТИКЕ

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x).$$

Исследование мощности одностороннего
критерия для больших n

1992

1. Введение

В работе [1] построены критерии согласия на основе новой непараметрической статистики ω_n^3 [2], исследованы основные свойства этих критериев, с помощью моделирования изучено поведение функций мощности для малых объёмов выборки n и некоторых типов альтернативных гипотез. Проведено их сравнение с известным критерием ω_n^2 , выявившее преимущество нового критерия для задач с односторонней альтернативной гипотезой при малых n .

В настоящей работе в рамках подхода Д.Чэпмена [3] исследуется мощность одностороннего критерия ω_n^3 для случая больших n . Проводится его сравнение с критерием ω_n^2 , а также с критерием

$$\omega_n^1 = \sqrt{n} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)] dF(x), \quad (1)$$

связанным со статистикой \bar{U} (см. ниже).

2. Асимптотические распределения статистик ω_n^2 и ω_n^3 в случае принадлежности выборки альтернативному распределению

Будем рассматривать критерии проверки гипотез о виде функции распределения $H_0: F = F_0$ против односторонней альтернативной гипотезы H_1 (для определённости — правосторонней $H_1: G < F_0$).

Критерии ω_n^2 (см., например, [9]) и ω_n^3 [2] построены на статистиках:

$$\omega_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^2 dF(x) \quad (2)$$

и

$$\omega_n^3 = n^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x), \quad (3)$$

где $S_n(x)$ — эмпирическая функция распределения по выборке x_1, x_2, \dots, x_n , подчиняющейся закону распределения нулевой гипотезы $F(x) = F_0(x)$, n — объём выборки.

Если некоторая эмпирическая выборка $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ принадлежит альтернативному распределению G , то величины (2) и (3) характеризуют отклонение выборки, подчиняющейся закону распределения альтернативной гипотезы, от распределения нулевой гипотезы. Эмпирическую функцию распределения в этом случае будем обозначать $\tilde{S}_n(x)$, а статистики, соответственно, через $\tilde{\omega}_n^2$ и $\tilde{\omega}_n^3$:

$$\tilde{\omega}_n^2 = n \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{S}_n(x) - F(x)]^2 dF(x) \quad (4)$$

и

$$\tilde{\omega}_n^3 = n^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{S}_n(x) - F(x)]^3 dF(x). \quad (5)$$

Статистики $\tilde{\omega}_n^2$ и $\tilde{\omega}_n^3$ удобно представить в виде:

$$\tilde{\omega}_n^2 = n \int_0^1 [G_n(u) - u]^2 du, \quad (6)$$

$$\tilde{\omega}_n^3 = n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 [G_n(u) - u]^3 du, \quad (7)$$

где $G_n(u)$ — эмпирическая функция, построенная по выборке $u_1 = F(\tilde{x}_1), u_2 = F(\tilde{x}_2), \dots, u_n = F(\tilde{x}_n)$ из распределения $G(u)$.

Распределения ω_n^2 и ω_n^3 , как известно, не являются гауссовскими в том случае, когда H_0 верна. Однако, в случае, когда верна альтернативная гипотеза, величина ω^2 (см. ниже), нормированная определённым образом, является асимптотически нормальной. Доказательство этого факта содержится в работе Чэпмена [3], в которой показано, что величина

$$\sqrt{n} [\omega^2 - C(G)],$$

где

$$\omega^2 = \int_0^1 [u - G_n(u)]^2 du,$$

$$C(G) = \int_0^1 \delta^2(u) du + 2 \int_0^1 \delta(u) G(u) du - 2D(1) + 2E[D(u)],$$

$$\delta(u) = u - G(u), \quad D(u) = \int_0^u \delta(t) dt,$$

является суммой асимптотически нормальной случайной величины и величины, стремящейся к нулю по вероятности.

Т.о., при больших значениях n становится возможным аппроксимировать реальное распределение статистики ω^2 гауссовским, параметры которого могут быть вычислены. К сожалению, в работе [3] не даны выражения для этих параметров в общем случае, а приведены приближенные значения математического ожидания и дисперсии самой статистики ω^2 , вычисленные для некоторых конкретных альтернатив G (см. гл.3).

В развитие исследований [3], переходя к определению статистики в виде $\tilde{\omega}_n^2 = n\omega^2$, можно показать, что величина

$$\frac{\tilde{\omega}_n^2 - n \cdot C(G)}{\sqrt{4nD[D(u_i)]}},$$

где $D[\cdot]$ – дисперсия величины $D(u_i)$, распределена приблизительно нормально со средним a и дисперсией σ^2 :

$$a = n \cdot C(G), \quad \sigma^2 = 4n \cdot D[D(u_i)].$$

Величины $C(G)$ и $D[D(u_i)]$ могут быть вычислены в общем виде:

$$C(G) = \int_0^1 \delta^2(u) du,$$

$$D[D(u_i)] = 2 \int_0^1 dt_2 \delta(t_2) G(t_2) \int_{t_2}^1 dt_1 \delta(t_1) - \left[\int_0^1 \delta(t) G(t) dt \right]^2 < \infty.$$

Т.о., искомые выражения для параметров аппроксимирующего гауссовского распределения определяются следующим образом

$$a = n \int_0^1 \delta^2(u) du, \quad (8)$$

$$\sigma^2 = 4n \left\{ 2 \int_0^1 dt_2 \delta(t_2) G(t_2) \int_{t_2}^1 dt_1 \delta(t_1) - \left[\int_0^1 \delta(t) G(t) dt \right]^2 \right\}. \quad (9)$$

Перейдём теперь к статистике ω_n^3 . Положив $0^0 = 1$, выражение (7) можно записать в виде:

$$\tilde{\omega}_n^3 = n^{\frac{3}{2}} \sum_{m=0}^3 (-1)^m C_3^m \int_0^1 [G_n(u) - G(u)]^{3-m} g_m(u) du, \quad (10)$$

где $g_m(u) = [u - G(u)]^m$, а C_3^m – биномиальные коэффициенты.

Поскольку функция $g_1(u)$ интегрируема на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет неравенству $0 < g_1(u) < 1$, то

$$0 < \int_0^1 g_1(u) [G(u) - G_n(u)]^2 du \leq \int_0^1 [G(u) - G_n(u)]^2 du. \quad (11)$$

Известно (см., в частности, [3]), что при $n \rightarrow \infty$ величина

$$\sqrt{n} \int_0^1 [G(u) - G_n(u)]^2 du$$

стремится к нулю по вероятности, и, следовательно, с учётом неравенств (11), получаем

$$\sqrt{n} \int_0^1 g_1(u) [G(u) - G_n(u)]^2 du \xrightarrow{P} 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (12)$$

Учитывая также интегрируемость на отрезке $[0,1]$ функций $G(u)$ и $G_n(u)$, удовлетворяющих неравенствам $0 < G(u) < 1$ и $0 < G_n(u) < 1$, можно записать:

$$|\sqrt{n} \int_0^1 [G(u) - G_n(u)]^3 du| \leq |\sqrt{n} \int_0^1 G(u) [G(u) - G_n(u)]^2 du| + \quad (13)$$

$$+ |\sqrt{n} \int_0^1 G_n(u) [G(u) - G_n(u)]^2 du| \leq 2\sqrt{n} \int_0^1 [G(u) - G_n(u)]^2 du \xrightarrow{P} 0.$$

Рассмотрим далее интеграл:

$$\int_0^1 g_2(u)[G_n(u) - G(u)]du = \int_0^1 g_2(u)G_n(u) - \int_0^1 g_2(u)G(u)du. \quad (14)$$

Обозначив через $R(u) = \int_0^u g_2(t)dt$, получим:

$$\int_0^1 g_2(u)G_n(u)du = R(1) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n R(u_i). \quad (15)$$

С учётом (10) и (15) можно записать:

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{\omega}_n^3}{n} = & -\sqrt{n} \int_0^1 g_3(u)du - 3\sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [R(u_i) - E(R)] \right\} - \\ & -\sqrt{n} \left\{ 3 \int_0^1 g_1(u)[G(u) - G_n(u)]^2 du - \int_0^1 [G_n(u) - G(u)]^3 du \right\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где

$$E(R) = \int_0^1 R(u)dG(u) = \int_0^1 g_2(t)dt - \int_0^1 G(t)g_2(t)dt. \quad (17)$$

Выражение (16) можно преобразовать к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\frac{\tilde{\omega}_n^3}{n} + \sqrt{n} \int_0^1 g_3(u)du}{\sqrt{9D(R)}} = & -\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [R(u_i) - E(R)]}{\sqrt{\frac{D(R)}{n}}} - \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt{D(R)}} \times \\ & \times \left\{ 3 \int_0^1 g_1(u)[G(u) - G_n(u)]^2 du + \int_0^1 [G_n(u) - G(u)]^3 du \right\}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $E(R)$ – среднее значение случайной величины $R(u_i)$, а $D(R) = E(R^2) - E^2(R)$ – её дисперсия, определяемая равенством

$$D(R) = 2 \int_0^1 G(t_2)g_2(t_2)dt_2 \int_{t_2}^1 g_2(t_1)dt_1 - \left[\int_0^1 G(t)g_2(t)dt \right]^2 < \infty. \quad (19)$$

Из (12) и (13) следует, что выражение в круглых скобках в (18) сходится по вероятности к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Таким образом, случайная величина, представляемая левой частью (18), является суммой случайной величины, стремящейся по вероятности к нулю, и случайной величины

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [R(u_i) - E(R)]}{\sqrt{\frac{D(R)}{n}}},$$

имеющей асимптотически нормальное распределение $N(0, 1)$. Поэтому случайная величина

$$\frac{\frac{\tilde{\omega}_n^3}{n} + \sqrt{n} \int_0^1 g_3(u)du}{\sqrt{9D(R)}}$$

также имеет асимптотически нормальное распределение $N(0, 1)$. Отсюда следует, что распределение случайных величин $\tilde{\omega}_n^3$ при больших значениях n стремится к нормальному распределению со средним и дисперсией, равными

$$a = -n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 g_3(u)du \quad \text{и} \quad \sigma^2 = n^2 9D(R), \quad (20)$$

или с учётом (19)

$$\sigma^2 = 9n^2 \left\{ 2 \int_0^1 G(t_2)g_2(t_2)dt_2 \int_{t_2}^1 g_2(t_1)dt_1 - \left[\int_0^1 G(t)g_2(t)dt \right]^2 \right\}. \quad (21)$$

Следует отметить заметное сходство формул для средних значений и дисперсий статистик $\tilde{\omega}_n^2$ (см. (8) и (9)) и $\tilde{\omega}_n^3$ (см. (20) и (21)). Эти формулы позволяют вычислять соответствующие параметры практически для любой функции распределения, соответствующей альтернативной гипотезе G . Это даёт возможность оценить мощности критериев ω_n^2 и ω_n^3 для любой конкретной задачи, если объём эмпирической выборки достаточно велик. В главе 3 это будет сделано для двух специально выбранных функций, что позволит оценить мощность соответствующих критериев согласия.

3. Среднее значение и дисперсия распределенных величин $\tilde{\omega}_n^2$ и $\tilde{\omega}_n^3$ для двух типов альтернативных гипотез

В работе [3] Чэпмен предложил среди множества односторонних альтернативных гипотез, для которых величина $\sup_u [G(u) - u] = \Delta$ ($0 < \Delta < 1$) является фиксированной, отбирать такие гипотезы, которые минимизируют или максимизируют мощность. Им было показано [3], что альтернативная гипотеза с функцией распределения $G(u) \equiv G_{mu_0}(u)$:

$$G_{mu_0}(u) = \begin{cases} 0 & , u < 0, \\ u & , 0 \leq u < u_0, \\ u_0 & , u_0 \leq u < u_0 + \Delta, \\ u & , u_0 + \Delta \leq u < 1, \\ 1 & , u \geq 1, \end{cases} \quad (22)$$

где $0 \leq u_0 \leq 1$, а Δ - варьируемый параметр, минимизирует мощность соответствующего одностороннего критерия, а альтернативная гипотеза с функцией распределения $G(u) \equiv G_M(u)$, равной

$$G_M(u) = \begin{cases} 0 & , u < \Delta, \\ u - \Delta & , \Delta \leq u < 1, \\ 1 & , u \leq 1, \end{cases} \quad (23)$$

максимизирует мощность соответствующего одностороннего критерия.

В рамках этого подхода Чэпменом для статистики ω^2 (см. п.2) были вычислены среднее значение и дисперсия для альтернативных гипотез $G_{mu_0}(u)$ и $G_M(u)$ с точностью до членов порядка $O(\frac{1}{n^2})$. Эти выражения использовались им для оценки мощности критерия ω^2 .

В работе [4] функции (22) и (23) использовались для получения указанных параметров статистик $\tilde{\omega}_n^2$ и $\tilde{\omega}_n^3$ при помощи систем аналитических вычислений REDUCE и *tiMATH*. Приближенные выражения, полученные Чэпменом для статистики ω^2 , согласуются с точными результатами работы [4]. Для того, чтобы иметь возможность сравнить мощности критериев ω_n^2 и ω_n^3 в рамках приближений

работы [3], точные значения параметров статистики $\tilde{\omega}_n^3$ из работы [4] были ограничены количеством членов, обеспечивающих для величины $\omega^3 = \tilde{\omega}_n^3/n^{\frac{3}{2}}$ точность $O(\frac{1}{n^2})$. Ниже приведены выражения для средних значений и дисперсий статистик $\tilde{\omega}_n^2$ и $\tilde{\omega}_n^3$ в указанном приближении, а также параметры гауссовских распределений (аппроксимирующих распределения случайных величин $\tilde{\omega}_n^2$ и $\tilde{\omega}_n^3$), вычисленные по формулам (8), (9) для G_{mu_0} и (20), (21) для G_M .

1) Параметры для статистики $\tilde{\omega}_n^2$ (см. [3] и [4]):

а) $G(u) = G_M(u)$,

$$E(\tilde{\omega}_n^2) = n\Delta^2(1 - \frac{2}{3}\Delta) + \frac{1}{6}(1 - 3\Delta^2 + 2\Delta^3), \quad (24)$$

$$D(\tilde{\omega}_n^2) \cong n(\frac{\Delta^2}{3} - 2\Delta^4 + \frac{8}{3}\Delta^5 - \Delta^6); \quad (25)$$

параметры аппроксимирующего гауссовского распределения:

$$a = n\Delta^2(1 - \frac{2}{3}\Delta), \quad (26)$$

$$\sigma^2 = n(\frac{\Delta^2}{3} - 2\Delta^4 + \frac{8}{3}\Delta^5 - \Delta^6); \quad (27)$$

б) $G(u) = G_{mu_0}(u)$,

$$E(\tilde{\omega}_n^2) = \frac{n\Delta^3}{3}(1 + \frac{1}{n}) + [\frac{1}{6} + \Delta^2(u_0 - \frac{1}{2})], \quad (28)$$

$$D(\tilde{\omega}_n^2) \cong nu_0(1 - u_0)\Delta^4; \quad (29)$$

параметры аппроксимирующего гауссовского распределения:

$$a = \frac{n\Delta^3}{3}, \quad (30)$$

$$\sigma^2 = nu_0(1 - u_0)\Delta^4. \quad (31)$$

2) Параметры для статистики $\tilde{\omega}_n^3$:

а) $G(u) = G_M(u)$,

$$E(\tilde{\omega}_n^3) \cong -[n^{\frac{3}{2}}\Delta^3(1 - \frac{3}{4}\Delta) + \frac{\Delta\sqrt{n}}{2}(1 - 3\Delta^2 + 2\Delta^3)], \quad (32)$$

$$D(\tilde{\omega}_n^3) \cong \frac{3}{4}n^2\Delta^4(1 - 6\Delta^2 + 8\Delta^3 - 3\Delta^4); \quad (33)$$

параметры аппроксимирующего гауссовского распределения:

$$a = -n^{\frac{3}{2}}\Delta^3(1 - \frac{3}{4}\Delta), \quad (34)$$

$$\sigma^2 = \frac{3}{4}n^2\Delta^4(1 - 6\Delta^2 + 8\Delta^3 - 3\Delta^4); \quad (35)$$

$$6) G(u) = G_{mu_0}(u),$$

$$E(\tilde{\omega}_n^3) \cong -[\frac{n^{\frac{3}{2}}\Delta^4}{4} + \frac{3\sqrt{n}\Delta^2 u_0(1-u_0)}{2}], \quad (36)$$

$$D(\tilde{\omega}_n^3) \cong n^2\Delta^6 u_0(1-u_0); \quad (37)$$

параметры аппроксимирующего гауссовского распределения:

$$a = -\frac{n^{\frac{3}{2}}\Delta^4}{4}, \quad (38)$$

$$\sigma^2 = n^2\Delta^6 u_0(1-u_0). \quad (39)$$

Здесь E - среднее значение, а D - дисперсия распределения.

4. Функции мощности одностороннего критерия ω_n^3

Рассмотрим для определённости правостороннюю альтернативную гипотезу $G < F_0$. Уровень значимости α критерия ω_n^3 для такой гипотезы определяется следующим образом [2]:

$$\alpha = \Pr\{\omega_n^3 < Z_\alpha | H_0\},$$

где Z_α - критическая точка для уровня значимости α . Ошибка второго рода β в этом случае равна $\beta = \Pr\{\tilde{\omega}_n^3 > Z_\alpha\}$. Поскольку мощность критерия $P = 1 - \beta$, то можно записать:

$$P = 1 - \Pr\{\tilde{\omega}_n^3 > Z_\alpha | H_1\}. \quad (40)$$

Учитывая приближённую нормальность распределения $\tilde{\omega}_n^3$ для больших n , равенство (40) может быть записано в виде:

$$P \cong \frac{1}{\sqrt{2\pi}\tilde{\sigma}} \int_{-\infty}^{Z_\alpha} \exp[-\frac{(x-\tilde{a})^2}{2\tilde{\sigma}^2}] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{Z_\alpha-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx = \Phi\left(\frac{Z_\alpha-\tilde{a}}{\tilde{\sigma}}\right), \quad (41)$$

где Φ - функция распределения, отвечающая плотности $N(0,1)$, \tilde{a} и $\tilde{\sigma}$ - параметры распределения $\tilde{\omega}_n^3$, Z_α - критическая точка для правостороннего критерия ω_n^3 , удовлетворяющая уравнению $\Phi(Z_\alpha) = \alpha$ (см. [1]).

В качестве параметров \tilde{a} и $\tilde{\sigma}^2$ можно рассматривать как среднее значение и дисперсию распределения $\tilde{\omega}_n^3$, не являющегося для конечных n , строго говоря, гауссовским из-за добавочного члена в формуле (18), так и значения a и σ^2 (см. формулы (20), (21) в главе 1), представляющие параметры гауссовского распределения, аппроксимирующего распределение $\tilde{\omega}_n^3$.

В настоящей работе указанные представления параметров \tilde{a} и $\tilde{\sigma}^2$ рассматривались для оценки мощности критерия $\tilde{\omega}_n^3$ для двух типов гипотез $G_{mu_0}(u)$ и $G_M(u)$ (см. выражения (22) и (23)). Кроме того, с целью сопоставления результатов настоящей работы и исследований Чэпмена [3] в качестве параметров \tilde{a} и $\tilde{\sigma}^2$ рассматривались также значения (32), (33) и (36), (37), являющиеся, как уже указывалось, приближённой формой точных выражений $E(\tilde{\omega}_n^3)$, $D(\tilde{\omega}_n^3)$, вычисленных в работе [4]. (Подробнее см. п.5.2 гл.5).

5. Сравнение критерия ω_n^3 с критериями ω_n^1 , ω_n^2 для больших n

В работе [3] проводилось сравнение критериев ω_n^2 , π , π' , D_n^- , \bar{U} на основании приближённой оценки их функций мощности для двух типов альтернативных гипотез (см. гл.3). С целью определения места новой статистики ω_n^3 в ряду интегральных статистик было проведено сравнение мощностей критериев ω_n^1 , ω_n^2 и ω_n^3 как в подходе Чэпмена, так и с использованием численного моделирования.

Следует заметить, что критерий \bar{U} , основанный на статистике $\bar{U} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n u_i$ (где u_i - равномерно распределённые на $[0,1]$ случайные величины), отнесён Чэпменом к интегральным критериям, поскольку он имеет простую связь со статистикой, обозначенной им W_n' : $\bar{U} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n} W_n'$, где

$$W'_n = n \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)] dF(x) = n \int_0^1 [F_n(u) - u] du.$$

Статистика W'_n отличается от статистики ω_n^1 только множителем перед знаком интеграла (см. (1)).

5.1. Моделирование

При вычислении функций мощности $P = P(\alpha)$ критериев ω_n^1 , ω_n^2 и ω_n^3 для альтернативных гипотез G_M и G_{mu_0} использовался геометрический метод Монте-Карло. В каждом испытании генерировалось в соответствии с функциями распределения (22) и (23) n случайных величин (вычисления проводились для выборок объёмом $n = 50, 200$ и 1000), которые располагались в виде вариационного ряда $u_1 < u_2 < \dots < u_n$ и использовались для вычисления значений соответствующих статистик по следующим формулам (см., например, [8,2]):

$$\omega_n^1 = \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n u_i,$$

$$\omega_n^2 = \frac{1}{12n} + \sum_{i=1}^n \left(u_i - \frac{2i-1}{2n} \right),$$

$$\omega_n^3 = -\frac{\sqrt{n}}{8} \sum_{i=1}^n \left(2u_i - \frac{2i-1}{n} \right) \left[\left(2u_i - \frac{2i-1}{n} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \right].$$

При генерировании случайных величин в соответствии с функцией (22), минимизирующей мощность, важную роль играл правильный выбор параметра u_0 . Он был основан на асимптотических свойствах альтернативных распределений рассматриваемых статистик.

Для статистики ω_n^1 параметр u_0 выбирался равным 0, поскольку функция мощности критерия ω_n^1 в асимптотическом пределе имеет точное аналитическое представление и минимизируется в точке $u_0 = 0$ (см. п. 5.2); моделирование здесь проводилось, в основном, для проверки самой процедуры моделирования и оценки её точности.

Для статистик ω_n^2 и ω_n^3 использовался факт приближённой гауссовости их распределений при больших n (см. гл. 2), а, следовательно,

зависимости распределений только от двух параметров – среднего и дисперсии. Поэтому для выбора значений параметра u_0 достаточно было проанализировать зависимости этих параметров от u_0 , вид которых может быть представлен для гипотезы G_{mu_0} следующими выражениями

$$E(\tilde{\omega}_n^2) \cong n \frac{\Delta^3}{3} \left(1 + \frac{1}{n} \right) + O(1), \quad D(\tilde{\omega}_n^2) \cong nu_0(1-u_0)\Delta^4 + O(1),$$

$$E(\tilde{\omega}_n^3) \cong -n^{\frac{3}{2}} \frac{\Delta^4}{4} + O(\sqrt{n}), \quad D(\tilde{\omega}_n^3) \cong n^2 \Delta^6 u_0(1-u_0) + O(n). \quad (42)$$

Из (42) хорошо видно, что средние значения для обеих статистик при больших n не зависят от u_0 , а дисперсии имеют максимальные значения при $u_0 = \frac{1}{2}$. Это означает, что соответствующие функции мощности должны минимизироваться при этом значении параметра¹.

Для выбранного уровня значимости α значение функции мощности $P = P(\alpha)$ оценивалось после серии N испытаний следующим образом

$$P(\tilde{\omega}_n^i) = \frac{N[Z_\alpha(\tilde{\omega}_n^i)]}{N},$$

где $Z_\alpha(\tilde{\omega}_n^i)$ – критическое значение для заданного α ², $i = 1, 2, 3$, а $N[Z_\alpha(\tilde{\omega}_n^i)]$ – число испытаний, удовлетворяющих соотношениям

$$\tilde{\omega}_n^i < Z_\alpha(\tilde{\omega}_n^i) \quad \text{при } i = 1 \text{ и } 3,$$

и

$$\tilde{\omega}_n^2 > Z_\alpha(\tilde{\omega}_n^2).$$

При генерировании случайных величин в соответствии с (22) и (23) использовался метод обратных функций, учитывающий разрывность G_M и G_{mu_0} , причём для определения обратных функций использовался алгоритм, описанный в [6].

Вычисления проводились для следующих значений уровня значимости α : 0,005(0,0005)0,0095; 0,01; 0,025; 0,05(0,05)0,95, а пара-

¹В работе Чэпмена для статистик \tilde{U} и ω_n^2 рассматривались те же значения u_0 , хотя возможен и другой путь, состоящий в минимизации мощности соответствующего критерия по параметру u_0 для конкретной выборки n и фиксированных Δ и α

²Для статистик ω_n^2 и ω_n^3 нет таблиц процентных точек для выборок $n = 50, 200$ и 1000 , поэтому критические значения распределения ω_n^2 определялись по таблицам асимптотических функций распределения [5], а критические значения критерия ω_n^3 , в виду отсутствия асимптотических таблиц, – по таблицам для $n = 10$ [7]. Для ω_n^1 также брались асимптотические значения

метр Δ при этом принимал значения 0,025; 0,05(0,05)0,5. Число испытаний N изменялось от 1000 до 3000.

Случай, когда в качестве альтернативной гипотезы выбирается функция распределения $G_{m_{10}}$, соответствует задаче с наиболее близкими гипотезами, разделение которых особенно затруднено.

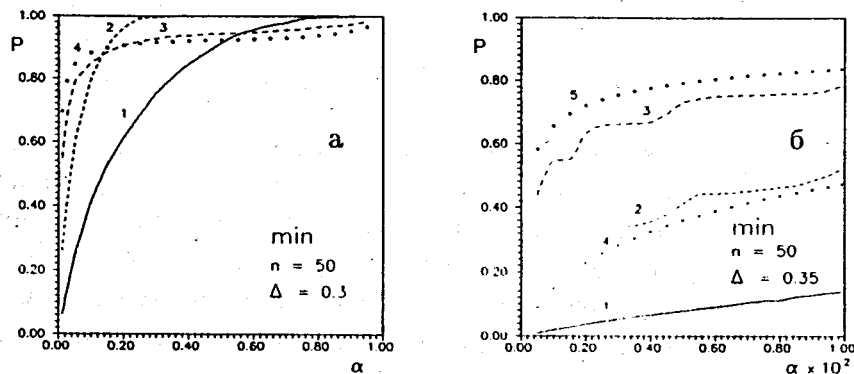


Рис. 1: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривые 1), ω_n^2 (2) и ω_n^3 (3) от уровня значимости α для гипотезы G_{m_0} при $n = 50$ и фиксированных Δ : $\Delta = 0.30$ ($0.01 \leq \alpha \leq 1$) (а) и $\Delta = 0.35$ ($0.0005 \leq \alpha \leq 0.01$) (б). Точками отмечены вычисленные по аналитическим формулам зависимости для критериев ω_n^2 (4б) и ω_n^3 (4а и 5б).

На рис.1, 2 и 3 представлены характерные кривые мощности исследуемых критериев для гипотезы $G_{m_{10}}$ при трёх объемах эмпирической выборки $n = 50, 200$ и 1000 для некоторых значений параметра Δ (характеризующего "отдаленность" нулевой и альтернативной гипотез). На этих же рисунках представлены некоторые результаты расчетов по аналитическим формулам (см. п. 5.2).

Анализ зависимостей, представленных на рис.1, 2 и 3, показывает явное преимущество критерия ω_n^3 для близких гипотез с малыми Δ . Это преимущество особенно четко проявляется в наиболее важных для практических целей областях α (уровень значимости менее $5 \div 10\%$) и усиливается с ростом n .

При переходе к большим значениям α и параметра Δ критерий ω_n^3 постепенно теряет свое преимущество.

Для одних и тех же значений Δ переход от гипотезы $G_{m_{10}}$ к гипотезе G_M соответствует усилению различия между гипотезами H_0 и

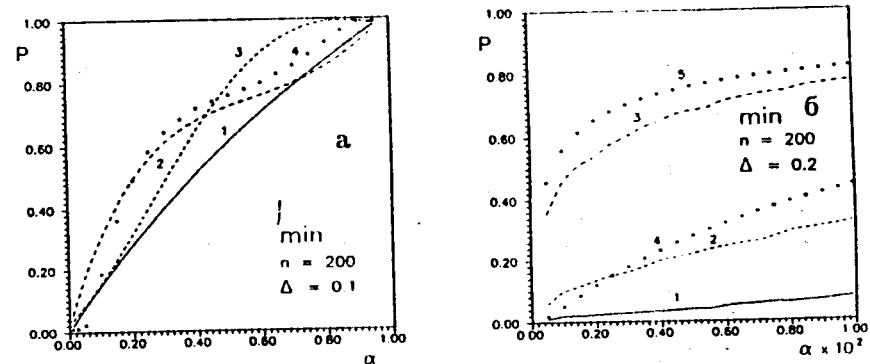


Рис. 2: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривые 1), ω_n^2 (2) и ω_n^3 (3) от уровня значимости α для гипотезы G_{m_0} при $n = 200$ и фиксированных Δ : $\Delta = 0.10$ ($0.01 \leq \alpha \leq 1$) (а) и $\Delta = 0.2$ ($0.0005 \leq \alpha \leq 0.01$) (б). Точками отмечены вычисленные по аналитическим формулам зависимости для критериев ω_n^2 (4б) и ω_n^3 (4а и 5б).

H_1 , и для рассмотренных выше значений Δ уже характеризует ситуацию с хорошо разделяющимися гипотезами. Поэтому для сравнения критериев в случае гипотезы G_M были взяты меньшие значения параметра $\Delta = 0,025; 0,05$ и $0,1$. На рис.4 и 5 представлены кривые мощности рассматриваемых критериев для двух объемов эмпирической выборки $n = 50$ и $n = 200$. Характер этих кривых проявляет некоторые общие черты относительного поведения функций мощности ω_n^1, ω_n^2 и ω_n^3 . В отличие от случая с альтернативной гипотезой $G_{m_{10}}$, практически во всей области изменения уровня значимости α соотношение между функциями мощности критериев имеет вид

$$P(\omega_n^1) > P(\omega_n^3) > P(\omega_n^2).$$

Причем критерий ω_n^2 заметно уступает в мощности двум другим критериям, а кривые мощности критериев ω_n^3 и ω_n^1 очень близки при систематическом, хотя и нерешающем, преимуществе последнего.

5.2. Использование аналитических выражений для оценки уровня мощности

Вычисление функций мощности путём моделирования можно про-

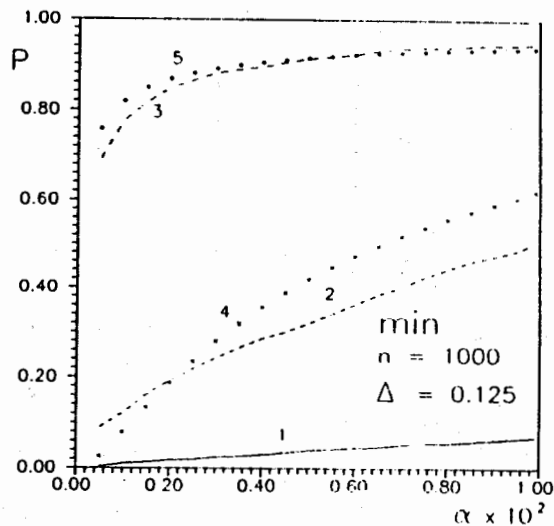


Рис. 3: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривая 1), ω_n^2 (2) и ω_n^3 (3) от уровня значимости α для гипотезы G_{m_0} при $n = 1000$ и $\Delta = 0.125$. Точками отмечены вычисленные по аналитическим формулам зависимости для критериев ω_n^2 (4) и ω_n^3 (5).

водить с любой заранее заданной точностью. Однако геометрический метод Монте-Карло требует значительных затрат счётного времени, которое сильно возрастает с увеличением объёма эмпирической выборки n и числа испытаний N (обеспечивающего необходимую точность вычислений). Поэтому желательно иметь простые аналитические выражения, позволяющие вычислять значение функции мощности или хотя бы оценить её величину для произвольного объёма эмпирической выборки без значительных затрат времени.

Учитывая тот факт, что функции мощности критериев \bar{U} и ω_n^1 совпадают, и используя выражения, приведённые в работе [3], можно записать для случая G_{m_0} :

$$P_{\omega_n^1} = P_{\bar{U}}(\Delta, u_0) = 1 - \Phi\left\{\frac{Z_\alpha - \sqrt{3n}\Delta^2}{[1 - \Delta^2(6 - 8\Delta + 3\Delta^2) + 12u_0\Delta^2]^{\frac{1}{2}}}\right\}, \quad (43)$$

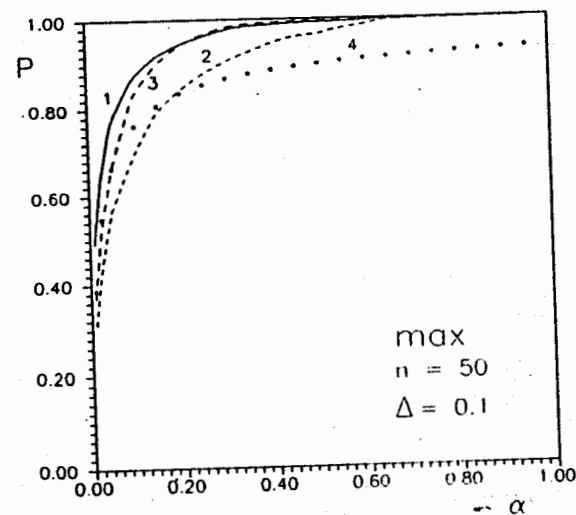


Рис. 4: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривая 1), ω_n^2 (2) и ω_n^3 (3) от уровня значимости α для гипотезы G_M при $n = 50$ и $\Delta = 0.1$. Точками отмечена вычисленная по аналитическим формулам зависимость для критерия ω_n^2 (4).

а для гипотезы G_M :

$$P_{\omega_n^1} = P_{\bar{U}}(\Delta) = 1 - \Phi\left\{\frac{Z_\alpha - \sqrt{3n}\Delta(2 - \Delta)}{[1 - \Delta^2(6 - 8\Delta + 3\Delta^2)]^{\frac{1}{2}}}\right\}, \quad (44)$$

где Z_α - удовлетворяет уравнению $\Phi(Z_\alpha) = \alpha$, а Φ - функция распределения, отвечающая плотности $N(0, 1)$.

В этой же работе представлены выражения для мощности критерия, основанного на статистике ω^2 , связанной с ω_n^2 соотношением $\omega_n^2 = n\omega^2$. Эти выражения для критерия на основе статистики ω_n^2 можно записать в параметризованном виде:

$$P_{\omega_n^2} \cong 1 - \Phi\left\{\frac{Z_\alpha^* - E(\tilde{\omega}_n^2)}{\sqrt{D(\tilde{\omega}_n^2)}}\right\}, \quad (45)$$

где параметры $E(\tilde{\omega}_n^2)$ и $D(\tilde{\omega}_n^2)$ определяются формулами (24), (25) для гипотезы G_M и (28), (29) - для гипотезы G_{m_0} ; Z_α^* - критическая граница для критерия ω_n^2 для уровня значимости α (см., например, [5]).

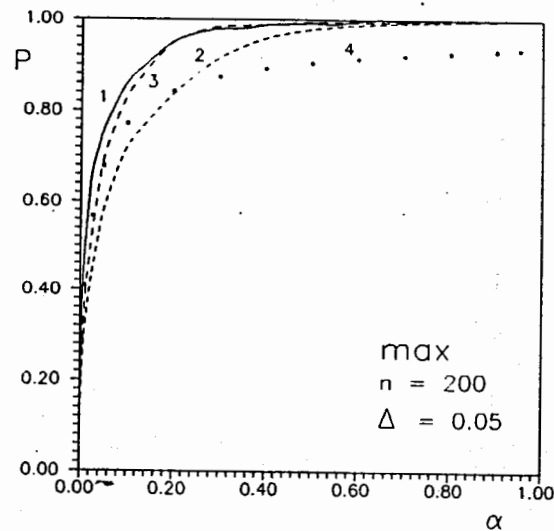


Рис. 5: Зависимости мощностей критериев ω_n^1 (кривая 1), ω_n^2 (2) и ω_n^3 (3) от уровня значимости α для гипотезы G_M при $n = 200$ и $\Delta = 0.025$. Точками отмечена вычисленная по аналитическим формулам зависимость для критерия ω_n^2 (4).

Поскольку выбор в качестве E и D в формуле (45) указанных выражений не является вполне обоснованным, при вычислениях использовались также и другие приближения для параметров альтернативных распределений статистики $\tilde{\omega}_n^2$. В одном случае это были параметры гауссовского распределения a и σ^2 , аппроксимирующего реальное распределение $\tilde{\omega}_n^2$ при больших значениях n для двух типов альтернативных гипотез (см. гл.3), в другом – точные выражения для среднего и дисперсии альтернативного распределения $\tilde{\omega}_n^2$ для двух типов альтернатив и произвольного n (формулы (11) – (14) в работе [4]).

Мощность правостороннего критерия ω_n^3 согласно главе 3 определяется формулой (41). Учитывая приближенный характер этой формулы, при вычислениях так же, как в случае критерия ω_n^2 , наряду с параметрами аппроксимирующего гауссовского распределения a и σ^2 , определяемыми формулами (34), (35) и (38), (39), использовались также точные значения среднего и дисперсии альтер-

нативного распределения $\tilde{\omega}_n^3$ (см. формулы (15) – (18) в работе [4]) и приближенные выражения (32), (33) и (36), (37).

Расчеты функций мощности критериев ω_n^1 , ω_n^2 и ω_n^3 проводились по формулам (43), (44), (45) и (41) для всех типов параметров E и D и тех же значений объема выборки n , уровня значимости α и параметра Δ , что и в случае моделирования (см. п.5.1). Это дало возможность сопоставить кривые, полученные по аналитическим формулам и путём моделирования.

Некоторые результаты расчётов представлены на рис.1 – 5 наряду с результатами моделирования, причем параметры представленных кривых выбирались в каждом конкретном случае соответствующими наилучшему согласию с монте-карловскими кривыми.

Результаты расчетов показывают, что аналитические приближения для функций мощности в целом отражают характер их изменения в зависимости от α и Δ . Кривые для критерия ω_n^1 для обоих типов гипотез практически совпадают с кривыми, полученными по методу Монте-Карло во всей области изменения α и Δ и рассмотренных значениях n . Это говорит о том, что выбранное число статистических испытаний оказалось вполне достаточным для обеспечения хорошей точности моделирования. Однако анализ зависимостей $P = P(\Delta)$ для ω_n^2 и ω_n^3 при различных α выявил значительное отличие реальных альтернативных распределений этих статистик от гауссовских приближений в области малых $\Delta \leq 0,1$. В области $\Delta > 0,1$ колебания кривых аналитического приближения для всех критериев и типов параметров E и D вокруг истинных значений, определяемых монте-карловскими кривыми, происходят для гипотезы G_{mu_0} на уровне 10% (значительно реже – 20% и больше). Примерно такая же картина наблюдается и для гипотезы G_M , но уже при значениях параметра $\Delta \leq 0,1$.

Общей закономерностью для критериев ω_n^2 и ω_n^3 является сближение результатов расчетов для разных типов параметров E и D с ростом Δ .

Детальное сравнение результатов вычислений для широкого набора значений параметра Δ и уровня значимости α при значениях $n = 50, 200$ и 1000 не выявило явного преимущества расчетов по ана-

литическим формулам с каким-либо типом параметров E и D для обоих критериев ω_n^2 и ω_n^3 (в смысле их близости к кривым, рассчитанным по методу Монте-Карло). С определенной осторожностью можно утверждать, что с ростом Δ лучшее согласие, наблюдавшееся сначала для кривых, соответствующих точным значениям параметров E и D , переходит к кривым, соответствующим либо приближенным значениям параметров реальных альтернативных распределений, либо параметрам аппроксимирующего гауссовского распределения. Примерно такая же картина наблюдается и с ростом α .

Из всего сказанного можно сделать один общий вывод. Аналитические выражения могут быть применены для оценки уровня мощности критерия, выбранного на основании каких-либо соображений при решении конкретной задачи. И сделать это можно для любой альтернативной гипотезы по формулам (8), (9) и (20), (21). Однако для выбора между критериями аналитические выражения могут оказаться малоприменимыми.

6. Заключение

Настоящая работа является продолжением исследований свойств нового интегрального непараметрического критерия ω_n^3 , начало которым положено в [1]. Рассмотрены свойства критерия для случая больших объёмов эмпирической выборки $n \geq 50$. Показана приближённая нормальность распределения статистики ω_n^3 в случае принадлежности эмпирической выборки произвольной односторонней альтернативной гипотезе. Приведены формулы для среднего значения и дисперсии этого распределения, позволяющие вычислять мощность критерия ω_n^3 для любой альтернативной гипотезы в случае достаточно больших n . Этот факт используется для вычисления минимальной и максимальной функций мощности одностороннего критерия ω_n^3 в подходе Чэпмена. Функции мощности, полученные в рамках этого подхода, а также функции, рассчитанные с помощью метода Монте-Карло, использовались для сравнения нового критерия с хорошо известным интегральным критерием ω_n^2 , а также с критерием ω_n^1 . На примере выборок $n = 50, 200$ и 1000 в случае

альтернативной гипотезы G_{mu_0} , минимизирующей мощность, показано преимущество нового критерия в достаточно широкой области изменений уровня значимости α (особенно при малых значениях α , что важно для практических применений) и параметра Чэпмена Δ . Показано также, что в случае альтернативной гипотезы G_M , максимизирующей мощность, имеет место следующее соотношение между мощностями критериев $P(\omega_n^1) > P(\omega_n^3) > P(\omega_n^2)$, хотя преимущество критерия ω_n^1 перед ω_n^3 малозначительно. Показано, что за исключением области значений Δ , близких к 0 (например, $\Delta < 0,1$ для гипотезы G_{mu_0}) аналитические выражения для функций мощности, полученные в приближении нормальности альтернативных распределений ω_n^2 и ω_n^3 , могут использоваться для оценки мощности соответствующего критерия, особенно когда моделирование требует весьма значительного счётного времени ЭВМ. Однако эти выражения малоприменимы для сравнения на их основе самих критериев.

Литература

- [1] Зрелов П.В., Иванов В.В.: *ОИЯИ, P10-89-577*, Дубна, 1989.
- [2] Зрелов П.В., Иванов В.В.: *ОИЯИ, P10-88-321*, Дубна, 1988.
- [3] Chapman D.G.: *A Comparative Study of Several One-Sided Goodness-of-Fit Tests*. Ann. Math. Stat., 1958, v.29, p.655.
- [4] Zrelov P.V., Ivanov V.V.: *Determination of Distribution Parameters for ω_n^2 and ω_n^3 Test Statistics by the Computer Algebra Application*. IV International Conference on Computer Algebra in Physical Research, JINR, E11-90-204, Dubna, 1990.
- [5] Anderson T.W., Darling D.A.: *Asymptotic Theory of Certain "Goodness of Fit" Criteria Based on Stochastic Processes*. Ann. Math. Statist., 1952, v.23, p.193.
- [6] Соболев И.М.: *Численные методы Монте-Карло*. М.: Наука, 1973.
- [7] Зрелов П.В., Иванов В.В.: *Препринт ОИЯИ, Д11-92-139*, Дубна, 1992.
- [8] Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. *Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений*. М.: Наука, 1965.
- [9] Мартынов Г.В. *Критерии омега-квадрат*. М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 октября 1992 года.

Зрелов П.В., Иванов В.В.

P11-92-409

Критерии согласия, основанные на проверочной статистике

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x)$$

Исследование мощности одностороннего критерия для больших n

Рассмотрены свойства нового интегрального непараметрического критерия согласия ω_n^3 для случая больших объемов эмпирической выборки. В рамках подхода Д.Чэпмена на примере выборок $n = 50, 200$ и 1000 проведено сравнение одностороннего критерия ω_n^3 с известным критерием ω_n^2 (омега-квадрат) и критерием Ватсона \bar{U} (связанным с интегральным критерием ω_n^1). Для альтернативной гипотезы, минимизирующей мощность, показано преимущество критерия ω_n^3 в достаточно широкой области изменения уровня значимости α и, что особенно важно для практических применений, его малых значений. Показано также, что для гипотезы, максимизирующей мощность, критерий Ватсона имеет незначительное преимущество перед ω_n^3 . Приводятся аналитические выражения, позволяющие оценить мощность критерия ω_n^3 для произвольной односторонней альтернативной гипотезы.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1992

Перевод авторов

Zrelov P.V., Ivanov V.V.

P11-92-409

Goodness-of-Fit Criteria Based on Test Statistics

$$\omega_n^3 = n^{3/2} \int_{-\infty}^{\infty} [S_n(x) - F(x)]^3 dF(x)$$

Investigation of power of one-sided criterion for large n

The main properties of new integral nonparametric goodness-of-fit criterion ω_n^3 for large empirical sample sizes are considered. Its comparison with familiar ω_n^2 criterion and with Watson's criterion \bar{U} (connected with another integral criterion ω_n^1) in frames of Chapman's approach for $n = 50, 200$ and 1000 was performed. For alternative hypotheses, minimizing the power, an advantage of the ω_n^3 in a sufficient broad range of significance level α and, what is specially important for practical applications, for small values was shown. It was also shown that for hypotheses, maximizing the power, the Watson's criterion has a slight advantage over ω_n^3 criterion. The analytical expressions allowing to evaluate the power of ω_n^3 criterion for arbitrary one-sided alternative hypotheses are presented.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1992