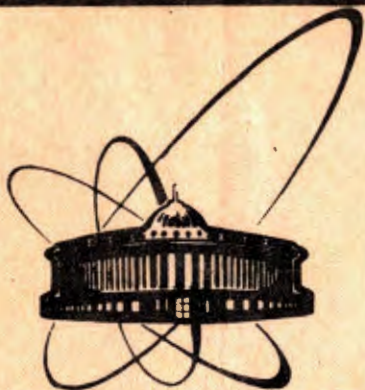


92-288



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P11-92-288

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, В.В.Игнатов<sup>1</sup>,  
А.Н.Ильина<sup>2</sup>, И.В.Ильин<sup>3</sup>, В.Д.Ильин<sup>2</sup>

О СТОХАСТИЗАЦИИ ДВИЖЕНИЯ  
ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ  
В ГЕОМАГНИТНОМ ПОЛЕ  
И ПОЛЕ ВОЛНОВОГО ПАКЕТА

---

<sup>1</sup>Вычислительный центр коллективного пользования РАН, Москва

<sup>2</sup>НИИЯФ МГУ, Москва

<sup>3</sup>Троицкий институт инновационных и термоядерных исследований,  
Троицк, Московская область

1992

## ВВЕДЕНИЕ

Физические условия в реальной геомагнитной ловушке достаточно сложные, чтобы можно было ставить задачу о движении заряженных частиц в общем виде. Это связано с наличием среды в виде остаточной атмосферы, плазмы, электромагнитных возмущений и с нестабильностью поля. В зависимости от энергии частиц, их сорта и расстояния от поверхности Земли описание динамики захваченных частиц в некоторых случаях можно свести к простым математическим моделям. Например, протоны высоких энергий могут рассматриваться движущимися в вакууме и описываться уравнением Лоренца. Влияние среды иногда удается учесть введением дополнительной силы. Для долгосрочных прогнозов в поведении частицы эффективнее использовать дискретную модель движения — отображения Пуанкаре. Преимущество этой модели в том, что она позволяет наиболее просто различать стационарные, квазипериодические и хаотические типы движения (траектории). Возможности такого подхода продемонстрированы численными экспериментами с отображениями для нелинейной системы «частица — дипольное геомагнитное поле» при оценке коэффициента захвата инжектированных частиц и их времени жизни [1]. Описание динамики такой системы сводится к отображению Пуанкаре в форме стандартного отображения Чирикова [2].

В настоящей работе обсуждаются механизмы стохастического ускорения частиц в условиях геомагнитной ловушки. Имеется в виду стохастический нагрев частиц в регулярных полях. Рассматриваемой динамической системой является «частица — дипольное поле плюс поле волнового пакета».

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Здесь будут кратко отмечены некоторые особенности движения частицы в магнитном поле и поле волнового пакета и способы описания динамики таких систем.

Взаимодействие частицы с волной наиболее сильно, когда она находится с ней в резонансе. Это происходит при выполнении одного из условий резонанса [3,4]:

$$\omega = k_{||} v_{||} + l \omega_{Hj}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где индекс  $j$  обозначает сорт частиц,  $k_{||}$  и  $v_{||}$  — продольные составляющие волнового вектора  $k$  и скорости частицы  $v$  относительно внешнего магнитного поля  $B$ ,  $\omega_H$  — циклотронная частота, слагаемое  $k_{||} v_{||}$  учитывает доплеровское смещение частоты. Если  $l > 0$ , то эффект Доплера называется нормальным или досветовым ( $v_\phi/v > 1$ ,  $v_\phi$  — фазовая скорость волны). При  $l < 0$  эффект Доплера — аномальный или сверхсветовой ( $v_\phi/v < 1$ , что имеет место в радиационных поясах Земли). Поэтому амплитуда электрического поля  $E \sim (v_\phi/c) h (v_\phi/c \ll 1)$  и значительно меньше магнитного поля волны  $h$  [5]. Условие  $l = 0$  определяет черенковское затухание или нарастание волн. Взаимодействие при  $l \neq 0$  связано с циклотронным излучением или поглощением волн. Учет неоднородности поля  $B$  приводит к тому, что с излучением в конечной полосе частот будут резонансно взаимодействовать все энергичные частицы [6,7].

В условиях геомагнитной ловушки величина  $\omega_{Hj} \ll \omega_{nl}$  ( $\omega_{nl}$  — плазменная частота). При этом ионная плазменная частота меньше электронной циклотронной  $\omega_{He}$ . Вследствие этого в спектре частот электромагнитных и электростатических волн имеется запретная область  $\omega_{He} \ll \omega \leq \omega_{nl}$  [5]. Подробная информация о всевозможных видах колебаний в замагниченной плазме дана в [8]. Сведения об электростатической ветви колебаний плазмы приведены в [9], об электромагнитных волнах — в [10]. Там же обсуждается роль давления плазмы. Заметим, что в области радиационных поясов Земли отношение электронного и протонного газокINETического давления к магнитному значительно меньше единицы [5,11]. Происхождение основных типов низкочастотных электромагнитных излучений в магнитосфере Земли рассматривается в [11—13]. Экспериментальные данные об этих излучениях приведены, например, в [14].

Если волновой пакет распространяется перпендикулярно к магнитному полю  $B$  и выполняются условия резонанса для частиц, то возникает стохастическая паутина. С существованием паутины связана возможность диффузии частиц по ее каналам. При этом происходит перекачка энергии из волн в частицы, приводящая к их стохастическому нагреву [15,16]. Диффузия может быть неограниченной в случае однородного и бесконечно широкого пакета. Блуждание частиц по каналам паутины сравнительно медленное, так как толщина паутины  $\exp(-\text{const}/\epsilon)$ , где  $\epsilon$  — периодическая во времени амплитуда возмущения. Эта диффузия аналогична арнольдской, хотя число степеней свободы  $N = 1\frac{1}{2}$ , где  $1/2$  степени свободы обусловлена возмущением  $\epsilon$  и связана с вырожденностью невозмущенной задачи [17]. Условие вырожденности системы с гамильтонианом  $H = H_0 + \epsilon V$  ( $V$  — потенциал возмущения) имеет вид:

$$\left| \partial^2 H_0 / \partial J_j \partial J_k \right| = 0, \quad j, k = 1, \dots, l, \quad N = l + \frac{1}{2},$$

где  $J_j$  — переменные действия,  $H_0 = H_0(J_1 \dots J_l)$ . В нашем случае это означает, что невозмущенный гамильтониан  $H_0$  описывает линейные колебания.

Наиболее реальные условия, когда волновой пакет распространяется наклонно к магнитному полю [17—19]. В таком случае добавляется еще одна степень свободы (связанная с продольным движением) и получается  $N = 2\frac{1}{2}$ . Незначительное отклонение волнового вектора  $k$  от условия  $k \perp B$  ( $k_z/k_x = \beta \sim 10^{-2} + 10^{-3}$ ,  $z \parallel B$ ) приводит к резкому усилению диффузии и увеличению меры стохастической части фазового пространства. Диффузия оказывается более сильной, чем диффузия Арнольда при  $N > 2$  (толщина паутины  $\sim \exp(-\text{const}/\epsilon^{1/2})$ ), что обусловлено существованием затравочной паутины по некоторой части степеней свободы при сколь угодно малом  $\epsilon$ . Если волновой пакет состоит из одной или конечного числа гармоник, то процесс ускорения частиц является ограниченным [19]. Подробное исследование диффузии частиц в такой динамической системе проведено в [17,19]. Соответствующее отображение для описания динамики этой модели получено в [17]. Влияние диссипации исследовано в работе [20]. В процессе ускорения возможно такое изменение параметров системы, когда условие возникновения хаоса нарушается. В такой ситуации может произойти смена сильно развитого хаоса на хаос типа «перемежаемость» [21]. Для волнового пакета, состоящего из единственной гармоники, уравнения движения имеют эталонный вид:

$$\ddot{x} + \omega_H^2 x = \epsilon \sin(k_x x + k_z z - \omega t),$$

$$\ddot{z} = \epsilon \beta^2 \sin(k_x x + k_z z - \omega t),$$

где  $\epsilon = eE_0/m$ ,  $E_0$  — амплитуда электрического поля. Еще раз подчеркнем, что при  $\beta = 0$  на фазовой плоскости  $(x, \dot{x})$  существует стохастическая затравочная паутина, связанная с тем обстоятельством, что невозмущенная задача вырождена [17].

При распространении волнового пакета вдоль  $B$  происходит расщепление между поперечной и продольной степенями свободы. В этом случае получается два независимых отображения. Одно описывает ларморовское вращение, другое (сводящееся к отображению Чирикова [2]) — движение вдоль магнитного поля. Применительно к магнитосферным условиям эта задача рассматривалась в [22,23]. Относительно общего случая, учитывающего неоднородность магнитного поля и произвольность угла распространения волны, см. работу [24]. Сведения об использовании явления динамиче-

ского хаоса вообще в космофизике можно найти, например, в [25] и приведенных там ссылках.

Если волновой вектор  $k \perp B$ , то продольное движение становится свободным, поскольку  $\beta = 0$ , а движение частицы поперек магнитного поля описывается отображением с подкручиванием [15]. Такое название связано с подкручиванием траекторий резонансных частиц, в результате чего все фазовое пространство покрывается стохастической паутиной. Это отображение вызывает особый интерес, так как оно является генератором стохастической паутины при произвольных амплитудах волн. Поэтому несколько подробнее остановимся на его свойствах. Вначале приведем, как нам представляется, более формальный и простой вывод отображения с подкручиванием.

### ОТОБРАЖЕНИЕ С ПОДКРУЧИВАНИЕМ

Рассмотрим простейшее одномерное колебательное движение тела единичной массы, описываемое уравнением

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0,$$

эквивалентным системе уравнений

$$\begin{cases} \dot{q} = p, \\ \dot{p} = -\omega_0^2 q, \end{cases} \quad (1)$$

которую можно интерпретировать как систему уравнений Гамильтона с функцией энергии

$$H = \frac{1}{2}(\omega_0^2 q + p^2).$$

Заменой координат  $x = \omega_0 q$ ,  $y = p$  систему (1) приводим к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = \omega_0 y, \\ \dot{y} = -\omega_0 x. \end{cases} \quad (2)$$

Решениями такой системы, очевидно, являются функции

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0), \quad y(t) = \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

где  $\sin \varphi_0 = x(0)$  и  $\cos \varphi_0 = y(0)$ .

Наиболее наглядно динамическая система представляется своим фазовым потоком, являющимся отображением фазового пространства в себя, которое описывает перемещение, совершаемое точкой  $(q, p)$  фазового пространства за время  $t$ . Фазовый поток системы (2) представляет собой пово-

рот на угол  $\omega_0 t$ , другими словами, перемещение точки в фазовом пространстве за время  $t$  задается линейным преобразованием

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \sin \omega_0 t \\ -\sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix}.$$

В прежних координатах  $(q, p)$  это отображение выглядит так

$$\begin{bmatrix} q(t) \\ p(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \omega_0 t & \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t \\ -\omega_0 \sin \omega_0 t & \cos \omega_0 t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q(0) \\ p(0) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Теперь представим себе, что тот же самый осциллятор движется в поле косинусоидального потенциала

$$U(q) = a \cos(kq),$$

но потенциал этот действует не постоянно, а включается мгновенно через равные промежутки времени, отстоящие друг от друга на величину  $T_0$ . Это эквивалентно тому, что на движущуюся частицу действуют мгновенные толчки силы

$$F(q) = -\frac{dU}{dq} = ak \sin(kq).$$

В результате каждого такого толчка импульс и энергия частицы претерпевают изменение по закону

$$p_{n+1} - p_n = ak \sin(q_n),$$

$$W_{n+1} - W_n = a \cos(q_n).$$

В соответствии с этим изменение положения частицы в фазовом пространстве представляет собой композицию двух отображений, а именно отображения

$$p_{n+1} = p_n + ak \sin(kq_n), \quad W_{n+1} = W_n + a \cos(kq_n)$$

и отображения (3). Первое из них соответствует дискретным толчкам, а второе — непрерывному перемещению. Окончательный вид отображения следующий:

$$p_{n+1} = \cos(\omega_0 T_0) [p_n + ak \sin(kq_n)] - \omega_0 \sin(\omega_0 T_0) q_n,$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{\omega_0} \sin(\omega_0 T_0) [p_n + ak \sin(kq_n)] + \cos(\omega_0 T_0) q_n.$$

В координатах  $u = k p / \omega_0$ ,  $v = k q$  это отображение выглядит так

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \cos \alpha (u_n + K \sin v_n) - \sin \alpha v_n, \\ v_{n+1} &= \sin \alpha (u_n + K \sin v_n) + \cos \alpha v_n, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\alpha = \omega_0 T_0$  и  $K = a k^2 / \omega_0$ .

Настоящее отображение получило название «отображение с подкручиванием на угол  $\alpha$ » и представляет собой особый интерес в случае резонанса колебательного движения и внешних толчков. Такой резонанс имеет место,

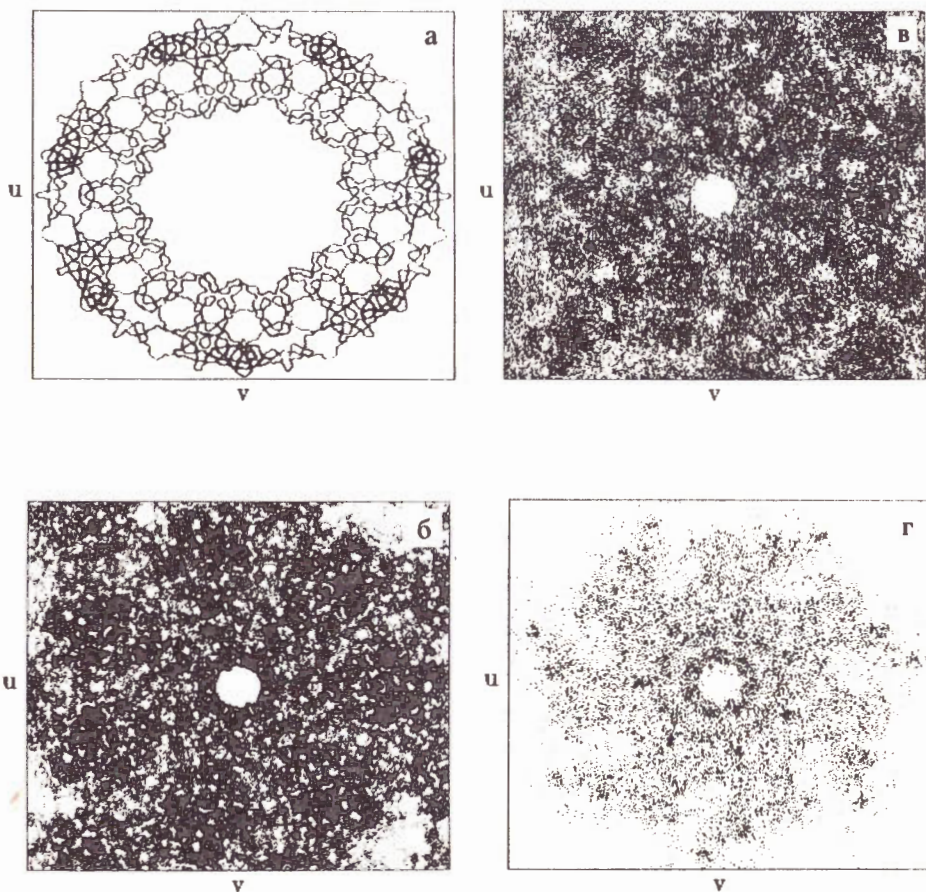


Рис.1. Стохастическая паутина в случае симметрии 7-го порядка в зависимости от  $K$ .  $v_0 = 53$ ;  $u_0 = 0$ , размер квадратов  $[-32\pi, +32\pi] \times [-32\pi, +32\pi]$ ; а)  $K = 0,5$ ; б)  $K = 1,0$ ; в)  $K = 1,5$ ; г)  $K = 2,0$

если за время одного оборота частица успевает претерпеть ровно  $M$  толчков, что справедливо при следующих соотношениях

$$M \omega_0 T_0 = 2\pi$$

или

$$\omega_0 T_0 = \frac{2\pi}{M}.$$

По аналогии с методом Пуанкаре будем итерировать данное отображение, отмечая полученные точки на фазовой плоскости. При определенных начальных условиях фазовая плоскость покрывается сложными звездообразными узорами, получившими название «стохастической паутины» с симметрией порядка  $M$ . О связи таких узоров и симметричных покрытий плоскости см. [16], а также рис.1 и 2.

В силу вклада дискретных возмущений данному отображению не соответствует никакой непрерывный гамильтониан. Однако можно построить некоторую динамическую систему, которая будет служить своего рода приближением исходной и позволит понять, откуда возникают сложные узоры, сплетаемые в фазовом пространстве стохастической паутиной.

Вычислим усредненный гамильтониан такого движения, усреднив энергию внешних возмущений по периоду вращения частицы

$$H(v, u) = \frac{\omega_0^2}{2k^2} (u^2 + v^2) + \frac{a}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \cos v_n. \quad (5)$$

Каждое из слагаемых в формуле (5) соответствует одному внешнему толчку. Учитывая (3), получим

$$\begin{aligned} v_n &= v(n T_0) = \cos(n\alpha)v - \sin(n\alpha)u, \\ H(v, u) &= \frac{\omega_0^2}{2k^2} (u^2 + v^2) + \frac{a}{M} \sum_{n=0}^{M-1} \cos [\cos(n\alpha)v - \sin(n\alpha)u]. \end{aligned}$$

Гамильтониан  $H(v, u)$  описывает некоторую одномерную, а следовательно, интегрируемую динамическую систему, фазовые траектории которой ложатся на линии уровня функции энергии  $H(v, u)$ . Рис.3 дает представление о том, как могут выглядеть линии уровня гамильтониана  $H(v, u)$ . Диапазон параметров подобран так, чтобы дискретная картина хорошо аппроксимировала непрерывную. Алгоритм построения рисунка следующий: значение функции  $H(v, u)$  округляется до ближайшего целого, а затем соответствующая точка закрашивается черным цветом, если  $H(v, u)$  — нечетное, и белым, если  $H(v, u)$  — четное.

Произведя в системе разностных уравнений (4) замену параметров  $\omega_0 = \omega_H$  и  $K = K_H = \epsilon k T_0 / \omega_H$ , получим отображение в виде [15,16]. Ве-

личина взаимодействия частицы с волной характеризуется параметром  $K_H$ . С увеличением  $K_H$  ширина стохастической паутины растет, и при  $K_H \geq 1$  из паутины образуется стохастическое море (см. рис. 1 и 2). Эта особенность подобна той, что наблюдается в стандартном отображении [1, 2]. Динамика частиц в ячейках между паутиной является регулярной. При  $K_H \ll 1$  доля ускоряемых частиц экспоненциально мала, так как пропорциональна фазовому объему, занимаемому паутиной. Постоянным источником заполнения каналов паутины, поддерживающим непрерывный поток ускоряемых частиц, могут быть столкновения любой природы [15]. В некотором смысле это напоминает диффузию Арнольда для высокоэнергичных протонов в

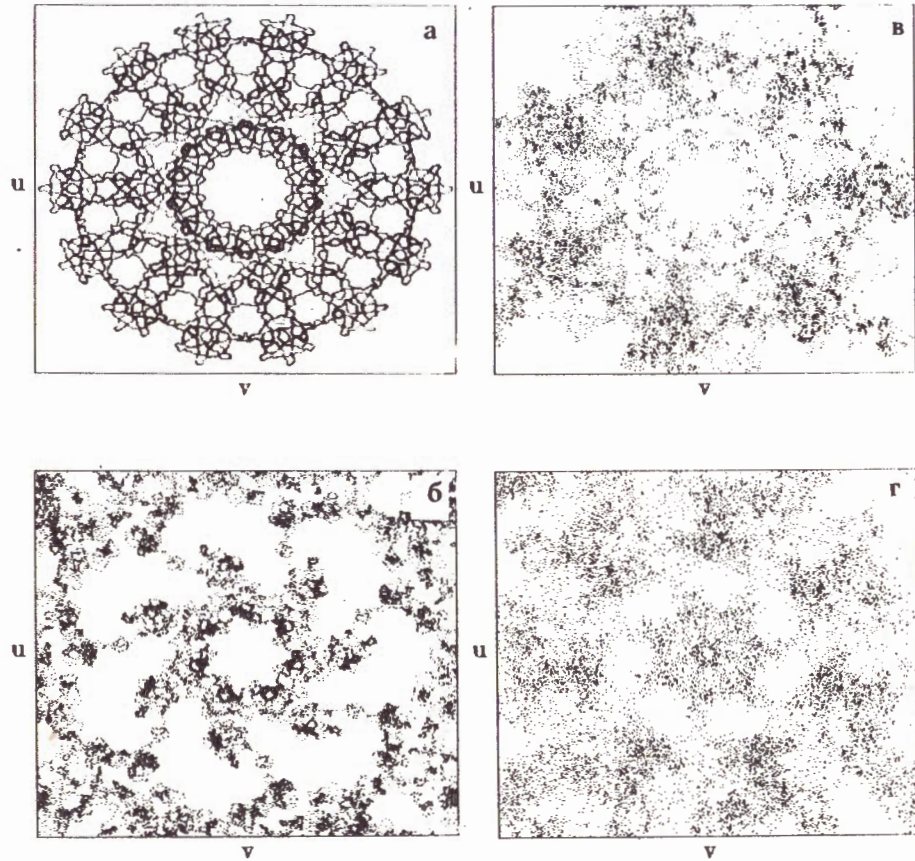


Рис.2. То же, что и на рис. 1.  $v_0 = 25$ ;  $u_0 = 0,7$ ; а)  $K = 0,6$ ; б)  $K = 1,0$ ; в)  $K = 1,5$ ; г)  $K = 2,0$

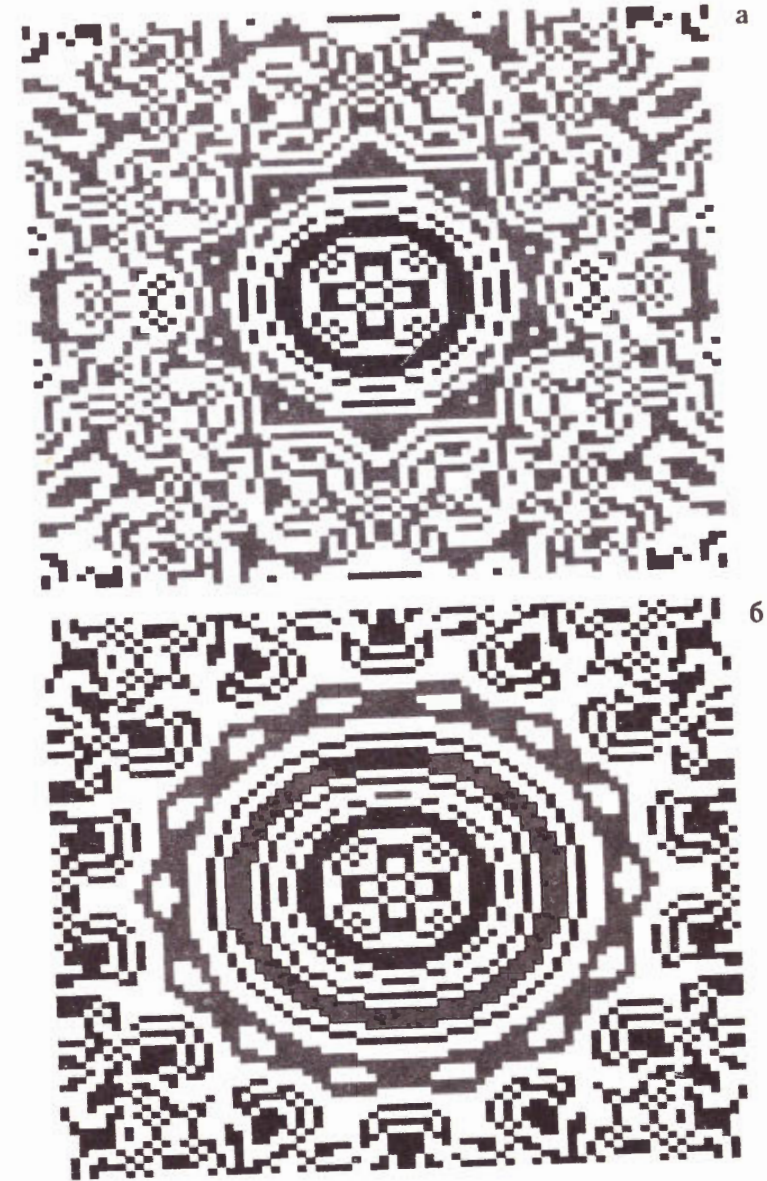


Рис.3. Уровни гамильтониана  $H(v, u)$  в случае симметрии 5-го и 7-го порядков.  $\omega_0 = 1$ ;  $K = 100$ ;  $a = 10$ ; размер квадратов  $[-15, +15] \times [-15, +15]$ . а)  $M = 5$ ; б)  $M = 7$

радиационных поясах, когда непрерывное поступление частиц в стохастические слои осуществляется за счет стационарного механизма питч-угловой диффузии, связанной с квазиупругим рассеянием на волнах плазменной турбулентности (на шумовых волнах) [26]. При  $K_H \geq 1$  средняя энергия, согласно [15], изменяется по закону  $\bar{W} = \varepsilon^2 m T_0 / 2$ . Если допустить, что в магнитосфере Земли существуют электростатические волны с амплитудой  $E_0 \sim 10^{-3}$  в/см [14], то для протонов можно записать  $\bar{W} \approx 5 \cdot 10^5 T_0 t$  [эВ]  $\approx \approx 3t / \Delta \omega$  [МэВ], где  $\Delta \omega = 2\pi / T_0$  — интервал между модами бесконечно широкого волнового пакета.

В случае конечного волнового пакета, состоящего из одной или нескольких гармоник, стохастический нагрев ограничен, и максимально приобретенная энергия при наклонном распространении ( $\beta < 1$ ) оценивается из соотношения [19]

$$v_{\perp} \sim \frac{4}{\pi} \frac{(\varepsilon |M - l|)^{2/3}}{(k_x \omega_H)^{1/3}},$$

где  $M = \omega / \omega_H$ ,  $k_z v_z = l \omega_H$ ,  $M$  и  $l$  — целые числа (при поперечном распространении  $l = 0$ ),  $\varepsilon \approx 10^9$  см/сек<sup>2</sup> (при том же предположении, что и для  $W$ ), число гармоник  $N = 1$ . Заниженную оценку максимальной энергии, до которой частица ускоряется, можно сделать, исходя из простого физического представления о том, что ускорение идет до тех пор, пока скорость частицы и максимальная фазовая скорость волны выравниваются, т.е.  $v = v_{\phi \max} = NM \omega_H / k_x$ .

Более детальные оценки с использованием приведенных данных будут рассмотрены отдельно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Амирханов И.В. и др. — Сообщение ОИЯИ Р11-91-68, Дубна, 1991.
2. Chirikov B.V. — Phys. Rep., 1979, v.52, No.5, p.265.
3. Гинзбург В.Л. — Распространение электромагнитных волн в плазме. М.: Наука, 1967.
4. Ахиезер А.И. и др. — Коллективные колебания в плазме. М.: Атомиздат, 1964.
5. Тверской Б.А. — Динамика радиационных поясов. М.: Наука, 1968.
6. Гершман Б.Н., Трахтенгерц В.Ю. — УФН, 1966, т.89, вып.2, с.201. Каладзе Т.Д. и др. — Физика плазмы, 1976, т.2, вып.4, с.672.
7. Ильин В.Д. — Геомагнетизм и аэрономия, 1970, т.10, 4, с.575.
8. Кролл Н., Трайвеллис А. — Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.
9. Михайловский А.Б. — Теория плазменных неустойчивостей. М.: Атомиздат, 1970, т.1.

10. Михайловский А.Б. — В сб.: Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1972, вып.6, с.70.
11. Беспалов П.А., Трахтенгерц В.Ю. — В сб.: Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1980, вып.10, с.88.
12. Hada T., Kennel C.F., Terasawa T. — J. Geophys. Res., 1987, v.92, p.4423.
13. Omid N., Winske D. — J. Geophys. Res., 1990, v.95, p.2281.
14. Низкочастотные волны и сигналы в магнитосфере Земли. М.: Наука, 1980.
15. Заславский Г.М. и др. — ЖЭТФ, 1986, т.91, вып.2(8), с.500.
16. Заславский Г.М., Сагдеев Р.З., Усиков Д.А., Черников А.А. — Слабый хаос и квазирегулярные структуры. М.: Наука, 1991; УФН, 1988, т.156, вып.2, с.193.
17. Заславский Г.М. и др. — ЖЭТФ, 1989, т.96, вып.5(11), с.1563.
18. Нейштадт А.И. и др. — ЖЭТФ, 1991, т.99, вып.3, с.763.
19. Васильев А.А., Заславский Г.М. — ЖЭТФ, 1991, т.99, вып.5, с.1479.
20. Васильев А.А. и др. — ЖЭТФ, 1988, т.94, вып.10, с.170.
21. Заславский Г.М. и др. — Физика плазмы, 1988, т.14, вып.7, с.807.
22. Меерсон Б.И., Сасоров П.В., Шкляр Д.Р. — Физика плазмы, 1979, т.5, вып.5, с.1107.
23. Сенаторов В.Н. — Геомагнетизм и аэрономия, 1990, т.30, 2, с.319.
24. Соловьев В.В., Шкляр Д.Р. — ЖЭТФ, 1986, т.90, вып.2, с.471.
25. Special Section: Chaos and Stochasticity in Space Plasmas. — Geophys. Res. Lett., 1991, v.18, No.8, p.1573—1651.
26. Ильин В.Д., Ильина А.Н. — Физика плазмы, 1982, т.8, вып.1, с.148.

Рукопись поступила в издательский отдел  
8 июля 1992 года.