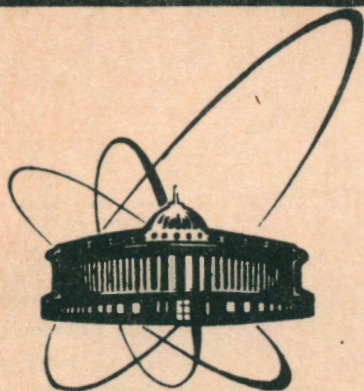


92-142



СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

P11-92-142

М.М.Грегуш¹, Е.П.Жидков, Т.М.Макаренко²,
Н.Б.Скачков, Б.Н.Хоромский

РЕШЕНИЕ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧИ
ДВУХ ТЕЛ С НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ
ОТ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА

¹Братиславский университет

²Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

1992

Введение

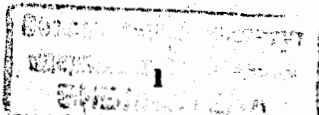
Целью нашей работы является дальнейшая разработка математических методов решения релятивистских трехмерных интегральных уравнений, применявшихся нами ранее ^{/1-5/} при исследовании спектральной задачи для двухчастичных систем. Мы также предложим свою интерпретацию полученных этими методами физических результатов.

Существенно новым шагом является реализованный в настоящей работе переход к новому классу интегральных уравнений, в которых ядра, содержащие информацию о взаимодействии между двумя частицами, включают зависимость от спектрального параметра задачи. Такого вида ядра возникают в результате их последовательного построения из матричных элементов релятивистской амплитуды рассеяния, как, например, в ^{/6/}. При этом задача о вычислении энергетического спектра двухчастичной системы становится аналогичной задаче решения уравнения типа нерелятивистского уравнения Шредингера с потенциалом, зависящим от полной энергии системы, и носит, тем самым, существенно нелинейный характер. В последнее время интерес к такого рода нелинейным задачам был вызван рядом работ ^{/7-9/}, в которых полученный в ^{/6/} потенциал, включающий зависимость от полной энергии системы, был использован для описания спектра масс узких резонансов, наблюдавшихся в различных двухчастичных системах ^{/10,11/}. При этом экспериментально обнаруженные узкие резонансы интерпретировались авторами работ ^{/7-9/} как резонансные состояния с положительной энергией, погруженные в непрерывный спектр.

В нашей работе мы исследуем класс интегральных уравнений для волновой функции двухчастичной системы с ядрами взаимодействия, содержащими зависимость от полной энергии системы, представляющей собой спектральный параметр задачи. В основном, мы будем рассматривать случаи отрицательной энергии связи, который не был подробно рассмотрен авторами работ ^{/7-9/}. Относительно случая положительной энергии связи мы ограничимся кратким замечанием, вынесенным в заключение.

§ I. Класс решаемых задач

Нами будут исследоваться уравнения для волновой функции электродинамической двухчастичной системы $\psi(x)$. Эти уравнения удобно записать в следующей единообразной форме:



$$G_0^{-1} \psi(x) = \frac{\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} v_i(x, y; \mu) \psi(y) D(y) dy. \quad (I)$$

Здесь α - электродинамическая константа связи:

$$\alpha = (137)^{-1},$$

$$x = \frac{|\vec{p}|}{m}.$$

G_0^{-1} - обратная функция к свободной функции Грина двухчастичной системы

$$G_0^{-1} = K(x) - \mu, \quad (Ia)$$

составленная из кинетической энергии системы $K(x)$ (ее вид, как и вид элемента объема интегрирования $D(y) = C(y)dy$, будут конкретизированы в дальнейшем), и спектрального параметра μ , связанного с полной массой системы m соотношением

$$\mu = \frac{M}{m}, \quad (Iб)$$

где m - масса составляющей частицы. Нами рассматривается только случай систем, составленных из двух частиц с равными массами m .

Для численного решения задачи (I) был использован метод итераций. Далее рассматривается дискретизация уравнения (I) по Галеркину.

Выбирая некоторое число $R > 0$ и полагая $h = R \cdot n^{-1}$ (R - отрезок дискретизации, h - шаг дискретизации, n - количество узлов),

определим систему базисных функций $\varphi_k(x)$, $k=1, \dots, n$, так что

φ_k , $k < n$ - кусочно-линейны и непрерывны $\varphi_k(k \cdot h) = 1$,

$\varphi_k(\xi) = 0$, где $\xi = (k-1)h$ и $\xi = (k+1)h$. Функция

$\varphi_n(x)$ - линейна на отрезке $[R-h; h]$, $\varphi_n(R-h) = 0$,

$\varphi_n(R) = 1$ и с учетом асимптотики при $x \rightarrow \infty$ $\varphi_n(x) = \left(\frac{R}{x}\right)^2$

при $x > R$.

Решение $\psi(x)$ ищем в виде

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x),$$

где $u_n = (u_1, \dots, u_n)^T$ - вектор неизвестных.

Вычисляя скалярные произведения вида (φ_k, f) по формуле

Симпсона, приходим к алгебраической системе

$$K(p_i) u_i - \frac{\alpha}{\pi} \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j = \mu u_j,$$

где

$$a_{ij} = \int_{p_j-h}^{p_j+h} V(p_i, y; \mu) C(y) \varphi_j(y) dy, \quad p_i = ih, \quad i=1, \dots, n, \quad p_j = jh, \quad j=1, \dots, n.$$

Мы получили задачу на собственные значения, которая в общем виде записывается следующим образом:

$$A(\mu) u = \mu u. \quad (2)$$

Подчеркнем, мы рассматриваем задачу, когда μ входит нелинейно в

$A(\mu)$.

§ 2. Результаты численных расчетов

Реализация данного метода решения уравнения в виде программы позволяет рассчитывать значения спектрального параметра μ , а также находить численные значения двухчастичной волновой функции $\psi(x)$.

В качестве теста программы был произведен численный расчет уровней энергии для двухчастичного уравнения Шредингера в случае кулоновского потенциала, для которого известны точные решения в аналитическом виде. В этом случае

$$K(x) = x^2 + \frac{2m}{m}, \quad (3a)$$

$$V_3(x, y) = \ln \left| \frac{x+y}{x-y} \right|, \quad (3б)$$

$$C(y) = 1, \quad (3в)$$

$$\mu = \frac{M}{m} = \frac{2m+E}{m},$$

где E - энергия связи. В области отрицательных значений энергии связи численный расчет дал следующий спектр ее значений, который приведен в таблице I (здесь и далее мы ограничиваемся представлением результатов только для 4-х первых уровней) вместе со значениями, рассчитанными по аналитической формуле

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{\alpha^2}{2n^2}.$$

Таблица 1

	ε_n численный расчет	ε_n точное значение
1.	$-0.133197 \cdot 10^{-4}$	$-0.133198 \cdot 10^{-4}$
2.	$-0.332995 \cdot 10^{-5}$	$-0.332996 \cdot 10^{-5}$
3.	$-0.147959 \cdot 10^{-5}$	$-0.147998 \cdot 10^{-5}$
4.	$-0.832464 \cdot 10^{-6}$	$-0.832490 \cdot 10^{-6}$

Из этой таблицы можно видеть, какую степень точности можно ожидать от дальнейших расчетов.

Теперь обратимся к релятивистскому уравнению с зависящим от энергии потенциалом, полученным в ^{6/}. В этом уравнении

$$k_4(x) = 2\sqrt{1+x^2}, \quad (4a)$$

$$v_4(x, y; \mu) = \ln \left(\frac{x+y + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \mu}{|x-y| + \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} - \mu} \right), \quad (4б)$$

$$c_4(y) = (1+y^2)^{-1}, \quad (4в)$$

$$\psi_4(x) = (x \cdot \sqrt{1+x^2})^{-1} \varphi(x).$$

Значения спектрального параметра μ в области отрицательных значений энергии связи представлены в таблице 2 (в ней $\varepsilon_n = \mu_n^{-2}$).

Таблица 2

ε_1	$-0.125846 \cdot 10^{-4}$
ε_2	$-0.314593 \cdot 10^{-5}$
ε_3	$-0.139669 \cdot 10^{-5}$
ε_4	$-0.784383 \cdot 10^{-6}$

Роль эффектов, связанных с нелинейным вхождением спектрального параметра μ в ядро уравнения v_4 может быть оценена путем сравнения спектра, полученного для уравнения (I) с элементами (4a)–(4в) и представленного в таблице 2 со спектром, полученным для уравнения (I) в котором ядро $v_4(x, y; \mu)$ заменяется на ядро v_4 , не содержащее зависимости от μ , элементы (4a) и (4в) имеют свой прежний вид. В целях сохранения правильного нерелятивистского перехода от уравнения (I) с элементами (4a)–(4в) к уравнению Шредингера с кулоновским потенциалом v_3 (3б) мы заменим $v_4(x, y; \mu)$ со свободным спектральным параметром на ядро v_4 с фиксированным значением $\mu = 2$, т.е. $v_4(x, y; \mu=2)$. Полученные при этом и выраженные через

ε значения спектрального параметра μ , входящего лишь в левую часть уравнения (I), представлены в таблице 3.

Таблица 3

ε_1	$-0.128591 \cdot 10^{-4}$
ε_2	$-0.321734 \cdot 10^{-5}$
ε_3	$-0.142815 \cdot 10^{-5}$
ε_4	$-0.801980 \cdot 10^{-6}$

Аналогичным образом, чтобы оценить влияние релятивистских эффектов, мы приведем здесь решение уравнения (I) с элементами, которые получены путем перехода к нерелятивистскому пределу в (4a)–(4в). В этом случае отличие от нерелятивистского уравнения Шредингера, определенного элементами (3a)–(3в) заключается лишь в замене кулоновского потенциала v_3 на нерелятивистский предел (4б):

$$v_5(x, y; \mu) = \ln \left(\frac{x+y-\varepsilon}{|x-y-\varepsilon|} \right).$$

Соответствующий спектр значений энергии связи представлен в таблице 4

Таблица 4

ε_1	$-0.130559 \cdot 10^{-4}$
ε_2	$-0.328492 \cdot 10^{-5}$
ε_3	$-0.146371 \cdot 10^{-5}$
ε_4	$-0.824471 \cdot 10^{-6}$

и может быть сравнен с таблицей 1.

Из этого сравнения мы видим, что эффект нелинейного вхождения спектрального параметра μ в потенциал приводит к 2% изменению положений первых четырех уровней энергии в нерелятивистских уравнениях.

Аналогичное сравнение между собой таблиц 2 и 3 показывает, что при переходе к релятивистским уравнениям эффект нелинейности несколько усиливается, что приводит к приблизительно 3% изменению значений первых четырех уровней энергии.

При сравнении таблиц 1 и 3, а также 2 и 4 можно оценить влияние релятивистских эффектов, которое в случае линейной задачи приводит к 3% смещению уровней, а в случае нелинейного вхождения спектрального параметра μ в потенциал, изменяет положение уровней энергии на 4%.

Отметим, что, как это видно из таблицы I, такое весьма заметное изменение I-го и вышележащих уровней энергии происходит в пределах той точности, которая использовалась в программе. При этом важно подчеркнуть, что эффект нелинейного вхождения спектрального параметра в ядро проявляется даже на фоне стоящего перед ядром v_1 фактора

$$\frac{\Delta}{\mathcal{E}} \approx \frac{1}{430}.$$

Заключение

Итак, в настоящей работе нами с использованием нового метода решения нелинейной спектральной задачи для интегральных уравнений произведен расчет уровней энергии связанной электродинамической системы двух частиц. Из этого расчета видно, что при переходе от двухчастичного уравнения Шредингера для кулоновского потенциала к релятивистскому уравнению с зависящим от энергии потенциалом, уровни энергии сдвигаются в сторону нуля и проявляется некоторая тенденция к их сгущению. Причем, влияние эффектов, вызванных нелинейным вхождением спектрального параметра в потенциал взаимодействия, хотя и слабее влияния релятивистских эффектов, но все-таки достаточно существенно.

Теперь о расчетах в области положительных значений энергии связи. Выполненное исследование спектра энергии в этой области с помощью уравнения (I) с элементами (4a)-(4b) показало в принципе наличие тех же самых уровней, что и в работах [7-9] для того же уравнения. Однако, как показали наши вычисления, тот факт, что почти такие же уровни получаются при исследовании уравнения и с кулоновским потенциалом (3б) и с потенциалами $V_4(x, y; \mu=0)$, $V_4(x, y; \mu=2)$, свидетельствует о том, что их природа не связана с нелинейным вхождением параметра μ в ядро взаимодействия, как это полагали авторы работ [7-9].

По нашему мнению, необходима дальнейшая работа по исследованию этих особенностей в спектре в области положительных энергий, которая позволит установить их истинную физическую природу.

Литература

1. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, РИИ-84-740, Дубна, 1984.
2. Сидоров А.В., Скачков Н.Б. ОИЯИ, Р2-84-502, Дубна, 1984.
3. Жидков Е.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, РИИ-85-465, Дубна, 1985.
4. Жидков Е.П., Сидоров А.В., Скачков Н.Б., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, РИИ-87-261, Дубна, 1987.
5. Жидков Е.П., Никонов Э.Г., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, РИИ-87-375, Дубна, 1987.
6. Капшай В.Н., Саврин В.И., Скачков Н.Б. ТМФ, 69(1986), №3, 400.
7. Арбузов Б.А., Боос Э.Э., Саврин В.И., Шичанин С.А. Препринт НИИЯФ МГУ, 89-1/78, МГУ, Москва, 1989.
8. Arbuzov B.A., Boos E.E., Savrin V.I. and S.A. Shichanin, In: Problems on High Energy Physics and Field Theory (Nauka, 1989), pp. 362-374.
9. Arbuzov B.A., Boos E.E., Savrin V.I. and Shichanin S.A., Pisma JETP 50(1989) 236; Phys. Lett. A. 5(1990), 1441.
10. Cowan T. et al., Phys. Rev. Lett. 56(1986) 446; Bokemeyer H. et al., preprint GSI - 89 - 49, 1989.
11. Tsertos H. et al., Z. Phys. A, 326(1987), 2235; Koenig W. et al., Phys. Lett. B, 218(1989), 12.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 марта 1992 года.