СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р11 - 9108

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ($\nu_x = \frac{2}{3}$) ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

1975

Р11 - 9108

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО РЕЗОНАНСА ($\nu_x = \frac{2}{3}$) ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА МЕТОДОМ КРЫЛОВА-БОГОЛЮБОВА ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Система медленного вывода первичного пучка из синхрофазотрона ОИЯИ основана на использовании свойств резонанса радиальных бетатронных колебаний $\nu_x = \frac{2}{3}$.

В работах [I-3] расчет приближенных значений параметров выводной системы производился как численными, так и аналитическими методами. В этих работах при $n_0 = const$ (см.ниже) исходное уравнение исследуется в первом приближении метода Крылова-Боголюбова [4]. В данном сообщении при $n_0 = const$ исследование резонанса $\nu_x = \frac{2}{3}$ проведено во втором приближении и при $n_0 \neq const$ в первом приближении метода Крылова-Боголюбова.

При анализе резонанаса $\nu_x = \frac{2}{3}$ движение частиц рассматриваем в медианной плоскости $(z = 0)$. Тогда уравнение бетатронных колебаний можно записать в виде

$$x'' + (1 - n_0)x = \varepsilon\left[W_1 x^2 + \frac{1}{2}(x')^2\right] + \varepsilon^2 W_2 x^3, \qquad (I)$$

где

$$W_1 = \left(-1 + \frac{3}{2}n_0 - \frac{1}{2}n_0^2 + \frac{1}{2}R_0 \cdot n_1\right),$$

$$W_2 = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n_0 - \frac{1}{2}n_0^2 + \frac{1}{6}n_0^3 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}n_0\right)R_0 n_1 + \frac{1}{6}R_0^2 n_2\right], \qquad (2)$$

R_0 - радиус идеальной орбиты, $\varepsilon = \frac{1}{R_0}$ - малый параметр, штрих означает дифференцирование по θ ; n_0, n_1 и n_2 – связаны с показателем магнитного поля :

$$n(\theta,x)=n_0(\theta)+n_1(\theta)x+\frac{1}{2}n_2(\theta)x^2+\cdots \qquad (3)$$

В общем случае $n_i(\theta)$ (i = 0,1,2,...)-периодические функции и уравнение (I) является нелинейным дифференциальным уравнением с периодическими коэффициентами. Подобные уравнения непосредственно не решаются, поэтому исследование проводим методом Крылова-Боголюбова /4/.

I. Сначала решение уравнения (I) исследуем во втором приближении в окрестности резонанса $\nu_x=\frac{2}{3}+\delta$ при $\delta<<1$, $n_0=const$ и

$$\begin{aligned} n_1(\theta)&=n_{10}+\sum_{p=1}^{\infty}n_{1p}\sin p\theta,\\ n_2(\theta)&=n_{20}+\sum_{p=1}^{\infty}n_{2p}\sin p\theta. \end{aligned} \qquad (4)$$

Так как $(1-n_0)=\nu_x^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\delta$, $\delta<<1$, то можно положить

$$\nu_x^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\varepsilon\Delta\,, \qquad (5)$$

где Δ – представляет собой расстройку. После этого уравнение (I) примет вид

$$x''+\left(\frac{2}{3}\right)^2x=\varepsilon F_1+\varepsilon^2F_2\,, \qquad (6)$$

где

$$\begin{aligned} F_1&=w_1x^2+\frac{1}{2}(x')^2-\Delta\cdot x,\\ F_2&=w_2x^3. \end{aligned} \qquad (7)$$

Сделаем в (6) замену переменных:

$$\begin{aligned} x&=a_x\sin\left(\frac{2}{3}\theta+\Psi_x\right),\\ x'&=\frac{2}{3}a_x\cos\left(\frac{2}{3}\theta+\Psi_x\right). \end{aligned} \qquad (8)$$

В новых переменных имеем:

$$\begin{aligned} a_x'&=\frac{3}{2}\left[\varepsilon F_1+\varepsilon^2F_2\right]\cos\left(\frac{2}{3}\theta+\Psi_x\right),\\ \Psi_x'&=-\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{a_x}\left[\varepsilon F_1+\varepsilon^2F_2\right]\sin\left(\frac{2}{3}\theta+\Psi_x\right). \end{aligned} \qquad (9)$$

Дифференциальные уравнения, приведенные к виду (9), называют уравнениями в стандартной форме. Усредним систему (9) по методу Крылова-Боголюбова /4/. Усреднение ведется по θ . Во втором приближении асимпотическое решение уравнения (9) ищут в виде

$$\begin{aligned} a_x&=\xi_1+\varepsilon\left[\frac{3}{2}F_1(\xi_1,\xi_2)\right],\\ \Psi_x&=\xi_2+\varepsilon\left[-\frac{3}{2}\frac{1}{\xi_1}F_1(\xi_1,\xi_2)\right], \end{aligned} \qquad (10)$$

где ξ_1 и ξ_2 – удовлетворяют системе уравнений:

$$\begin{aligned} \xi_1'&=\alpha\xi_1^2\sin3\xi_2\,,\\ \xi_2'&=\gamma+\alpha\xi_1\cos3\xi_2+\beta\xi_1^2. \end{aligned} \qquad (11)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \alpha&=\varepsilon\left[\frac{3}{16}-\left(\frac{9}{16}\right)^2\varepsilon\cdot\Delta\right]\frac{1}{2}R_0n_{12}\,,\\ \gamma&=\frac{3}{4}\varepsilon\cdot\Delta-\frac{27}{64}(\varepsilon\cdot\Delta)^2,\\ \beta&=c_1-\frac{3}{16}\left[3c_2+(n_0-1)\frac{4}{9}\right],\\ c_1&=\left(\frac{3}{16}\right)^2\Bigg\{-\left[3\left(6c_3+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)\left(2c_3+\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)+\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2-2c_3\right)\right]+\\ &+\frac{7}{4}\cdot\frac{1}{2}R_0n_{12}+\sum_{\substack{p=1\\p\neq2}}^{\infty}\left(\frac{1}{2}R_0n_{1p}\right)^2\left[\frac{6}{p-\frac{2}{3}}-\frac{6}{p+\frac{2}{3}}-\frac{2}{p+2}+\frac{2}{p-2}\right]\Bigg\}, \end{aligned} \qquad (12)$$

$$C_2 = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{3}n_0-\frac{1}{2}n_0^2+\frac{1}{6}n_0^3+\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}n_0\right)R_0 n_{10} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{6}R_0^2 n_{20}\right],$$

$$C_3 = \left[-1+\frac{3}{2}n_0-\frac{1}{2}n_0^2+\frac{1}{2}R_0 n_{10}\right].$$

Уравнения (II) являются усредненными уравнениями во втором приближении. Если в этой системе положить $\beta = 0$, $\alpha=\frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}R_0 n_{12}$, $\gamma = \frac{3}{16}\cdot\frac{1}{2}R_0 n_{12}$, $\alpha_x=\xi_1$ и $\Psi_x=\xi_2$, то получаем систему уравнений в первом приближении, которые совпадают с уравнениями, полученными в работе /2/. Кроме этого, в работе /2/ в первом приближении была получена система уравнений типа (II). Такое совпадение внешнего вида систем уравнений получилось из-за того, что в работе /2/ в исходной системе (I) малый параметр ε^2 заменяется на ε. Поэтому коэффициенты α, β, γ не совпадают.

Из системы уравнений (II) получаем:

$$\cos 3\xi_2 = -3\left[\frac{\gamma}{2\alpha}\frac{1}{\xi_1}+\frac{\beta}{4\alpha}\xi_1\right]+c\,\xi_1^{-3}. \qquad (I3)$$

Это первый интеграл для этой системы, и C определяется из начальных условий. Пользуясь интегралом движения (I3), можно провести полное исследование системы укороченных уравнений (II), т.е. найти решения этой системы через эллиптические функции, определить пределы изменения амплитуды вблизи резонанса. Для такого исследования удобно снова, так же как в работах /6-7/, перейти к новым переменным

$$\begin{aligned} V &= \xi_1 \sin\xi_2, \\ U &= \xi_1 \cos\xi_2. \end{aligned} \qquad (I4)$$

В новых переменных уравнения (II) и (I3) переходят соответственно в:

$$\begin{aligned} V' &= \gamma U+\alpha(U^2-V^2)+\beta U(V^2+U^2), \\ U' &= -\gamma V+2\alpha UV-\beta V(V^2+U^2) \end{aligned} \qquad (I5)$$

и

$$4U^3-3U(U^2+V^2) = -\frac{3}{2}\cdot\frac{\gamma}{\alpha}(U^2+V^2)-\frac{3}{4}\frac{\beta}{\alpha}(U^2+V^2)^2+c. \qquad (I6)$$

Из интеграла движения (I6) следует, что на фазовой плоскости (V,U) нет предельных циклов.

Система (I5) имеет следующие особые точки:

$$\left.\begin{aligned} &A_1(V_1,U_1);\quad A_2(V_1,U_2);\quad A_3(V_1,U_3); \\ &A_4(V_2,U_4);\quad A_5(V_3,U_4);\quad A_6(V_4,U_5);\quad A_7(V_5,U_5), \end{aligned}\right\} \qquad (I7)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &V_1=0;\quad U_1=0;\quad U_2=\frac{1}{2\beta}\left[-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}\right]; \\ &U_3=\frac{1}{2\beta}\left[-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}\right];\quad V_2=\sqrt{\frac{3(2\alpha U_4-\gamma)}{4\beta}}; \\ &U_4=\frac{1}{4\beta}\left[\alpha+\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}\right];\quad V_3=-V_2; \\ &V_4=\sqrt{\frac{3(2\alpha U_5-\gamma)}{4\beta}};\quad U_5=\frac{1}{4\beta}\left[\alpha-\sqrt{\alpha^2-4\beta\gamma}\right]; \\ &V_5=-V_4. \end{aligned}\right\} \qquad (I8)$$

Непосредственная проверка показывает, что особые точки A_I, A_2, A_6, A_7 – особые точки типа центр или фокус. Проблема центр-фокус в нашем случае разрешается таким же образом, как это делалось в работах /6,7/, и особые точки A_I, A_2, A_6, A_7 являются центрами. Особые точки A_3, A_4 и A_5 – сёдла. Зная эти особые точки и используя интеграл движения (I6), можно нарисовать траекторию на фазовой плоскости (V, U). Например, при $\alpha>0, \gamma<0$ и $\beta>0$ фазовая плоскость имеет вид, показанный на рис.I.

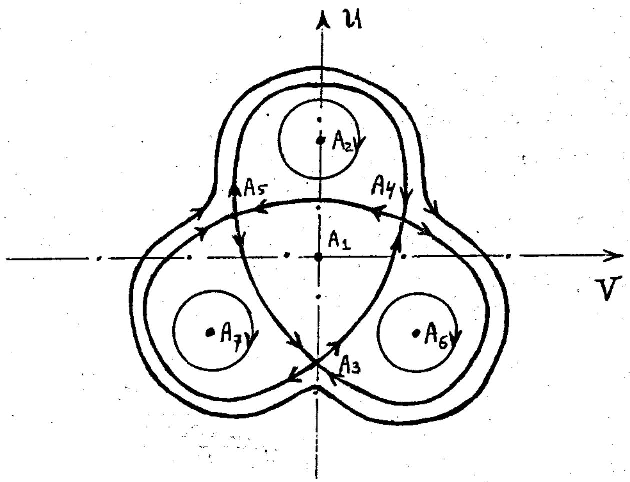

Рис.I

2. Теперь перейдем к исследованию уравнения (I) в общем случае, когда $n_o(\theta)$ является периодической функцией от θ. Тогда однородное уравнение, которое получается из (I) при $\varepsilon=0$

$$x''+\left(1-n_o(\theta)\right)x=0 \tag{I9}$$

есть уравнение типа Хилла. Общее решение (I9) можно представить в виде /5/

$$x=a_x f_x(\theta)e^{i\nu_x\theta}+a_x^* f_x^*(\theta)e^{-i\nu_x\theta}, \tag{20}$$

где $f_x(\theta)$ – периодическая комплексная функция от θ (функция Флоке), a_x – произвольные комплексные постоянные, ν_x – частота бетатронных колебаний.

Пусть теперь условие (5) выполняется. Точно в резонансе, когда $\delta=0$ (или $\Delta=0$), положим $n_o(\theta)=n_{oo}(\theta)$. Тогда при $\delta\neq 0$ (или $\Delta\neq 0$) с точностью до ε имеем:

$$n_o(\theta)=n_{oo}(\theta)+\varepsilon\cdot\Delta\cdot g(\theta), \tag{2I}$$

где

$$g(\theta)=2i\left\{\frac{a_x\left[f_x'+i\nu_x f_x\right]e^{i\nu_x\theta}-a_x^*\left[f_x^{*\prime}-i\nu_x f_x^*\right]e^{-i\nu_x\theta}}{a_x f_x e^{i\nu_x\theta}+a_x^* f_x^* e^{-i\nu_x\theta}}\right\}. \tag{22}$$

Нетрудно убедиться, что $g(\theta)$ является действительной функцией.

Учитывая (2I), уравнение (I) перепишем в виде:

$$x''+\left(1-n_{oo}(\theta)\right)x=\varepsilon F_1+\varepsilon F_2, \tag{23}$$

где

$$
\left.\begin{aligned}
F_1 &= W_1 x^2 + \frac{1}{2}(x')^2 - \Delta g(\theta)x \,, \\
F_2 &= W_2 x^3 .
\end{aligned}\right\} \tag{24}
$$

Сделаем в (23) замену переменных

$$
\begin{aligned}
x &= a_x f_x(\theta)\, e^{i\nu_x\theta} + a_x^* f_x^* e^{-i\nu_x\theta} \,, \\
x' &= a_x\left(f_x'(\theta) + i\nu_x f_x(\theta)\right) e^{i\nu_x\theta} + a_x^*\left(f_x^{*\prime}(\theta) - i\nu_x f_x^*(\theta)\right) e^{-i\nu_x\theta} .
\end{aligned} \tag{25}
$$

В новых переменных имеем:

$$
a_x' = -\frac{1}{2i} f_x^* e^{-i\nu_x\theta}\left[\varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2\right]. \tag{26}
$$

После усреднения в первом приближении получим

$$
a_x' = -\frac{1}{2i}\left[A a_x^{*2} + \Delta\tilde{g}\, a_x\right], \tag{27}
$$

где

$$
A = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \left[\left(f_x^*(\theta)\right)^3 W_1(\theta) - \frac{1}{2} f_x^*(\theta)\left(f_x^{*\prime}(\theta) - i\nu_x f_x^*(\theta)\right)^2\right] e^{-i2\theta},
$$

$$
\tilde{g} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f_x(\theta) f_x^*(\theta)\, g(\theta). \tag{28}
$$

В действительных переменных

$$
\begin{aligned}
a_x &= \bar{a}_x e^{i\psi_x} \,, \\
A &= \bar{A} e^{i\alpha}
\end{aligned} \tag{29}
$$

уравнение (27) примет вид

$$
\left.\begin{aligned}
\bar{a}_x' &= -\frac{1}{2}\bar{A}\,\bar{a}_x^2 \sin(\alpha - 3\psi_x) \,, \\
\psi_x' &= \frac{\Delta}{2}\tilde{g} + \frac{1}{2}\bar{A}\,\bar{a}_x \cos(\alpha - 3\psi_x) .
\end{aligned}\right\} \tag{30}
$$

Для последнего уравнения можно найти следующий интеграл движения:

$$
\cos(\alpha - 3\psi_x) = -\frac{3}{2}\frac{\Delta\tilde{g}}{A}\frac{1}{\bar{a}_x} + C\frac{1}{\bar{a}_x^3} \,, \tag{31}
$$

где C определяется из начальных условий.

Пользуясь интегралом движения (31), точно так же, как в предыдущем пункте, можно провести полное исследование системы укороченных уравнений (30).

Заключение

В укороченные уравнения в первом приближении, при $n_0 = const$, входит только один член (n_{11}) коэффициентов разложения (4). Характерная особенность укороченных уравнений во втором приближении или в первом приближении, но при $n_0 \neq const$, заключается в том, что параметры β (см.(12)) и A, g (см.(29)) уже зависят от всех коэффициентов разложения (4). Поэтому координаты особых точек итраектории в фазовой плоскости (V, U) зависят от этих коэффициентов. Подбирая специальным образом все коэффициенты разложения (4), можно лучше учесть влияние резонанса $\nu_x = \frac{2}{3}$ при выводе частиц из ускорителя.

Авторы выражают глубокую благодарность Е.М.Кулаковой, И.Б.Иссинскому за обсуждение некоторых затронутых здесь вопросов.

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова. ОИЯИ, Р9-6972, Дубна, 1973.

2. Б.В.Василишин, И.Б.Иссинский, В.А.Михайлов. ОИЯИ, 9-7498, Дубна, 1973.

3. M.Conte, JINR Preprint E9-6538, Dubna 1972;
JINR Preprint E9-4925, Dubna 1970 .

4. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний . Наука, М., 1974.

5. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей . Физматгиз, М., 1962.

6. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков, И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова. ОИЯИ, 9-8663, Дубна, 1975.

7. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков. ОИЯИ, Р11--8780, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1975 г.