СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

P11 - 9107

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА $2\nu_z - \nu_x = 1$ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ

1975

P11 - 9107

И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСА $2\nu_z - \nu_x = 1$ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ

Основу теории бетатронных колебаний в циклических ускорителях составляет исследование системы нелинейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами /I/. В работах /2,3/ было проведено изучение резонанса третьего порядка $2\nu_z - \nu_x = 1$ при $n_0 = const$ (n_0 - см. ниже). В данной работе этот резонанс исследуется при $n_0(\theta)$ - периодическая функция θ. В этом случае даже в линейном приближении получается уравнение второго порядка с периодическими коэффициентами (уравнение типа Хилла) и нахождение области устойчивых решений представляется трудоемкой задачей. А при учете нелинейных членов задача сильно усложняется и достаточно общей теории подобных уравнений не существует. Можно воспользоваться методом усреднений /4/ и получить укороченные уравнения, которые либо просто интегрируются, либо позволяют исследовать движение на фазовой плоскости.

В дальнейшем мы будем исследовать следующую систему нелинейных уравнений/2/:

$$
\begin{aligned}
x'' + \left(1 - n_0(\theta)\right)x &= \varepsilon F_x , \\
z'' + n_0(\theta) z &= \varepsilon F_z ,
\end{aligned}
\tag{I}
$$

где $\varepsilon = \frac{1}{R_0}$ – малый параметр, R_0 – радиус идеальной орбиты,

$$
\begin{aligned}
F_x &= W_x x^2 + W_z z^2 + \tfrac{1}{2}(x')^2 + \tfrac{1}{2}(z')^2, \\
F_z &= W_{xz}\, x z, \\
W_x &= \left(-1 + \tfrac{3}{2} n_0 - \tfrac{1}{2} n_0^2 + \tfrac{1}{2} R_0 n_1\right), \\
W_z &= \left(\tfrac{1}{2} n_0^2 - \tfrac{1}{2} R_0 n_1\right), \\
W_{xz} &= \left(n_0^2 - n_0 - R_0 n_1\right),
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

$n_0(\theta)$ и $n_1(\theta)$ – периодические функции θ, которые связаны с показателем магнитного поля

$$n(\theta, x) = n_0(\theta) + n_1(\theta)x + \tfrac{1}{2} n_2(\theta) x^2 + \dots \qquad (3)$$

Решение уравнения (I) исследуем в окрестности резонанса $2\nu_z - \nu_x = 1 + \delta$, где $\delta << 1$. Это условие резонанса перепишем так:

$$(\nu_z)^2 = \left(\frac{1+\nu_x}{2}\right)^2 + \varepsilon\Delta, \qquad (4)$$

где Δ представляет собой расстройку, ν_x и ν_z – частоты бетатронных колебаний по степеням x и z. Точно в резонансе, когда $\delta = 0$ (или $\Delta = 0$), положим $n_0(\theta) = n_{00}(\theta)$. Тогда при $\delta \neq 0$ (или $\Delta \neq 0$) с точностью до ε имеем

$$n_0(\theta) = n_{00}(\theta) + \varepsilon \cdot \Delta \cdot g(\theta), \qquad (5)$$

$$g(\theta) = 2i\left\{\frac{a_z\left[f_z' + i\nu_z f_z\right] e^{i\nu_z\theta} - a_z^*\left[f_z^{*\prime} - i\nu_z f_z^*\right] e^{-i\nu_z\theta}}{a_z f_z e^{i\nu_z\theta} + a_z^* f_z^* e^{-i\nu_z\theta}}\right\}. \qquad (6)$$

Здесь $f_z(\theta)$ – периодическая комплексная функция θ (функция Флоке), которая связана с решениями уравнения

$$z'' + n_{00}(\theta) z = 0, \qquad (7)$$

a_z – произвольные комплексные постоянные, которые определяются из начальных условий. Нетрудно убедиться, что $g(\theta)$ является действительной функцией.

Учитывая (5), систему (I) перепишем в виде

$$
\begin{aligned}
x'' + (1 - n_{00})x &= \varepsilon \tilde{F}_x, \\
z'' + n_{00} z &= \varepsilon \tilde{F}_z,
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

где

$$
\begin{aligned}
\tilde{F}_x &= F_x - \Delta \cdot g(\theta), \\
\tilde{F}_z &= F_z - \Delta \cdot g(\theta).
\end{aligned}
\qquad (9)
$$

Сделаем в (8) замену переменных:

$$
\begin{aligned}
x &= a_x f_x(\theta) e^{i\nu_x\theta} + \text{к.с.}, \\
x' &= a_x (f_x' + i\nu_x f_x) e^{i\nu_x\theta} + \text{к.с.}, \\
z &= a_z f_z e^{i\nu_z\theta} + \text{к.с.}, \\
z' &= a_z (f_z' + i\nu_z f_z) e^{i\nu_z\theta} + \text{к.с.},
\end{aligned}
\qquad (10)
$$

где к.с. – комплексно-сопряженное выражение.

В новых переменных имеем:

$$
\begin{aligned}
a_x' &= -\frac{\varepsilon}{2i} f_x^* e^{-i\nu_x\theta} \tilde{F}_x, \\
a_z' &= -\frac{\varepsilon}{2i} f_z^* e^{-i\nu_z\theta} \tilde{F}_z.
\end{aligned}
\qquad (11)
$$

После усреденения в первом приближении получим

$$a_x' = -\frac{\varepsilon}{2i}\left[A_x \cdot a_z^2 + \Delta \cdot G_x \cdot a_x\right],$$
$$a_z' = -\frac{\varepsilon}{2i}\left[A_z \cdot a_z^* a_x + \Delta \cdot G_z \cdot a_z\right], \tag{12}$$

где

$$A_x = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \left[f_x^*(\theta) f_z^2(\theta) W_x(\theta) - \frac{1}{2} f_x^*(\theta)\left(f_z'(\theta) + i\nu_z f_z(\theta)\right)^2\right] e^{i\theta},$$
$$A_z = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta \left[f_z^*(\theta) f_z^*(\theta) \cdot f_x(\theta) W_{xz}(\theta)\right] e^{-i\theta}, \tag{13}$$
$$G_x = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f_x(\theta) \cdot f_x^*(\theta) g(\theta),$$
$$G_z = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} d\theta\, f_z(\theta) f_z^*(\theta) g(\theta).$$

Переходя к действительным переменным

$$a_x = \bar{a}_x e^{i\Psi_x}, \qquad a_z = \bar{a}_z e^{i\Psi_z},$$
$$A_x = \bar{A}_x e^{i\alpha}, \qquad A_z = \bar{A}_z e^{i\beta}, \tag{14}$$

из уравнения (I2) получим:

$$\bar{a}_x' = -\frac{\varepsilon}{2}\bar{A}_x \bar{a}_z^2 \sin(2\Psi_z - \Psi_x + \alpha),$$
$$\bar{a}_z' = +\frac{\varepsilon}{2}\bar{A}_z \bar{a}_x \bar{a}_z \sin(2\Psi_z - \Psi_x - \beta),$$
$$\Psi_x' = \varepsilon \cdot \Delta \cdot G_x + \frac{\varepsilon}{2}\bar{A}_x \frac{\bar{a}_z^2}{\bar{a}_x}\cos(2\Psi_z - \Psi_x + \alpha), \tag{15}$$
$$\Psi_z' = \varepsilon \cdot \Delta \cdot G_z + \frac{\varepsilon}{2}\bar{A}_z \bar{a}_x \cos(2\Psi_z - \Psi_x - \beta).$$

Вводя обозначения $\Phi = 2\Psi_z - \Psi_x$, систему (I5) перепишем в следующем виде:

$$\bar{a}_x' = -\frac{\varepsilon}{2}\bar{A}_x \bar{a}_z^2 \sin(\Phi + \alpha),$$
$$\bar{a}_z' = \frac{\varepsilon}{2}\bar{A}_z \bar{a}_x \bar{a}_z \sin(\Phi - \beta), \tag{16}$$
$$\Phi' = \varepsilon\left\{\Delta(2G_z - G_x) + \frac{1}{2}\left[2\bar{A}_z \bar{a}_x \cos(\Phi - \beta) - \bar{A}_x \frac{\bar{a}_z^2}{\bar{a}_x}\cos(\Phi + \alpha)\right]\right\}.$$

Если к системе (I6) присоединить третье или четвертое уравнение системы (I5), то системы (I5) и (I6) будут эквивалентны.

Так как $n_0(\theta)$ и $n_1(\theta)$ – периодические функции θ, то справедливо следующее разложение:

$$n_0(\theta) = b_{00} + \sum_{p=1}^{\infty}\left(b_{0p}^{(1)}\sin(p\theta) + b_{0p}^{(2)}\cos(p\theta)\right), \tag{17}$$
$$n_1(\theta) = b_{10} + \sum_{p=1}^{\infty}\left(b_{1p}^{(1)}\sin(p\theta) + b_{1p}^{(2)}\cos(p\theta)\right).$$

Тогда постоянные $\bar{A}_x$, $\bar{A}_z$, α, β, G_x и G_z зависят от коэффициентов разложения (I7).

При $n_0 = const$ из укороченных уравнений типа (I6) можно получить интеграл движения /2/:

$$4\nu_x a_x^2 + (1+\nu_x) a_z^2 = const, \tag{18}$$

из которого следует ограниченность a_x и a_z. Причем этот интеграл не зависит от коэффициентов разложения (I7), т.е. $n_1(\theta)$ – произвольная периодическая функция. Из системы уравнений (I6) в общем виде непосредственно не удалось получить аналог интеграла движения (I8). Поэтому ниже мы обсудим два частных случая, когда удается получить интегралы движения.

Пусть выполняются условия

$$\alpha + \beta = 0\,, \qquad \mathrm{I}$$
$$\alpha + \beta = \pi\,. \qquad \mathrm{II} \tag{I9}$$

Тогда из (I6) получим следующие интегралы движения:

$$\bar{A}_z \bar{a}_x^2 + \bar{A}_x \bar{a}_z^2 = const = c_1\,, \qquad \mathrm{I}$$
$$\bar{A}_z \bar{a}_x^2 - \bar{A}_x \bar{a}_z^2 = const = c_2\,. \qquad \mathrm{II} \tag{20}$$

Интеграл (I) соответствует случаю, когда $\bar{a}_x$ и $\bar{a}_z$ остаются ограниченными, а интеграл (II) соответствует случаю, когда $\bar{a}_x$ и $\bar{a}_z$ могут неограниченно расти. Поэтому если выполняется условие (II), то резонанс $2\nu_z - \nu_x = 1$ будет опасным.

Условия (I) и (II) накладывают определенные ограничения на коэффициенты разложения (I7). Чтобы получить в явном виде эти ограничения, A_x и A_z представим в следующем виде:

$$A_x = A_{x1} + i A_{x2}\,,$$
$$A_z = A_{z1} + i A_{z2}\,, \tag{2I}$$

где

$$A_{x1} = A_{x10} + b_{10} Q_{x10} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[b_{1p}^{(1)} Q_{x1p}^{(1)} + b_{1p}^{(2)} Q_{x1p}^{(2)} \right],$$
$$A_{x2} = A_{x20} + b_{10} Q_{x20} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[b_{1p}^{(1)} Q_{x2p}^{(1)} + b_{1p}^{(2)} Q_{x2p}^{(2)} \right], \tag{22}$$

$$A_{z1} = A_{z10} + b_{10} Q_{z10} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[b_{1p}^{(1)} Q_{z1p}^{(1)} + b_{1p}^{(2)} Q_{z1p}^{(2)} \right],$$
$$A_{z2} = A_{z20} + b_{10} Q_{z20} + \sum_{p=1}^{\infty} \left[b_{1p}^{(1)} Q_{z2p}^{(1)} + b_{1p}^{(2)} Q_{z2p}^{(2)} \right]. \tag{22}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$F_1(\theta) = \frac{1}{\pi} f_x^*(\theta) f_z^2(\theta) e^{i\theta} = F_{11} + i F_{12}\,,$$
$$F_2(\theta) = -\frac{1}{2\pi} f_x^*(\theta) \left(f_z'(\theta) + i \nu_z f_z(\theta) \right)^2 e^{i\theta} = F_{21} + F_{22}\,,$$
$$A_{x10} = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{2} n_0^2 F_{11} + F_{21} \right),$$
$$A_{x20} = \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{2} n_0^2 F_{12} + F_{22} \right),$$
$$A_{z10} = \int_0^{2\pi} d\theta \, (n_0^2 - n_0) F_{21}\,,$$
$$A_{z20} = -\int_0^{2\pi} d\theta \, (n_0^2 - n_0) F_{22}\,,$$
$$Q_{x10} = -\frac{R_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{11}\,, \quad Q_{x20} = -\frac{R_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{12}\,,$$
$$Q_{z10} = -R_0 \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{21}\,, \quad Q_{z20} = R_0 \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{22}\,,$$
$$Q_{x1p}^{(1)} = -\frac{R_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{11} \sin(p\theta), \quad Q_{x1p}^{(2)} = -\frac{R_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{11} \cos(p\theta),$$
$$Q_{x2p}^{(1)} = -\frac{R_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{12} \sin(p\theta), \quad Q_{x2p}^{(2)} = -\frac{R_0}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{12} \cos(p\theta),$$
$$Q_{z1p}^{(1)} = -R_0 \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{21} \sin(p\theta), \quad Q_{z1p}^{(2)} = -R_0 \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{21} \cos(p\theta),$$
$$Q_{z2p}^{(1)} = R_0 \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{22} \sin(p\theta), \quad Q_{z2p}^{(2)} = R_0 \int_0^{2\pi} d\theta \, F_{22} \cos(p\theta). \tag{23}$$

Так как

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{A_{x2}}{A_{x1}}, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{A_{z2}}{A_{z1}}, \tag{24}$$

то для выполнения условий (I) и (II) необходимо, например, наложить следующие ограничения на коэффициенты разложения (I7):

$$A_{x2}=0, \quad A_{x1}\neq 0, \quad A_{z2}=0, \quad A_{z1}\neq 0: \text{(I)} \tag{25}$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{x2}\neq 0 \ \text{и} \ A_{x2}>0, \quad A_{x1}=0 \ \text{или} \ A_{x1}\approx\varepsilon, \\ &A_{z2}\neq 0 \ \text{и} \ A_{z2}<0, \quad A_{z1}=0 \ \text{или} \ A_{z1}\approx\varepsilon. \end{aligned}\right\} \text{(II)} \tag{26}$$

Подставляя (22) в (25) и (26), можно получить систему алгебраических уравнений на коэффициенты разложения (I7). Так как это система четырех уравнений с бесконечным числом неизвестных, то она имеет всегда решение. Заметим, что условия I и II достаточно удовлетворить с точностью до ε.

Таким образом, если выполняются условия (I) или (II), то, пользуясь интегралом движения (20), точно так же, как в работах /2-3/, можно от системы (I6) перейти к системе двух уравнений. Затем провести полное исследование этой системы в фазовой плоскости.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В укороченные уравнения /2-3/ при $n_0=const$ входит только один коэффициент (n_{11}) разложения (I7). Характерная особенность укороченных уравнений при $n_0\neq const$ заключается в том, что $\bar{A}_x$, $\bar{A}_z$, α и β уже зависят от всех коэффициентов разложения (I7). Поэтому, подбирая эти коэффициенты специальным образом, можно добиться выполнения или условия (I), или условия (II). От этого, в

свою очередь, зависит устойчивость движения в окрестности резонанса $2\nu_z-\nu_x=1$. Если выполняется условие (25), то движение устойчиво, если выполняется условие (26), то движение может быть и неустойчивым.

Авторы выражают глубокую благодарность Е.М.Кулаковой, И.Б.Иссинскому за обсуждение некоторых затронутых здесь вопросов.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.А.Коломенский, А.Н.Лебедев. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
2. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков, И.Б.Иссинский, Е.М.Кулакова. ОИЯИ, 9-8663, Дубна, 1975.
3. И.В.Амирханов, В.К.Василев, Е.П.Жидков. ОИЯИ, Р11-8780, Дубна, 1975.
4. Н.Н.Боголюбов, Ю.А.Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, М., 1974.

Рукопись поступила в издательский отдел
5 августа 1975 г.