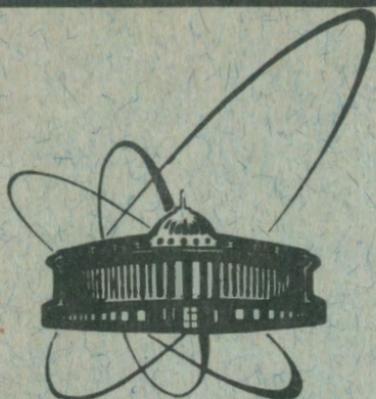


91-68



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

P11-91-68

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.В.Ильин<sup>1</sup>,  
В.Д.Ильин<sup>2</sup>

ОЦЕНКА ЭФФЕКТА НАКОПЛЕНИЯ  
ВЫСОКОЭНЕРГИЧНЫХ ПРОТОНОВ  
В ГЕОМАГНИТНОМ ДИПОЛЬНОМ ПОЛЕ  
МЕТОДОМ ОТОБРАЖЕНИЙ

---

<sup>1</sup>Филиал ИАЭ им.И.В.Курчатова, Троицк, Московская область

<sup>2</sup>Научно-исследовательский институт ядерной физики МГУ, Москва

1991

## ВВЕДЕНИЕ

Рассматриваемая задача относится к проблеме динамического хаоса гамильтоновых систем. В нашем случае такой системой является "частица — магнитное поле". Более конкретно речь пойдет о движении частицы в дипольной ловушке. Гамильтониан этой системы, строго говоря, не интегрируем и поэтому возможно появление хаоса, т.е. нерегулярности движения. Интерес к такому явлению, как детерминированный хаос в магнитных ловушках, вызван тем, что это явление может быть основной причиной, определяющей время удержания плазмы. Особое внимание заслуживают ловушки дипольного поля, поскольку в этом случае решение задач имеет практический выход на космическую физику. В частности, это относится к динамике заряженных частиц в магнитосфере (радиационных поясах) Земли.

При рассмотрении особенностей поведения заряженных частиц в магнитной ловушке в условиях динамического хаоса наиболее полезным является метод отображений<sup>1</sup>. Численные эксперименты с отображением оказываются близкими к "настоящим" экспериментам в том смысле, что они улавливают основные свойства исходной физической модели. Следует отметить одну особенность такого подхода. Она заключается в том, что исходная система может быть полностью интегрируема, а дискретный аналог уравнения движения имеет, тем не менее, области стохастичности<sup>2</sup>. Вопрос обоснования адекватности дискретизации дифференциальных уравнений обсуждается во многих работах (см., например,<sup>3</sup>).

Метод отображений позволяет делать долгосрочные прогнозы на время  $\sim 10^6$  периодов продольных колебаний частиц. На основе численных экспериментов с отображением можно перейти (с некоторыми издержками) к аналитическому описанию эволюции частиц<sup>1</sup>. Правда, преимущества аналитического описания не всегда очевидны. Дело в том, что эмпирический коэффициент диффузии имеет довольно сложный вид и поэтому обычно при нахождении выражений для потоков частиц, времени их жизни через диффузионное уравнение приходится прибегать к дополнительным упрощениям.

В настоящей работе приводятся некоторые результаты компьютерных экспериментов по изучению динамики высокоэнергетических прото-

нов в геомагнитной дипольной ловушке в условиях стохастической неустойчивости движения. Разработан и реализован на ЭВМ CDC-6500 алгоритм для расчета времени удержания и эффекта накопления протонов альbedo. Под протонами альbedo подразумеваются протоны, инжектированные на малых высотах от поверхности Земли. Физически инжекция может осуществляться за счет распада нейтронов альbedo космических лучей<sup>4'</sup>.

## ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

Характер движения частиц в ловушке, эффективность их удержания зависят от точности сохранения первого адиабатического инварианта (магнитного момента частицы  $\mu = mv_{\perp}^2/2B$ , где  $v_{\perp}$  — поперечная по отношению к магнитному полю  $B$  компонента скорости). Изменение  $\mu$  (разрушение инварианта) вызывается резонансным взаимодействием ларморовского вращения частицы (поперечных колебаний) с ее продольными колебаниями между точками отражений. Существует два способа исследования этого процесса. Тот способ, который мы используем, основан на интегрировании уравнений движения и вычислении приращения  $\Delta\mu$  за полупериод продольных колебаний<sup>11'</sup>. При этом результаты вычислений интерпретируются, исходя из представления о "скачках"  $\Delta\mu$  при прохождении медианной (экваториальной) плоскости<sup>15'</sup>. Квазипериодические колебания  $\mu$  при таком подходе из рассмотрения, естественно, выпадают. Другой способ основан на гамильтоновом формализме<sup>16'</sup>.

Для полного описания движения в переменных  $\mu$  — угол  $\theta$  необходимо выяснить вопрос об эволюции  $\Delta\mu$  и  $\Delta\theta$  при многократных продольных колебаниях частицы. Этот вопрос решается с помощью отображения Пуанкаре в переменных  $\mu$  и ларморовской фазы  $\theta$ <sup>15'</sup>:

$$\begin{aligned}\mu_{n+1} &= \mu_n + (\Delta\mu)_m \sin\theta_n, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + \Delta\theta(\mu_{n+1}),\end{aligned}\tag{1}$$

где  $\mu_n$ ,  $\theta_n$  — динамические переменные при  $n$ -м пересечении медианной плоскости,

$$(\Delta\mu)_m = 0,74\mu_n \frac{14 - \sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} \exp\left[-\frac{3\psi(\alpha)}{\chi}\right],$$

$$\psi(\alpha) = \frac{1}{3\sqrt{2}\sin^2\alpha} \left( \frac{1 + \sin^2\alpha}{\sin\alpha} \ln \frac{1 + \sin\alpha}{\cos\alpha} - 1 \right), \quad (2)$$

$$\chi = 5 \cdot 10^{-5} L^2 \text{ pc}, \text{ pc} [M \text{ в}], \Delta\theta(\mu) = \frac{\pi\bar{\omega}}{\Omega} = \frac{4,44}{\chi \sin^{1,55}\alpha}.$$

Здесь  $p$  — импульс частицы,  $L$  — экваториальное расстояние от центра диполя до ведущей силовой линии в радиусах Земли,  $\chi$  — параметр адиабатичности,  $\alpha$  — угол между вектором скорости и полем на экваторе,  $\bar{\omega}$  — ларморовская частота, усредненная по продольному колебанию,  $\Omega$  — частота продольных осцилляций. Выражение для  $(\Delta\mu)_m$  взято из<sup>7/</sup>, величина  $\bar{\omega}$  описана в<sup>8/</sup>.

Используя условие резонанса  $\bar{\omega} = 2\pi\Omega$  ( $\pi$  — любое целое число) и вводя новую переменную  $\Delta\theta(\mu) = \Delta\theta(\mu_r) + \left(\frac{\partial}{\partial\mu} \Delta\theta\right)_{\mu_r} (\mu - \mu_r) \equiv \Delta\theta(\mu_r) + I$ , получаем сохраняющее фазовые площади стандартное отображение (отображение Чирикова)<sup>9/</sup>:

$$I_{n+1} = I_n + K \sin\theta_n, \quad (3)$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + I_{n+1},$$

где  $K$  — единственный параметр, отражающий специфику исследуемой системы. Для дипольного поля он записывается в виде<sup>8/</sup>:

$$K = \frac{0,56}{\chi} \frac{14 - \sin^2\alpha}{\cos\alpha} \frac{1 + 1,44 \sin\alpha}{\sin^3\alpha} \exp\left[-\frac{3\psi}{\chi}\right]. \quad (4)$$

Отображению (3) соответствует гамильтониан

$$H(I, \theta, t) = \frac{I^2}{2} K \cos\theta \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - n), \quad (5)$$

где  $\delta(t)$  — дельта-функция Дирака. Система с гамильтонианом (5) может быть представлена как плоский ротатор, возбуждаемый периодическими толчками с периодом, равным единице. Модель (5) называется стандартным ротатором с толчками и детально изучена в<sup>9/</sup>. Здесь мы лишь кратко отметим некоторые общие положения, вытекающие из численных экспериментов<sup>9/</sup>.

Примеры фазовых портретов отображения (3) для разных  $K$  приведены на рис.1. Особыми (неподвижными) точками системы являются  $X_1 = (2\pi m, 0)$ ,  $X_2 = (2\pi m, \pi)$  ( $m = 0, 1, 2, \dots$ ). Точка  $(I = 0, \theta = \pi)$  является устойчивой (эллиптической) особой точкой при  $K < 4$ . Неустойчивой (ги-

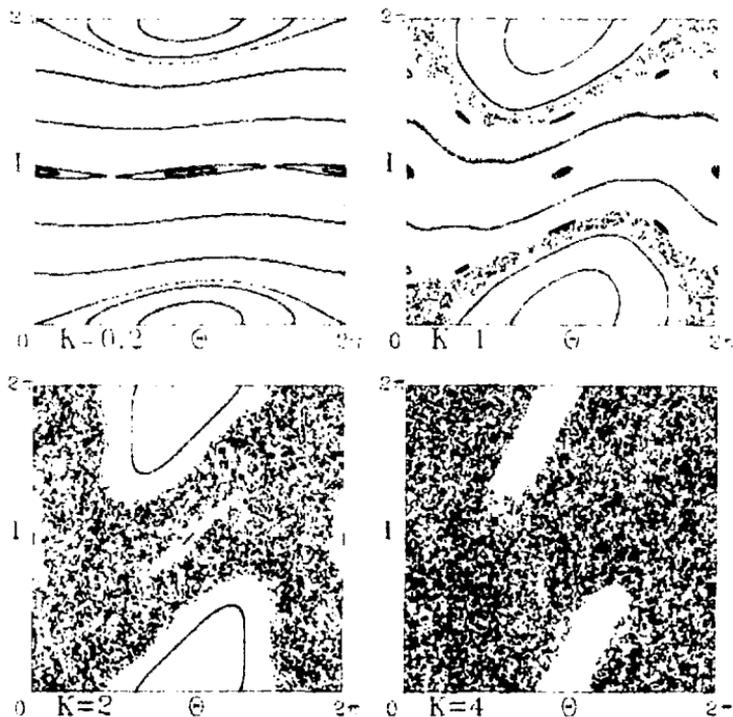


Рис.1. Фазовый портрет отображения Чирикова для десяти начальных условий в зависимости от  $K$ . На одно начальное условие число итераций  $n = 1200$ .

первообразной) особой точкой является точка  $(I = 0, \theta = 0)$ . При  $K = 4$  все неподвижные точки становятся неустойчивыми. Кроме этих точек, имеются периодические точки, разделяющиеся на первичные (существующие и при сколь угодно малом  $K$ ) и бифуркационные, имеющие порог возникновения  $K = 4$ .

В нулевом приближении, когда в частотном спектре возмущения отбрасываются все гармоники, кроме постоянной во времени, гамильтониан (5) принимает вид

$$H_0 = \frac{I^2}{2} + K \cos \theta. \quad (6)$$

Отсюда следует нулевое приближение для уравнения сепаратрисы:

$$I_{s_0} = 2\sqrt{K} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (7)$$

Сепаратриса (7) главного резонанса стандартного отображения (3) в несколько деформированном виде отчетливо просматривается на рис.1. Деформация растет с увеличением  $K$  и связана с возрастающей ролью остальных гармоник в выражении (5). Формула для сепаратрисы во втором приближении, согласно [10], имеет вид

$$I_{s_2} = a_1 \sin \frac{\theta}{2} + a_2 \sin \theta + a_3 \sin \frac{3\theta}{2}, \quad (8)$$

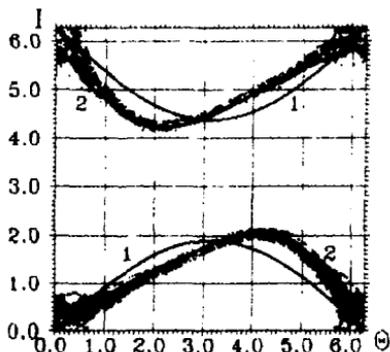
где

$$a_1 = \frac{9}{8} b - \frac{1}{2} c; \quad a_2 = -\frac{1}{2} K; \quad a_3 = -\frac{1}{24} b \cdot \frac{1}{6} c;$$

$$b = (4K \cdot K^2)^{1/2}; \quad c = K + \frac{32K}{(2 + K + b)^4 - 16}.$$

Результаты вычисления главного резонанса отображения (3) с учетом формулы (8) представлены на рис.2. В окрестности сепаратрисы гамильтониана (5) виден стохастический слой (хаотическая компонента движения), который существует при любом  $K \neq 0$ . При малых значениях  $K$ , когда стохастические слои узкие и отделены друг от друга, движение частицы можно описывать в рамках адиабатической теории, полагая  $\mu = \text{const}$  [4]. С ростом  $K$  стохастические слои разных резонансов уширяются и при некотором критическом значении  $K_{кр}$  происходит их слияние. В итоге образуется стохастическое море. В этом случае возникает неограниченная детерминированная диффузия по  $I$ . При этом диффузия носит неравномерный характер. Вблизи резонансных островков устойчивости она замедляется. Здесь стохастическая траектория надолго "застревает". Островки устойчивости существуют при любых больших  $K$  и имеют размер порядка  $1/K$ . Само стохастическое море стремится заполнить всю плоскость  $2\pi \times 2\pi$ . В общем случае ( $K \neq 0$ ) можно сказать, что в стандартном отображении (3) не существует сплошного хаоса и полной интегрируемости.

Рис.2. Сепаратриса главного резонанса отображения (3) при  $K=0,9$ : 1 — нулевое приближение (7); 2 — второе приближение (8). Показаны также стохастический слой ("шубка") в окрестности деформированной сепаратрисы 2.



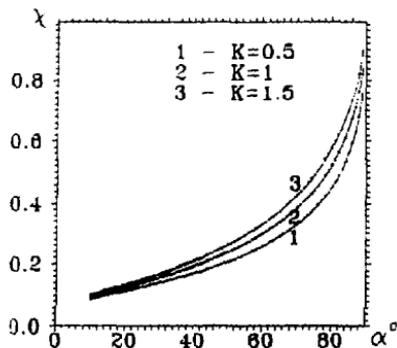


Рис.3. Граница стохастичности  $\chi$  ( $\alpha$ ,  $K=1$ ).

Грубая оценка величины  $K_{кр}$  получается из следующих простых соображений<sup>1/</sup>. Вблизи эллиптической точки ( $\theta = \pi$ ) происходят фазовые колебания с частотой  $\omega_0 = K^{1/2}$  и амплитудой по  $I$ , равной  $\Delta I_{max} = 2K^{1/2}$ . Отсюда, учитывая, что расстояние  $\delta I$  между целыми резонансами для

стандартного отображения равно  $2\pi$ , получается простейший критерий перекрытия резонансов:  $2\Delta I_{max} / \delta I = 4K^{1/2} / 2\pi = 1$  или  $K = K_{кр} = 2,5$ . Более строгий анализ с привлечением теоретических методов и компьютерных экспериментов дает значение  $K_{кр} = 1^{1/}$ . Таким образом, при  $K < K_{кр} = 1$  изменения  $I$  ограничены по величине для любых  $n$  ( $|I_n - I_0| < 4K^{1/2}$ ). В случае  $K > 1$  система (3) переходит в режим глобальной стохастичности, где движение по  $I$  не ограничено. Граница стохастичности в переменных  $\chi$ ,  $\alpha$ , т.е. решение уравнения (4) при  $K=1$ , показана на рис.3. Там же для сравнения (оценки масштаба) приведены значения  $\chi$  и  $\alpha$ , соответствующие  $K=0,5$  и  $1,5$ .

Поведение функции распределения для ансамбля систем в режиме глобальной стохастичности описывается уравнением Фоккера - Планка<sup>1/</sup>

$$\frac{\partial f}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial I} \left( D_1 \frac{\partial f}{\partial I} \right) \quad (9)$$

с коэффициентом диффузии  $D_1 = 1/2 (K-1)^2 \cdot 5,9'$ . Скорость диффузии по  $\mu$  в числе итераций отображения определяется величиной

$$D_\mu = \frac{1}{2} (\Delta \mu)_m^2 \frac{(K-1)^2}{K^2} \quad (10)$$

или в обычном непрерывном времени

$$D_\mu = \frac{\Omega (\Delta \mu)_m^2}{2\pi} \left( 1 - \frac{1}{K} \right)^2. \quad (11)$$

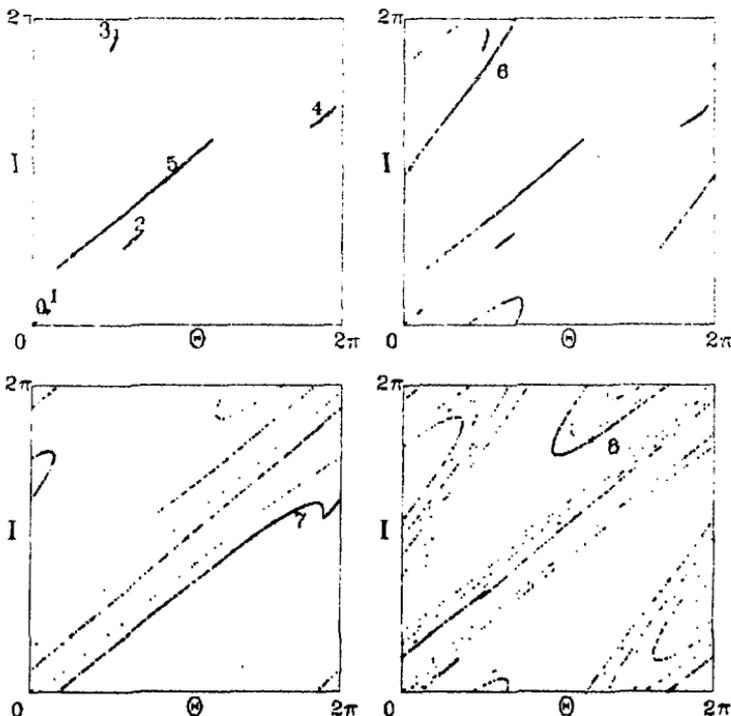


Рис.4. Расходимость соседних траекторий при  $K = 4,7$  и числе итераций  $n = 8$ . Начальные значения заданы в окрестности точки  $I_0 = \theta_0 = 0,04689$ ; радиус окрестности  $\epsilon = 5 \cdot 10^{-3}$ ; число начальных точек в этой окрестности  $\sim 10^3$ . Цифры означают порядковый номер итерации. Результат расплывания первоначально заданной окрестности после пятой итерации показан отдельно.

При больших значениях  $K$  можно считать, что коэффициенты (10) и (11) соответствуют полностью случайным независимым фазам, поскольку корреляции фазы  $\theta$  в этом случае исчезают и происходит сильное перемешивание.

Локальная неустойчивость и интенсивное перемешивание по фазе, особенно при  $K \gg 1$ , может приводить к временному удержанию (запиранию) частиц. Факт сильной локальной неустойчивости (экспоненциального разбегания близких траекторий) виден из рис.4. Незначительный разброс начальных условий вызывает значительные последствия уже

через несколько итераций. Время (число итераций) прохождения траектории на расстояние  $\delta\theta = 1$  можно грубо оценить по формуле [1]:

$$T_n = \frac{\ln \frac{\delta\theta}{\theta_0}}{\ln \frac{K}{2}} \quad (12)$$

Сравним значения результатов вычислений от начальных условий для базисных  $K$ , возможности загибания на входе и срыва с выхода (см. рис. 2) с помощью (12) качественно подтверждаются в фазовом пространстве (рис. 3). Особенно это интересно в связи с вопросом о возможности загибания в геометрии ловушки [12]. Известно, что для частоты  $\omega = 0,74$  резонансных (инжекционных) и  $\omega = 0,7$  (ловушки) потерь.

### ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Для упрощения метода проведения анализа стохастического поведения системы с помощью отображений удобно как из-за понижения размерности фазового пространства, так и вследствие того, что регулярная компонента движения (колебательная часть изменения  $\psi$ ) исключается из рассмотрения. В качестве основных уравнений использовались итерационные уравнения (1) и (3). Более точно исходную задачу описывает отображение (1). В случае с отображением (3) использовались два варианта. Первый вариант, когда  $K$  является просто постоянной. Выражение (4) вычисляется для конкретного значения  $\alpha_r$ . Во втором варианте  $K$  считается функцией  $\alpha$ .

Для решения задачи необходимо конкретизировать величину  $\Gamma$  и определить на фазовой плоскости "конус" потерь, через который частицы выходят из ловушки. При определении переменной  $\Gamma$  примем во внимание, что в дипольном поле условие резонанса можно записать в виде [8]

$$\Gamma = \frac{3F}{\pi\chi} \quad (13)$$

где  $F = 0,74 \sin^{-1,55} \alpha$ . Учитывая, что магнитный момент  $\mu = \sin^2 \alpha$ , для динамической переменной  $\Gamma$  получим выражение

$$\Gamma = 1,55 \pi r \left( \frac{\sin^2 \alpha - \sin^2 \alpha_r}{\sin^2 \alpha_r} \right) \quad (14)$$

Теперь остается задать зону потерь на фазовой плоскости  $\Gamma, \theta$ . Обобщенные аналитические выражения для описания конуса потерь частиц

получены нами ранее в работе <sup>13</sup> (см. также <sup>14,15</sup>). Они являются следствием учета скорости магнитного дрейфа, которым обычно пренебрегают. В плоскости  $(\alpha, \theta)$  положение конуса потерь в нижнем полушарии смещено относительно верхнего только по фазе:  $\theta_1 = \pi - \theta_2$  ( $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ). Исходя из <sup>13,15</sup>, нетрудно показать, что в лабораторной системе координат условие попадания частицы (траектории) в зону потерь определяется значением величины

$$A = \frac{1}{\sin^2 \alpha^*} \left[ \left( \frac{\cos \alpha^* \cos \Phi - \cos \alpha}{\sin \Phi} \right)^2 - \sin^2 \alpha^* \cdot \sin^2 (\Phi - \phi) \right], \quad (15)$$

$$\sin \alpha^* = \left[ (4\tilde{L} - 3)\tilde{L} \right]^{-0,5}, \quad \phi = \theta - \gamma \varphi, \quad (16)$$

Углы  $\Phi$  и  $\phi$  зависят от параметра адиабатичности  $\tilde{\chi}$  и описаны в <sup>12,15</sup>. Графики функций  $\Phi(\tilde{\chi})$  и  $\phi(\tilde{\chi})$  приведены в работах <sup>14,15</sup>. В предыдущей работе <sup>15</sup> эти величины обозначены как  $\alpha_0(\chi_0)$  и  $\phi_0(\chi_0)$ , где  $\chi_0 = \chi(L_0)$ , а величина  $L_0$  является тем значением параметра  $L$ , на которое выходит частица, двигаясь от экватора по траектории, проходящей через центр диполя. Во избежание путаницы с обозначением начальных условий здесь используются обозначения  $\tilde{L} = L_0$  и  $\tilde{\chi} = \chi_0$ . Численное интегрирование уравнений движения приводит к зависимости между экваториальным значением  $\chi(L)$  и  $\tilde{\chi} = \chi(L_0)$ , показанной на рис.5. Отсюда же следует и связь между  $L$  и  $\tilde{L}$ .

$$\frac{\tilde{L}}{L} = \sqrt{\frac{\tilde{\chi}(\chi)}{\chi}} = \begin{cases} 1 & (0 \leq \chi \leq 0,2), \\ 0,83 \chi^{-0,13} & (0,2 < \chi < 1,33). \end{cases} \quad (17)$$

Величины  $\Phi$  и  $\phi$  можно аппроксимировать функциями

$$\Phi = \begin{cases} 79,43 \tilde{\chi}^{-1,16} + 0,391 & \text{при } 0,03 < \tilde{\chi} < 0,24; (\Delta \Phi / \Phi)_{\max} = 3,5\%; \\ 120,4 \tilde{\chi}^{-0,26} - 68,05 & \text{при } 0,24 \leq \tilde{\chi} \leq 1,36; (\Delta \Phi / \Phi)_{\max} = 4\%; \end{cases} \quad (18)$$

$$\phi = \begin{cases} 488,3 \tilde{\chi}^{3,17} + 89,81 & \text{при } 0,03 \leq \tilde{\chi} \leq 0,24; (\Delta \phi / \phi)_{\max} = 0,58\%; \\ 111,92 \tilde{\chi}^{0,3} + 21,8 & \text{при } 0,24 \leq \tilde{\chi} \leq 1,36; (\Delta \phi / \phi)_{\max} = 0,74\%; \end{cases} \quad (19)$$

где углы  $\Phi$  и  $\phi$  даются в градусах. Текущими переменными в выражении (15) является фаза  $\theta$  и угол  $\alpha$ , который связан с динамической

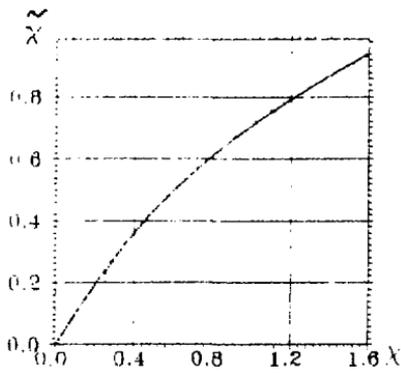


Рис.5. Зависимость  $\tilde{\chi}$  от  $\chi$ .

переменной  $I$  соотношением (14). Все остальные величины задаются через начальные условия. Частица оказывается в конусе потерь в случае, если  $A \leq 1$  при  $\tilde{\chi} \geq 0,25$ ; при  $\tilde{\chi} \leq 0,25$  значение  $A \leq 1$  для  $0 \leq \phi \leq \leq 200^\circ$  и  $A \geq 1$  для  $200^\circ \leq \phi \leq 2\pi$ . Начальные условия внутри конуса потерь формируются следующим образом. Заданием  $L$  определяется интервал изменения  $\alpha_0^*$  в конусе потерь ( $0 < \alpha_0^* \leq \alpha_c^*$ , где  $\alpha_c^*$  определяется формулой (16)). Значения  $\alpha_0^*$  задаются генератором случайных чисел. Каждому

случайному значению  $\alpha_0^*$  соответствует ряд случайных фаз  $\phi$  из интервала  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  (см. формулу (7) в '13' или выражение (14) в работе '15'). По  $\alpha_0^*$  и  $\phi$  находятся  $\alpha_0$  и  $\phi_0$ .

Во вращающейся системе координат (в системе ведущего центра) конус потерь определяется простой формулой (16), т.е. частицы гибнут, если их экваториальные углы  $\alpha$  попадают в интервал

$$0 \leq \sin \alpha \leq [(4L - 3)L^5]^{-1/4}. \quad (20)$$

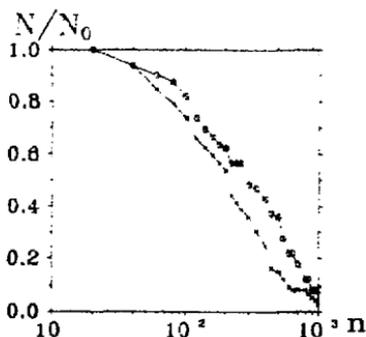
При этом  $\mu \rightarrow \mu^*$ ,  $\Delta \mu \rightarrow \Delta \mu^*$  ( $\Delta \mu \approx \Delta \mu^*$ ),  $\alpha \rightarrow \alpha^*$  — угол между вектором скорости частицы и касательной к траектории ведущего центра '15'.

Компьютерные эксперименты проводились с ансамблем частиц ( $10^2 \div 10^3$ ), которые отождествлялись с ансамблем начальных условий. Начальные условия задавались как внутри конуса потерь, так и вне его. Для задания начальных условий выбиралась область значений  $I_0$ ,  $\theta_0$  ( $\mu_0$ ,  $\theta_0$ ), внутри которой с помощью метода Монте-Карло разыгрывался весь ансамбль начальных значений  $I, \mu, \theta$ .

## РЕЗУЛЬТАТЫ ВЫЧИСЛЕНИЙ И ОБСУЖДЕНИЯ

Определялись следующие величины. Находился прежде всего коэффициент захвата, представляющий собой отношение  $\epsilon_3 = N_1/N_0$ , где  $N_0$  — число инжектированных частиц,  $N_1$  — их число после первой итерации. Определялась также зависимость  $N$  от  $n$  и время жизни частиц  $\tau_n$ , соответствующее  $N_1/N = e$ . Диапазон возможных значений  $\alpha$  ограничивался интервалом  $[0,5^\circ, 89,5^\circ]$ . Кроме того, вводилось естествен-

Рис.6. Зависимость  $N$  от  $n$ , найденная с помощью отображения (3).  $N_0 = 72$ ;  $L = 2,6$ ;  $\chi = 0,416$ ;  $r = 4$ ;  $\alpha_r = 35^\circ$ ;  $290^\circ \leq \phi \leq 322^\circ$ ;  $31^\circ \leq \alpha_0 \leq 38^\circ$ .  $\circ$  — соответствует  $K = 1,7$ ;  $\times$  —  $K = K(\alpha_n)$ .



ное ограничение  $|\mu_{n+1}| \sim \sin^2 \alpha < 1$ . При больших значениях  $\chi$ , когда возможны случаи  $\mu_{n+1} < 0$ , для вычисления вспомогательных функций (зависящих от  $\alpha$ ) брались абсолютные величины  $\mu$ . Примеры зависимости  $N$  от  $n$  показаны на рис.6. Значения  $c_3(W, L)$ ,  $c_3(N_0)$  и  $r_n(W, L)$  представлены на рис.7-9. Рассматриваемые эффекты усиливаются с увеличением параметра  $\chi$ .

Конечно, с точки зрения хаоса, имеет смысл рассматривать те протоны, для которых кинетическая энергия

$$W > W_{кр} = E_0 \left[ \left( 1 + \frac{4,5 \cdot 10^2 \chi^2}{L^4} \right)^{1/2} - 1 \right], \quad (21)$$

где  $E_0 = 938$  МэВ, функция  $\chi = \chi(\alpha, K=1)$  приведена на рис.3.

Для сравнения этих результатов с аналитическими оценками характерного времени жизни частиц можно воспользоваться следующей фор-

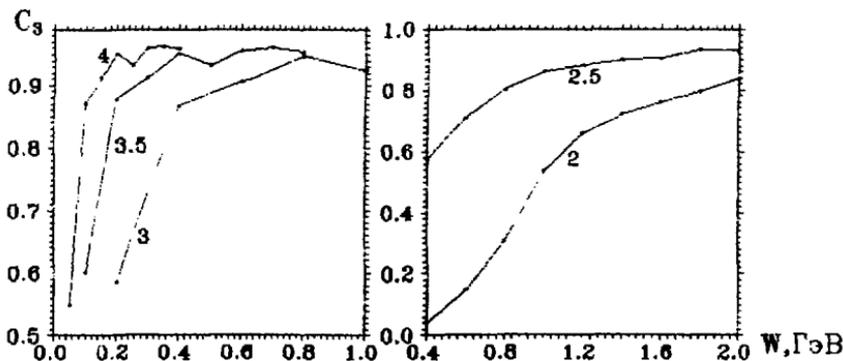


Рис.7. Зависимость  $c_3$  от  $W$  и  $L$ . Значения параметра  $L$  обозначены цифрами. Условия инжекции:  $0,5^\circ \leq \alpha_0 \leq \alpha_c$ ;  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ ;  $N_0 = 10^3$ .

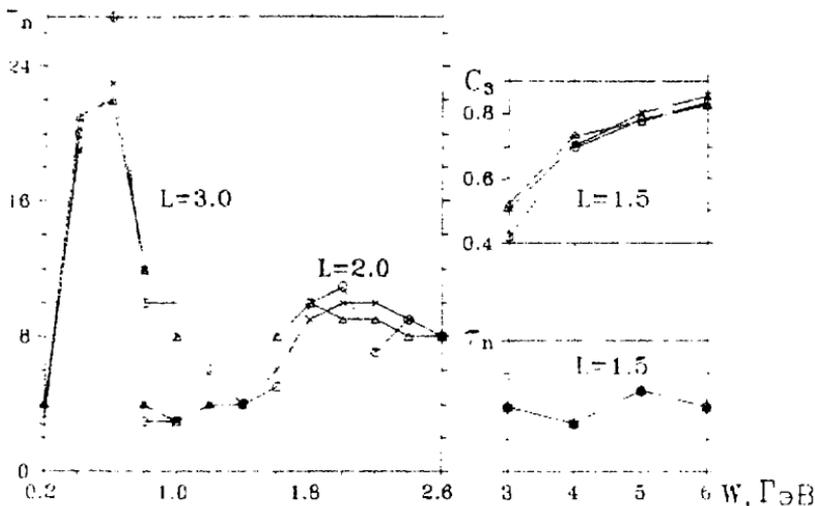


Рис.8. Зависимость  $\tau_n$  (в числе итераций) от  $W$  и  $L$ , полученная из отображения (1). Функция  $\varepsilon_R(W, N_0, L=1,5)$ . Условия инъекции:  $0,5^\circ \leq \alpha_0 \leq \alpha_c$ ;  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ .  $\circ$  — соответствует  $N_0 = 10^2$ ;  $\times$  —  $N_0 = 5 \cdot 10^2$ ;  $\Delta$  —  $N_0 = 10^3$ .

мулой. Она сравнительно легко получается из диффузионного уравнения (см. (9) и (10)) при условии  $\alpha_{st} \approx \alpha_c^{-1}$ :

$$\tau_n \approx 0,15 \exp\left(\frac{\theta_0}{\chi}\right) \sin^2 \alpha_{st} \ln \frac{\sin \alpha_{st}}{\sin \alpha_c}. \quad (22)$$

Здесь  $\tau_n$  выражено в числе пролетов частицы между пробками (числе отражений),  $\alpha_{st}$  — соответствует границе стохастичности  $K = 1$  (см.

(4) и рис.3),  $\alpha_c$  ( $\ll 1$ ) — значение  $\alpha$  на адиабатическом конусе потерь (см. (16), (20)). При малых углах  $\alpha$  показатель экспоненты примерно равен  $2/\chi$ . Естественно, возмож-

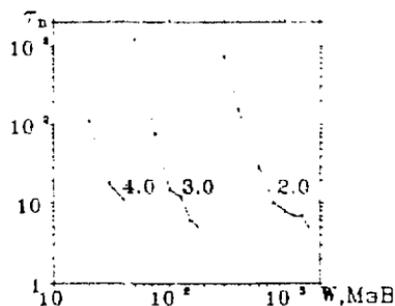


Рис.9. Функция  $\tau_n(W, L)$ , найденная с помощью отображения (1). Цифрами указаны значения  $L$ . Начальные условия:  $\alpha_c \leq \alpha_0 \leq 2\alpha_c$ ;  $0 \leq \theta_0 \leq 2\pi$ ;  $N_0 = 10^2$ .

ность использования (22) ограничивается также величиной параметра  $\chi(r_p(\chi) \cdot 1)$ .

Из рис.1 видно, что и при  $K \cdot K_{кр}$  сохраняются достаточно обширные области устойчивого движения вокруг неподвижных точек ( $I = 2\pi$ ,  $\theta = \pi$ ), соответствующих центрам целых резонансов. Примечательно то, что в этих областях первый адиабатический инвариант обладает вечной адиабатической инвариантностью. В переменных  $\alpha$  и  $\theta$  размер устойчивой области, окружающей неподвижную точку ( $I=0$ ,  $\theta = \pi$ ), можно оценить, исходя из уравнения (13) и рис.1. Действительно, согласно (13) для неподвижной точки (нт) имеем:

$$\alpha_{нт} = \alpha_r \approx \arcsin[0,8(r\chi)^{-0,645}] \quad (23)$$

Из соотношения (14) следует

$$\Delta\alpha \approx \frac{5,9 \Delta I}{r} \operatorname{tg} \alpha_r, \quad \frac{1}{r} \ll 1, \quad \alpha_r \approx \frac{\pi}{2} \quad (24)$$

где  $\Delta I$  оценивается из рис.1, величина  $\alpha_r$  определяется формулой (23). Для примера укажем, что при  $K=2$  и  $\chi=0,2$  имеем  $n=8 \div 10$ ,  $\Delta I \approx 1,5 \div 1$ ,  $\alpha_r \approx 35^\circ - 31^\circ$  и соответственно  $\Delta\alpha \approx 0,8 \div 0,4^\circ$  при  $\theta = \pi$ . При этом угловое расстояние между соседними резонансами составляет  $\approx 3^\circ$ . Это случай, когда в море хаоса (при глобальной диффузии) имеются области адиабатического движения (см. рис.1). В противном случае, когда  $K \cdot K_{кр} (K < 1)$  и, следовательно, нет глобальной неустойчивости, можно говорить о хаотической адиабатичности нелинейных колебаний частиц<sup>16</sup>. Приведенный рис.1 подчеркивает тот факт, что характер движения зависит не только от  $\chi$  и  $K$ , но и от начальных условий.

С областями устойчивого движения связаны особенности коэффициента захвата  $c_3$ . Если конус потерь охватывает  $\theta = \pi$ , то захват ("выскакивание" частицы из конуса потерь) затрудняется или невозможен вовсе ( $c_3 \rightarrow 0$ ). Возможность захвата легко установить и помимо (1), если учесть, что частица способна выскочить из конуса потерь при условии:  $\alpha_0^* + \Delta\alpha^* > \alpha_c^*$ , где  $\sin \Delta\alpha^*/2 = \sin \Phi \cos \vartheta$  ( $\chi \leq 0,3$ )<sup>15</sup>.

В предыдущей работе<sup>15</sup> (см. также<sup>14,17</sup>) рассматривалась неадиабатическая модель движения заряженной частицы в дипольном поле, позволяющая делать краткосрочные прогнозы динамики частиц. Теперь эта модель, дополненная отображением  $\mu_n^*, \theta_n \rightarrow \mu_{n+1}^*, \theta_{n+1}$ , дает возможность в ряде случаев следить за длительной эволюцией частицы. Задав начальные параметры системы, можно с известной степенью точности предсказать пуг-угол и фазу на экваторе или положение точки отражения на любом "качке". Таким образом, некоторые принципиальные трудности при численных и аналитических методах исследо-

вания неадиабатичности движения частиц в дипольном поле в значительной мере преодолеваются с помощью дискретной модели движения (1) (или (3)). При всей своей чрезвычайной простоте эта модель обладает высокой качественной (в данном случае и количественной) эффективностью.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чириков Б.В. — В сб.: Вопросы теории плазмы. М.: Энергоатомиздат, 1984, вып.13, с.3.
2. Заславский Г.М. и др. — УФН, 1988, т.156, вып.2, с.193.
3. Бланк М.Л. — УМН, 1989, т.44, вып.6 (270), с.3.
4. Хесс В. — Радиационный пояс и магнитосфера. М.: Атомиздат, 1972, гл.3.
5. Чириков Б.В. — Физика плазмы, 1978, т.4, вып.3, с.521.
6. Звонков А.В., Тимофеев А.В. — Физика плазмы, 1985, т.11, вып.3, с.320.
7. Амирханов И.В. и др. — Сообщение ОИЯИ, P11-85-88, Дубна, 1985.
8. Ильин В.Д., Ильина А.Н. — Физика плазмы, 1982, т.8, № 1, с.148.
9. Chirikov B.V. — Phys. Reports, 1979, v.52, No.5, p.265.
10. Елютин П.В. — Вест. Моск. ун-та сер.3.Физика. Астрономия. 1986, т.24, № 4, с.9.
11. Амирханов И.В. и др. — Космич. исслед., 1988, т.26, № 2, с.263.
12. Горчаков Е.В., Северинов В.И. — Геомагнетизм и астрономия, 1976, т.16, № 4 с.706.
13. Амирханов И.В. и др. — Сообщение ОИЯИ, P11-87-377, Дубна, 1987.
14. Амирханов И.В. и др. — В сб.: Физика космической и лабораторной плазмы. Новосибирск: Наука, 1989, с.74.
15. Амирханов И.В. и др. — Сообщение ОИЯИ, P9-90-154, Дубна, 1990.
16. Чириков Б.В. — Препринт ИЯФ СО АН СССР, № 86-22, Новосибирск, 1986.
17. Амирханов И.В. и др. — Известия АН СССР. Серия физ. 1988, т.52, № 12, с.2422.

Рукопись поступила в издательский отдел  
5 февраля 1991 года.