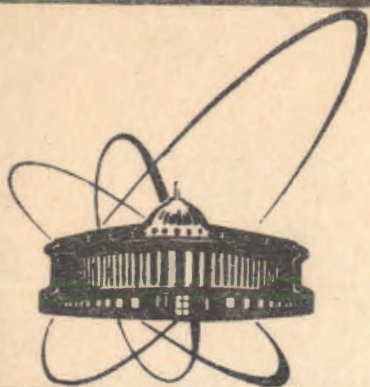


91-577



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-91-577

П.Г. Акишин

ОБ ОДНОЙ КОМБИНИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ
ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ

1991

Методы расчета магнитоэстатических полей можно разделить на три основных класса:

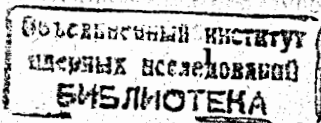
1. Дифференциальные методы, использующие уравнения в частных производных /1-3/.

2. Интегральные методы, приводящие к интегральным уравнениям магнитоэстатики /4-6/.

3. Комбинированные методы, использующие как дифференциальные, так и интегральные уравнения /7-9/.

Каждый тип методов имеет как свои достоинства, так и свои недостатки. К достоинствам дифференциальной методики следует отнести разреженность матриц дискретизованных уравнений, что позволяет организовать оперативный доступ к ним и применение быстрых алгоритмов, относительную простоту вычисления коэффициентов. К числу недостатков относятся проблемы генерации сетки, стыковки раздела сред, задание граничных условий, необходимость во многих случаях решения задачи в области, значительно превышающей объем железа. Основным достоинством интегральной постановки является необходимость решения возникающих уравнений только в области, занимаемой ферромагнетиком. Автоматически задается поведение искомых величин на бесконечности. Естественным образом решается проблема раздела сред, задание граничных условий. К числу недостатков необходимо отнести полную заполненность матриц, используемых при дискретизации уравнений, что приводит к жесткому ограничению на методы решения возникающих уравнений. Вычисление коэффициентов матриц приводит к взятию интегралов большой кратности, в общем случае - от сингулярных функций. В методах третьего класса предлагается совместить достоинства постановок первых двух классов. Решаются уравнения в частных производных в некоторой ограниченной области, а для учета поведения переменных на бесконечности используются граничные интегральные уравнения.

В данной работе рассматривается метод третьего класса. Учитывая, что решение нелинейных дискретизованных уравнений является одним из самых сложных моментов решения задачи, в предлагаемом подходе предпринята попытка использовать алгоритмы развития для метода объемных интегральных уравнений.



§ I. Постановка задачи

Пусть \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} — есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля. Имеет место следующее уравнение:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \nabla_{\vec{a}} \varphi, \quad (1)$$

где $\vec{H}^S(\vec{a})$ — поле от токовых обмоток. Выписывая явный вид φ , мы получаем интегральную постановку задачи магнитостатики

$$\varphi(\vec{a}) = \frac{1}{4\pi} \int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}) dV_{\vec{x}}, \quad (2)$$

где G — область, заполненная ферромагнетиком.

Величины \vec{B} , \vec{H} , \vec{M} связаны нелинейными соотношениями

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0 \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)}, \quad (3)$$

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{x}),$$

где $\mu = \mu(|\vec{B}|)$ — магнитная проницаемость, μ_0 — магнитная проницаемость вакуума.

Потенциал φ из (2) удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\Delta_{\vec{x}} \varphi(\vec{x}) + \text{div}_{\vec{x}} \vec{M}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \text{Int} G, \quad (4)$$

$$\Delta_{\vec{x}} \varphi(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in R^3 \setminus G. \quad (5)$$

Нормальная производная φ на границе области ∂G терпит разрыв:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n^-} - \frac{\partial \varphi}{\partial n^+} = (\vec{M}, \vec{n}), \quad (6)$$

где $\frac{\partial \varphi}{\partial n^-}$ — предел нормальной производной φ снаружи области G , а $\frac{\partial \varphi}{\partial n^+}$ — предел нормальной производной изнутри области G .

На поведение $\varphi(x)$ на бесконечности накладывается следующее условие:

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \varphi(\vec{x}) \equiv 0, \quad (7)$$

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} |\nabla \varphi(\vec{x})| \equiv 0.$$

Умножая (4) и (5) на $\varphi(\vec{x})$, интегрируя по всему пространству R^3 и учитывая (6), имеем следующее тождество /10/:

$$\int_{R^3} |\nabla \varphi|^2 dV_{\vec{x}} = - \int_G (\nabla \varphi(\vec{x}), \vec{M}(\vec{x})) dV_{\vec{x}}. \quad (8)$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\int_{R^3} |\nabla \varphi|^2 dV_{\vec{x}} \leq \int_G |\vec{M}(\vec{x})|^2 dV_{\vec{x}}. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует

$$\int_G \|\nabla \varphi(\vec{M}(\vec{x})) + \vec{M}(\vec{x})\|^2 dV_{\vec{x}} \leq \int_G \|\vec{M}(\vec{x})\|^2 dV_{\vec{x}}. \quad (10)$$

Учитывая неравенство (10) для решения нелинейной задачи (1), можно использовать следующий итерационный процесс:

$$\vec{B}^{k+1}(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}) + \nabla_{\vec{a}} \varphi(\vec{M}^k) + \vec{M}^k(\vec{a}), \quad (II)$$

$$\vec{M}^k(\vec{a}) = \vec{H}(\vec{B}^k(\vec{a})),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

$$\vec{B}^0(\vec{a}) = \vec{H}^S(\vec{a}).$$

Итерационный процесс заканчивается, если невязка (I) становится меньше заданной величины.

Данный итерационный процесс успешно использовался для решения практических задач в рамках метода объемных интегральных уравнений /II-III/. В дальнейшем, ориентируясь именно на этот итерационный процесс, предлагается комбинированная постановка магнитостатики.

Отметим, что для каждого шага итерационного процесса (II) при заданном $\bar{M}^k(\bar{a})$ необходимо решить задачу (4)-(7). Представим потенциал φ в виде суммы двух потенциалов:

$$\varphi(\bar{a}) = \Psi(\bar{a}) + u(\bar{a}). \quad (12)$$

Положим

$$\begin{cases} \Delta_{\bar{a}} \Psi(\bar{a}) + \text{div}_{\bar{a}}(\bar{M}(\bar{a})) = 0, & \bar{a} \in \text{Int } G \\ \Psi(\bar{a}) = 0 & \bar{a} \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{Int } G. \end{cases} \quad (13)$$

В качестве потенциала $u(\bar{a})$ возьмем потенциал простого слоя по границе области G :

$$u(\bar{a}) = -\frac{1}{4\pi} \oint_{DG} \frac{\sigma(\bar{x}) dS_{\bar{x}}}{|\bar{x} - \bar{a}|}. \quad (14)$$

Для того, чтобы удовлетворить (4)-(7), необходимо $\sigma(x)$ положить

$$\sigma(x) = (\bar{M}(\bar{x}), \bar{n}(\bar{x})) + \frac{\partial \Psi(x)}{\partial n_x}, \quad (15)$$

где $\bar{n}(\bar{x})$ - есть внешняя нормаль к DG . Очевидно, что потенциал $u(\bar{a})$ удовлетворяет уравнению Лапласа для $\bar{a} \in \text{Int } G$. Поэтому, вычислив значения $u(\bar{a})$ для $\bar{a} \in DG$, можно определить $u(\bar{a})$, решив задачу Дирихле для уравнения Лапласа в области G .

Подведем итог. Для того, чтобы вычислить $\nabla \varphi$ при заданном значении $\bar{M}^k(\bar{a})$ и тем самым сделать один шаг итерационного процесса, необходимо:

1. Определить $\Psi(a)$, решив задачу (13).
2. Определить плотность $\sigma(a)$ из (15).
3. Определить граничные значения $u(a)$, пересчитав потенциал простого слоя (14) при заданном $\sigma(a)$ на границе DG .
4. Определить $u(a)$ в G , решив задачу Дирихле для уравнения Лапласа.
5. Найти сумму градиентов $\nabla \varphi + \nabla u$ в области G .

§ 2. Дискретизация

Рассмотрим следующий функционал:

$$F(\varphi, \bar{M}) = \int_G (0.5 \cdot |\nabla \varphi|^2 + (\nabla \varphi, \bar{M})) dV_x,$$

определенный на пространстве Соболева $W_2^1 / I4/$. Минимум $F(\varphi)$ достигается на решении задачи (13). Для дискретизации задачи разобьем область G на объединение гексаэдров $\{G_i\}$ $G = \bigcup_{i=1}^L G_i$ так,

как это делается при использовании метода конечных элементов. Пусть $\{\bar{P}_i, i=1, L\}$ - набор внутренних вершин и, соответственно, $\{\bar{P}_i, i=L+1, \dots, M\}$ - набор граничных вершин. Пусть $\{\bar{P}_{i_1}, \bar{P}_{i_2}, \dots, \bar{P}_{i_8}\}$ есть вершины некоторого G_i (рис. I).

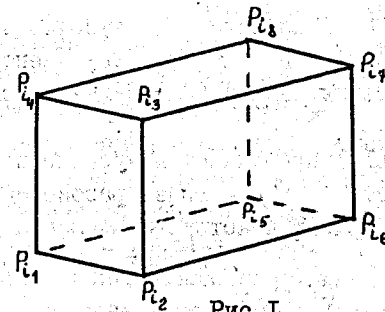


Рис. I

Рассмотрим единичный куб G_0 :

$$G_0 = \{ \bar{x}(x_1, x_2, x_3) : 0 \leq x_i \leq 1, i=1, 3 \}.$$

Введем следующие функции формы /I6/:

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = (1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1(1-x_2)(1-x_3)$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 (1-x_3)$$

$$f_4(x_1, x_2, x_3) = (1-x_1)x_2(1-x_3)$$

$$f_5(x_1, x_2, x_3) = (1-x_1)(1-x_2)x_3$$

$$f_6(x_1, x_2, x_3) = x_1(1-x_2)x_3$$

$$f_7(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

$$f_8(x_1, x_2, x_3) = (1-x_1)x_2 x_3.$$

Введем параметризацию G_i следующим образом. Каждой точке (α, β, γ) единичного куба G_0 поставим в соответствие \bar{x} из G_i следующим образом:

$$\bar{x}(\alpha, \beta, \gamma) = \sum_{k=1}^8 \bar{P}_{i_k} f_k(\alpha, \beta, \gamma).$$

Пусть $\{\varphi_j\}$ - набор значений функции φ в вершинах $\{\bar{P}_j\}$:

$$\varphi_j = \varphi(\bar{P}_j).$$

Аппроксимируем φ в G_i следующей функцией φ^h :

$$\varphi^h(\bar{x}(\alpha, \beta, \gamma)) = \sum_{k=1}^N \varphi_{i_k} f_k(\alpha, \beta, \gamma).$$

Приближим намагниченность \bar{M} в области G кусочно-постоянной функцией \bar{M}^h ($\bar{M}^h(\bar{x}) \equiv \bar{M}(\bar{a}_i)$ в G_i ; \bar{a}_i - центроид G_i). В качестве приближенного решения задачи (I3) будем рассматривать φ^h , минимизирующую $F(\varphi^h, \bar{M}^h)$.

Плотность $\sigma(\bar{x})$ в (I4) приближается кусочно-постоянной функцией $\sigma^h(x)$. Пусть S_j - грань разбиения G ($S_j \in DG$). Одновременно S_j является гранью некоторого элемента G_{j_0} . Положим $\sigma^h(\bar{x})$ равной σ_j для всех $\bar{x} \in S_j$:

$$\sigma_j = (n_{j_0}, \bar{M}_{j_0} + \nabla \varphi_{j_0}),$$

где $\nabla \varphi_{j_0}$ есть значение $\nabla \varphi_n$ в центроиде G_{j_0} , а \bar{n}_{j_0} - внешняя нормаль к DG на грани S_j . Далее $u(\bar{a})$ пересчитывается в граничные вершины разбиения G , а затем приближенное значение $u(x)$ находится аналогично φ_n минимизацией функционала $\Phi(u)$:

$$\Phi(u) = \int_G 0.5 \cdot |\nabla u|^2 dV_{\bar{x}}.$$

Для решения возникающих линейных алгебраических уравнений используется метод неполного разложения Холецкого в сочетании с методом сопряженных градиентов [15].

Для решения нелинейной дискретизованной задачи, имеющей вид

$$\bar{B}_j = \bar{H}^s(\bar{a}_j) + \bar{M}_j + \nabla_a \varphi(\bar{M}^h) \Big|_{\bar{a}=\bar{a}_j},$$

$$j = \overline{1, N}$$

используется итерационный процесс (II).

§ 3. Численное моделирование

На основе методики, изложенной выше, был создан комплекс программ расчета магнитных полей в комбинированной постановке "ТИБРИД". Комплекс использовался для расчета поля дипольного магнита. Учет симметрии магнита позволил в восемь раз сократить число неизвестных.

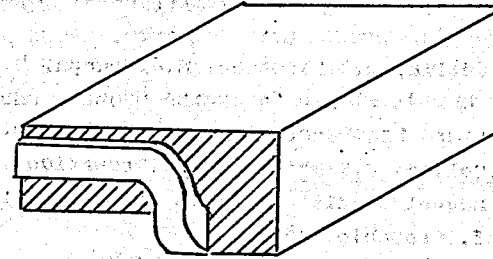


Рис.2

На рис.2 изображена 1/8 часть конфигурации магнита. При разбиении расчетной области на 4800 элементов и, соответственно, 920 граничных элементов время центрального процессора ЭМ ЕС 1066, затраченное на построение матриц дискретизованных уравнений 50 шагов итерационного процесса (II) и пересчет в 50 точках наблюдений, составило 227 мин. В таблице приведено сравнение результатов расчетов поля вдоль оси магнита, полученных с использованием комплекса "ТИБРИД", с расчетами по методу объемных интегральных уравнений [II].

Отметим, что данный подход решения нелинейных дискретизованных уравнений можно использовать в рамках дифференциальной постановки, применив метод конечных элементов для дискретизации системы (4)-(7).

Таблица

| X (см) | 0 | 20 | 40 | 60 | 76 | 90 |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| "ТИБРИД" | 1,950 | 1,948 | 1,936 | 1,907 | 1,306 | 0,0513 |
| Комплекс из [II] | 1,961 | 1,957 | 1,963 | 1,945 | 1,295 | 0,0518 |

Литература

1. J. Simkin and C.W. Trowbridge. Three dimensional computer program (TOSCA) for nonlinear electromagnetic fields. Rutherford Laboratory Report No. RL-79-097.
2. Pissanetzky S. Solution of Three-Dimensional Anisotropic Non-Linear Problems of Magnetostatics using Two Scalar Potentials and Finite

3. Дойников Н.И., Ламзин Е.А., Симаков А.С., Сычевский С.Е. Программный комплекс КОМПЮТ для расчета пространственных магнитостатических полей электромагнитных систем. М., 1986. (Препринт/ЦНИИ атоминформ: Б-0741).
4. A.G.Armstrong, A.M.Collie, C.J.Diserens, N.J.Newman, M.J.Simkin and C.W.Trowbridge. New developments in the magnet design program GFUN. Rutherford Laboratory Report, RL-75-060.
5. A.G.Armstrong, C.J.Collie, J.Simkin and C.W.Trowbridge. The solution of 3D magnetostatic problems using scalar potentials. Proc. COMPUMAG Conf. Grenoble (1978).
6. Борисовская Э.В., Ворожцов С.Б., Калинкина М.Б. и др. Сообщение ОИЯИ, БИ-9-85-232, Дубна, 1985.
7. Горловой М.В., Дайковский А.Г., Ершов С.Ю., Рябов А.Д. О новом комплексе программ для решения задач магнитостатики. Тр. 5 Всесоюз. семинара "Программа экспериментальных исследований на Московской мезоночной фабрике ИЯИ АН СССР". М.: ИЯИ АН СССР, 1987.
8. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н. ОИЯИ, ПИ-87-501, Дубна, 1987.
9. Жидков Е.П., Федоров А.В., Клдашев О.И. Препринт ОИЯИ, ПИ-90-180, Дубна, 1990.
10. J.F.Pasciak. An Iterative Algorithm for the Volume Integral Method for Magnetostatics Problems. Comp. Math. with Appls. v.8, No. 4, 1982.
11. Акишин П.Г. Сообщение ОИЯИ, ПИ-86-522, Дубна, 1986.
12. Акишин П.Г., Жидков Е.П., Кравцов В.Д. Сообщение ОИЯИ, ПИ-88-918, Дубна, 1988.
13. Акишин П.Г., Гаврилов Ю.К. Сообщение ОИЯИ, ПИ-91-363, Дубна, 1991.
14. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.:Наука, 1989.
15. Meijerink J.A., van der Vorst H.A. An Iterative Solution Method for Linear Systems of which the Coefficient Matrix is a Symmetric M-matrix. Math.of Comput. v. 31, No.137, 1977.
16. Дж.Оден. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. М.: Мир, 1976.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1991 года.