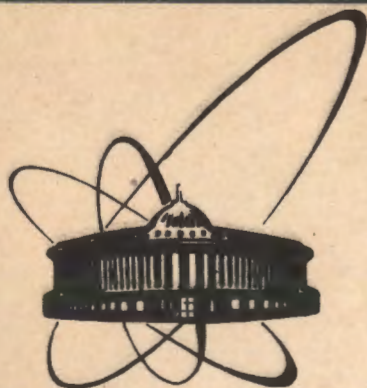


91-552



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
Дубна

P11-91-552

М.Г.Колева \*, С.Н.Димова \*\*, М.С.Касчиев \*

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ  
ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ  
В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ  
МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

---

\*Институт математики БАН, София, Болгария

\*\*Факультет математики и информатики Софийского  
университета, Болгария

1991

## 1. Постановка задачи

В последнее время интенсивно изучаются нестационарные диссипативные структуры, возникающие в нелинейной теплопроводной среде [1-15]. В этих исследованиях особое место занимает определение собственных функций (СФ) горения нелинейной среды. Процесс горения нелинейной среды с коэффициентом теплопроводности и источником, зависящими степенным образом от температуры  $u(r, \varphi, t)$ , описывается задачей Коши:

$$u_t = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r u^\sigma \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( u^\sigma \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right) + u^\beta \quad (1)$$

$$u(r, \varphi, 0) = u_0(r, \varphi), t > 0, \sigma > 0, \beta > 1,$$

где  $0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  полярные координаты точки. Следуя [16], неограниченные автомодельные решения уравнения (1) ищутся в виде

$u(r, \varphi, t) = g(t)\Theta(\xi, \eta)$ , где

$$g(t) = (1 - t/T_0)^{-1/(\beta-1)}, \quad \xi = r(1 - t/T_0)^{-0.5(\beta-\sigma)/(\beta-1)},$$

$\eta = \varphi - C_0/(1-\beta) \ln(1 - t/T_0)$ ,  $T_0$  - время существования решения, а  $C_0$  - параметр. Собственная функция  $\Theta(\xi, \eta)$  удовлетворяет нелинейному эллиптическому уравнению

$$\begin{aligned} z(\theta) = & -\frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) - \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + p \xi \frac{\partial \theta}{\partial \xi} - c_0 \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \\ & + \theta - \theta^\beta = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

В этом уравнении  $p=0.5(\beta-\sigma-1)$ , и без ограничения общности положено, что  $\Gamma_0=1/(\beta-1)$ . В работе исследуется случай  $\beta>\sigma+1$ ,

$c_0=0$ . В этом случае СФ  $\theta(\xi, \eta)$  удовлетворяет граничным условиям

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \theta^\sigma \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = 0 \text{ при } \eta=0 \text{ и } \eta=2\pi. \quad (3)$$

При больших  $\xi$  известна [2] асимптотика СФ:

$$\theta(\xi, \eta) = c \xi^{-1/p} (1 + y(\xi)), \quad y(\xi) \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty.$$

Это позволяет поставить краевое условие третьего рода при  $\xi=R \gg 1$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = -\frac{1}{p} \theta / \xi, \quad \xi=R. \quad (4)$$

Таким образом, решение задачи (2)-(4) ищется в области

$$\Omega = \{ 0 \leq \xi \leq R, 0 \leq \eta \leq 2\pi \}.$$

## 2. Предварительные сведения

Наиболее полно изучены радиально-симметричные решения уравнения (2). В работах [1-12], пользуясь аналитическими и качественными методами, получены оценки на число решений. При этом предполагается, что поведение этих решений в точности соответствует поведению начальных приближений. В работах [13-15] на основе непрерывного аналога метода Ньютона и метода конечных элементов были созданы устойчивые вычислительные схемы и повторены предыдущие результаты. Кроме того, в этих работах получены радиально-симметричные решения с новой структурой, обращающиеся в нуль в некотором круге с центром в начале

координат. Там же исследована эволюция радиально-симметричных СФ при  $\beta \rightarrow \sigma+1$ ,  $\beta > \sigma+1$ .

Разработанные в [13,14] схемы были применены к вычислению двумерных СФ в декартовых координатах [15]. Здесь впервые удалось получить анизотропные СФ, т.е. решения, имеющие различное поведение в направлениях  $\xi_1$  и  $\xi_2$ .

Уравнение (2) в полярных координатах изучалось в работах [9-12]. В этих работах предложен эффективный метод определения начальных приближений для радиально-несимметричных СФ. На основе этого высказано предположение, что структура СФ уравнения (2) полностью повторяет структуру начальных приближений. Проведенные там же численные эксперименты показали, что эта гипотеза не всегда верна. Поэтому вопрос о структуре радиально-несимметричных СФ, об их числе при заданных параметрах  $\sigma$  и  $\beta$  остается открытым. В то же время необходимо, как подчеркивается в [12], разрабатывать устойчивые вычислительные схемы решения указанной задачи.

Цель данной работы состоит в разработке быстро сходящегося итерационного метода для определения СФ уравнения (2), и на его основе проведения более полного анализа их структур. Кроме этого, необходимо подготовить его применение для случая  $c_0 \neq 0$ , когда ожидается на основе СФ уравнения (2) получить решения уравнения (1) в виде так называемых "спиральных волн", т.е. решения, описывающие распространение неоднородностей нелинейной среды по спирали.

### 3. Численный метод

Для решения нелинейной задачи (2)-(4) используем ньютоновскую итерационную схему [15], которая имеет вид

$$\mathcal{L}(\Theta_k)v_k = -\mathcal{L}(\Theta_k), \quad \Theta_{k+1} = \Theta_k + \tau_k v_k, \quad \Theta_0 - \text{заданная функция.} \quad (5)$$

Здесь через  $\mathcal{L}(\Theta_k)$  обозначена производная Фреше оператора  $\mathcal{L}(\Theta)$ , вычисленная в точке  $\Theta_k$ . Параметр  $0 < \tau_k \leq 1$  определяется в процессе вычисления по экстраполяционной формуле [17]:

$$\tau_k = \begin{cases} \min(1, \tau_{k-1} \delta_{k-1} / \delta_k), & \text{если } \delta_k < \delta_{k-1}, \\ \max(\tau_0, \tau_{k-1} \delta_{k-1} / \delta_k), & \text{если } \delta_k \geq \delta_{k-1}. \end{cases}$$

В этой формуле  $\tau_0 > 0$ , а через  $\delta_k$  обозначена некоторая норма невязки  $\mathcal{L}(\Theta_k)$ . По мере ее стремления к нулю  $\tau_k$  стремится к единице и схема (5) переходит в классический метод Ньютона. При  $\tau_k < 1$  ньютоновский итерационный процесс (5) имеет линейную скорость сходимости, но зато существенно расширяется область задания начальных приближений. Если начальное приближение  $\Theta_0(\xi, \eta)$  удовлетворяет условиям (3), (4), для итерационных поправок  $v_k(\xi, \eta)$  выполняются краевые условия

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \xi \frac{\partial v_k}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v_k}{\partial \xi} = -\frac{1}{p} v_k / \xi, \quad \xi = R, \quad \frac{\partial v_k}{\partial \eta} = 0, \quad \eta = 0, 2\pi. \quad (6)$$

Численное решение задачи (5)-(6) проводится на основе метода Галеркина. При заданной функции  $\Theta_k \in D$  необходимо найти функцию  $v_k \in H^1$ , такую, что интегральное соотношение

$$(\mathcal{L}(\Theta_k)v_k, w) = -(\mathcal{L}(\Theta_k), w) \quad (7)$$

удовлетворяется для любой функции  $w \in H^1$ , где

$$D = \left\{ \Theta(\xi, \eta) : \xi^{1/2} \Theta, \xi^{1/2} \frac{\partial \Theta^{\sigma+1}}{\partial \xi}, \xi^{-1/2} \frac{\partial \Theta^{\sigma+1}}{\partial \eta} \in L_2(\Omega) \right\}, \text{ а}$$

$$H^1 = \left\{ v(\xi, \eta) : \xi^{1/2} v, \xi^{1/2} \frac{\partial v}{\partial \xi}, \xi^{-1/2} \frac{\partial v}{\partial \eta} \in L_2(\Omega) \right\}.$$

В развернутом виде левая и правая части (7) записываются

$$(\mathcal{L}(\Theta_k)v_k, w) = \int_{\Omega} \left\{ \xi \Theta_k^{\sigma} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial v_k}{\partial \xi} + \sigma \xi \Theta_k^{\sigma-1} \frac{\partial \Theta_k}{\partial \xi} \frac{\partial w}{\partial \xi} v_k + \frac{\Theta_k^{\sigma}}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial v_k}{\partial \eta} + \frac{\sigma \Theta_k^{\sigma-1} \partial \Theta_k}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} v_k + p \xi^2 w \frac{\partial v_k}{\partial \xi} + \xi (1 - \beta \Theta_k^{\beta-1}) w v_k \right\} d\xi d\eta + \int_0^{2\pi} (\sigma+1) \Theta_k^{\sigma} w v_k / p d\eta,$$

$$(\mathcal{L}(\Theta_k), w) = \int_{\Omega} \left\{ \xi \Theta_k^{\sigma} \frac{\partial w}{\partial \xi} \frac{\partial \Theta_k}{\partial \xi} + \frac{\Theta_k^{\sigma}}{\xi} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\partial \Theta_k}{\partial \eta} + p \xi^2 w \frac{\partial \Theta_k}{\partial \xi} + \xi (1 - \beta \Theta_k^{\beta-1}) w \Theta_k \right\} d\xi d\eta + \int_0^{2\pi} \Theta_k^{\sigma+1} w / p d\eta.$$

Интегральное тождество (7) аппроксимируется по методу конечных элементов с использованием билинейных изопараметрических элементов. Из уравнения (7) видно, что в результате дискретизации на каждом шаге итерационного процесса получаются линейные алгебраические системы с несимметричными ленточными матрицами. Эти задачи решаются путем разложения матрицы системы в виде произведения нижней треугольной матрицы с единицами на диагонали и верхней треугольной матрицы. При этом в памяти ЭВМ запоминаются только нижний и верхний профили исходной матрицы.

### 5. Выбор начального приближения

Основным моментом в реализации итерационного процесса (5), (6) является задание начальных приближений  $\Theta(\xi, \eta)$ . В работе они определяются по формулам [12]

$\Theta_o(\xi, \eta) = 0.5(f_j + f_{j+1}^*) + 0.5(f_{j+1}^* - f_j) \cos(m\eta)$ , где

$$f_j(\xi) = \begin{cases} 1 + \alpha_j R_m(\xi), & \xi < \xi_j, \\ C_j \xi^{-p}, & \xi \geq \xi_j, \end{cases} \quad f_{j+1}^*(\xi) = \begin{cases} 1 - \alpha_{j+1} R_m(\xi), & \xi < \xi_{j+1}^*, \\ C_{j+1} \xi^{-p}, & \xi \geq \xi_{j+1}^*, \end{cases}$$

$R_m(\xi) = \xi^m M(-a_m, b_m, 0.5p\xi^2)$ ,  $a_m = (\beta-1)/(\beta-\sigma-1) - m/2$ ,  $b_m = m+1$ , а

$M(a, b, z)$  - вырожденная гипергеометрическая функция. Параметры  $\alpha_j$ ,

$\xi_j$  и  $C_j$  определяются из условия  $f_j \in C^2$ , а  $\xi_{j+1}^*$  и  $C_{j+1}^*$  - из условия

$f_{j+1}^* \in C^1$ . Число пар  $(f_j, f_{j+1}^*)$  таких функций  $N_m = \lfloor -a_m \rfloor - 1$  и оно в

точности равно числу локальных экстремумов функции  $R_m(\xi)$ ,

$m=2, 3, \dots, \lfloor (\beta-1)/p \rfloor$ . Полученные таким образом начальные прибли-

жения принято обозначать через  $E_{j,m}$  [12]. Структура этих функций

следующая: максимумы функции  $E_{j,m}$  расположены на  $j$  концентри-

ческих окружностях. На каждой из этих окружностей лежат по  $m$

максимумов в вершинах правильного  $m$ -угольника. При этом эти

$m$ -угольники закручены на угол  $\pi/m$  относительно друг друга. Это

означает, что функция  $E_{j,m}$  симметрична относительно  $2m$  лучей. Эти

лучи расположены в точках  $\eta = l\pi/m$ ,  $l=0, 1, \dots, 2m-1$ . Следовательно,

мы можем решать задачу в области  $\Omega_m = \{0 \leq \xi \leq R, 0 \leq \eta \leq \pi/m\}$ ,

ставя при  $\eta = 0$  и  $\eta = \pi/m$  условия симметрии решения, что

позволяет осуществить значительную экономию памяти ЭВМ и получить

более точные результаты. Начальные приближения  $E_{2,m}$  при  $\sigma=2$ ,

$\beta=3.25$  и  $m=3, 6$  показаны на рис. 1а, 1б. Ниже через  $E_{j,m}$  будем

обозначать и собственную функцию, полученную из этого начального

приближения.

## 6. Численные результаты

Для выявления точности разработанных схем были проведены

численные эксперименты для определения СФ на последовательности

двое сгущающихся сеток. Покажем результаты вычисления СФ  $E_{1,3}$

при значениях параметров  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.25$ . Область  $\Omega_m$  ограничена до  $R=$

8.5. Используются прямоугольные сетки, согласованные с границей

области  $\Omega_m$ . Полученные значения СФ в некоторых общих узлах

приведены в таблице. В этой таблице через  $N_\xi$  и  $N_\eta$  обозначены

числа разбиений в интервалах  $[0, R]$  и  $[0, \pi/m]$  ( $h_\xi = R/N_\xi$ ,  $h_\eta = \pi/mN_\eta$ ).

Теоретическая оценка точности для рассматриваемых конечных

элементов для линейных задач есть величина  $O(h^2)$ ,  $h^2 = h_\xi^2 + h_\eta^2$ . Анализ

результатов из табл., проведенный по методу Рунге, указывает на

то, что билинейные элементы, примененные к решению нелинейной

задачи (2)-(4) осуществляют такую же точность. В последней строке

таблицы приведены полученные значения показателя

$\alpha = \ln[(\theta^h - \theta^{h/2})/(\theta^{h/2} - \theta^{h/4})]/\ln 2$ , вычисленные по разби-

ениям  $(N_\xi \times N_\eta) = (34 \times 6)$ ,  $(68 \times 12)$ ,  $(136 \times 24)$ . Во всех случаях число

итераций варьировало от 5 до 13 при  $\tau_o = 0.1$ . Итерации прекращались

при выполнении критерия сходимости  $\delta_k \leq 10^{-5}$ .

Наряду с исследованием точности метода проведено решение за-

дачи (2)-(4) при  $\beta \rightarrow \sigma+1$ ,  $\beta > \sigma+1$  с целью независимого получения

радиально-симметричного решения с нулем в центре, опубликованного

в работе [14]. В результате вычислений для  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.1$  и  $\sigma=2$ ,

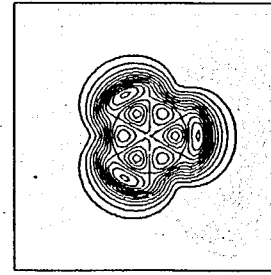
$\beta=3$ . (18) эти результаты были полностью повторены. Линии равного

Таблица

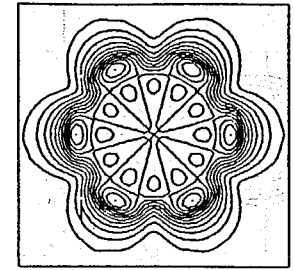
$N_\xi$	$N_\eta$	$\Theta(0,0)$	$\Theta(3,0)$	$\Theta(5,0)$	$\Theta(0,\pi/3)$	$\Theta(1,\pi/3)$	$\Theta(2,\pi/3)$
34	6	0.93235	1.30610	0.83109	0.93247	0.92417	0.75603
68	6	0.93355	1.30481	0.82782	0.93367	0.92403	0.75677
136	6	0.93403	1.30448	0.82700	0.93402	0.92399	0.75696
34	12	0.93820	1.30012	0.82253	0.93833	0.92640	0.75322
68	12	0.93946	1.29886	0.81935	0.93947	0.92627	0.75395
136	12	0.93981	1.29854	0.81854	0.93981	0.92624	0.75413
34	24	0.93974	1.29859	0.82043	0.93987	0.92700	0.75253
68	24	0.94098	1.29733	0.81727	0.94099	0.92688	0.75325
136	24	0.94132	1.29701	0.81647	0.94132	0.92685	0.75344
$\alpha$		1.93	1.97	2.03	1.92	1.85	2.03

уровня в двумерном и трехмерном изображении решения при  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.1$  показаны на рис. 2а и 2б.

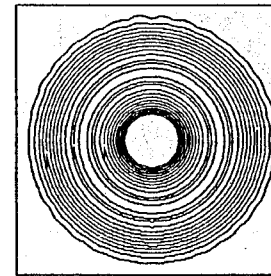
Особый интерес представляет определение всех  $\Theta$  задачи (2) – (4) со структурой, соответствующей структуре начальных приближений  $E_{j,m}$  при заданных параметрах  $\sigma$  и  $\beta$ . Проведенные численные эксперименты показали, что разработанный метод позволил получить большее число различных решений задачи (2)–(4) при фиксированных значениях параметров  $\sigma$  и  $\beta$ , чем получено в [12]. При этом замечены следующие особенности. Собственные функции  $\Theta(\xi, \eta)$  при  $j=1$  полностью сохраняют структуру начальных приближений (рис. 3а–3е). С возрастанием значения параметра  $m$  максимумы удаляются от центра. При этом наблюдается немонотонность в значениях этих максимумов для разных значений  $m$ . При  $j \geq 2$  численные исследования показали, что существует некоторое значение  $m^*$ , такое, что при  $m=m^*$  всегда получается радиально-



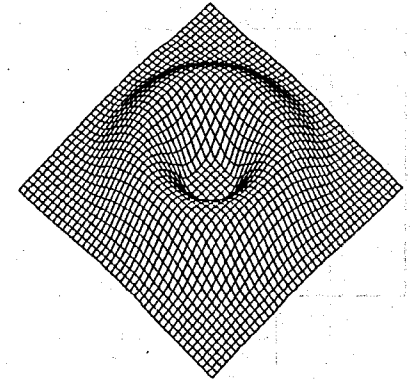
а



б

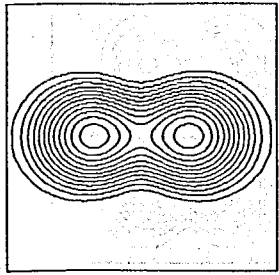
Рис. 1а, б. Начальные приближения  $E_{2,3}$ ,  $E_{2,6}$  при  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.25$ .

а

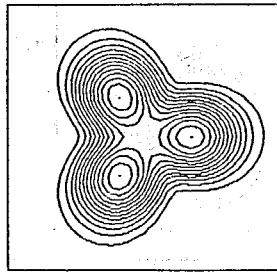


б

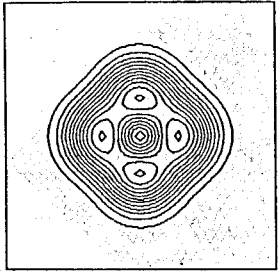
Рис. 2а, б. Радиально-симметричное решение при  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.1$ .  
Изолинии и поверхность.



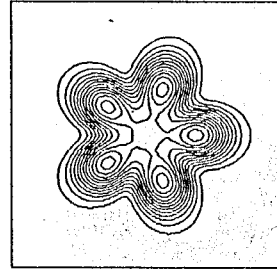
а



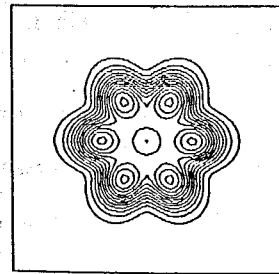
б



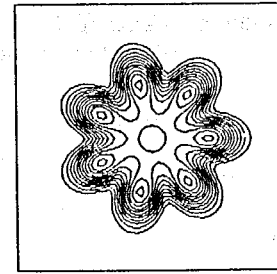
в



г

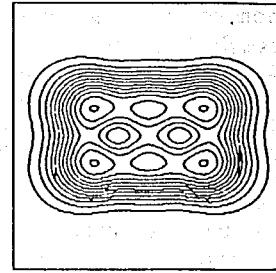


д

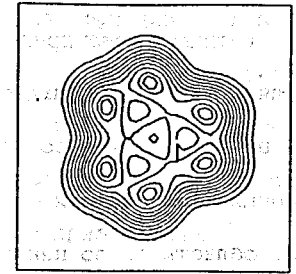


е

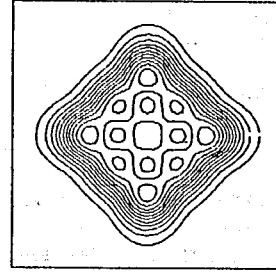
Рис. 3а-е. Изолинии  $\Phi E_{1m}$ ,  $m=2,3,4,5,6,7$  при  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.25$ .



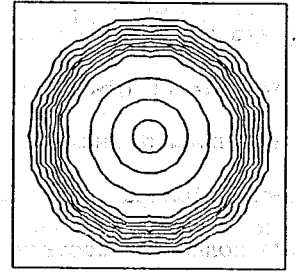
а



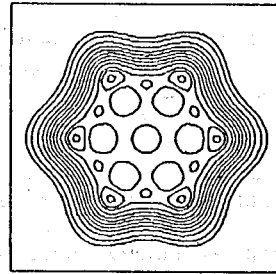
б



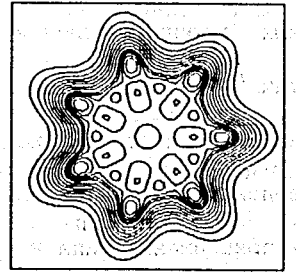
в



г



д



е

Рис. 4а-е. Изолинии  $\Phi E_{2m}$ ,  $m=2,3,4,5,6,7$  при  $\sigma=2$ ,  $\beta=3.25$ .

симметричное решение. При  $m \neq m^*$  некоторые из полученных  $\Phi$  имеют структуру, соответствующую предсказанной. В то же время получаются и  $\Phi$ , для которых наблюдается раздвоение максимумов, что находится в противоречии со структурой начальных приближений. В рассмотренных нами случаях ( $\sigma=2, \beta=3.1$ ,  $\sigma=2, \beta=3.25$ ) оказалось, что существует область около центра, в которой  $\Phi$  имеет форму плато со слабо выраженными возвышениями и низинами. На рис. 4а-4е показаны линии равного уровня для  $\Phi$ , полученных из начальных приближений  $E_{2m}$ ,  $m=2,3,4,5,6,7$ ,  $\sigma=2, \beta=3.25$ . В этом случае получено, что значение  $m^* = 5$ .

При  $\sigma=2, \beta=3.1$  ( $\beta < \sigma+1$ ,  $\beta > \sigma+1$ ) наблюдается, что при  $j=2$  с начальными приближениями  $E_{2m}$  первые две  $\Phi$  ( $m=2,3$ ) радиально-симметричны (при  $m=2$  см. рис. 2а, 2б), а следующие ( $m=4,5,6,7$ ) полностью соответствуют по своей структуре начальным приближениям.

## 7. Заключение

Разработан и апробирован численный метод для определения собственных функций горения нелинейной среды в полярных координатах. Вычислительные схемы являются устойчивыми, а итерационный метод всегда сходится.

Проведен детальный анализ собственных функций, полученных из начальных приближений типа  $E_{jm}$ . Благодаря разработанному методу удалось получить гораздо большее число собственных функций, чем в работе [12]. Показано, что гипотеза о том, что структура

собственных функций следует структуре начальных приближений, не всегда верна. Существуют собственные функции, для которых наблюдается раздвоение максимумов. Численные эксперименты показывают существование некоторого значения  $m^*$ , такого, что собственная функция  $E_{jm}^*$ ,  $j \geq 2$ , получалась всегда радиально-симметричной, независимо от начального приближения.

Авторы благодарят С. П. Курдюмову и А. Б. Потапову за многократные и полезные обсуждения.

Эти исследования частично финансированы Министерством Науки и Высшего Образования Республики Болгарии по гранту №55.

## Литература

1. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П. Условия усложнения организации нелинейной диссипативной среды. Препринт ИПМатем. АН СССР, М., № 106, 1977.
2. Самарский А. А., Галактионов В. В., Курдюмов П. С., Михайлов А. П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
3. Галактионов В. А. и др. Квазилинейные уравнения теплопроводности с источником: обострение, локализация, симметрия, точные решения, асимптотики, структуры. Совр. пробл. матем. Новейшие достижения. т. 28. ВИНТИ АН СССР, М., 1986, 95-206.
4. Самарский А. А. и др. Горение нелинейной среды в виде сложных структур. ДАН СССР, 1977, 237, № 6, 1300-1333.



5. Еленин Г. Г., Курдюмов С. П., Самарский А. А. Нестационарные диссипативные структуры в нелинейной теплопроводной среде. *ЖВМ и МФ*, 1983, т. 23, №2, 380-390.

6. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Малинецкий Г. Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами. Препринт ИГиМатем. АН СССР, М., № 16, 1979.

7. Курдюмов С. П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. В кн.: *Современные проблемы матем. физики и вычисл. математики*. М.: Наука, 1983, 217-243.

8. Курдюмов С. П. и др. Диссипативные структуры в нелинейной неоднородной горячей среде. *ДАН СССР*, 1980, 251, №3, 587-591.

9. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б. Исследование многомерной архитектуры  $\Omega$  нелинейной среды. Препринт ИГиМатем. АН СССР, №75, М., 1982.

10. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. Архитектура многомерных тепловых структур. *ДАН СССР*, 1984, 274, №5, 1072.

11. Курдюмов С. П., Куркина Е. С., Потапов А. Б., Самарский А. А. Сложные многомерные структуры горения нелинейной среды. *ЖВМ и МФ*, 1986, т. 26, №8, 1189-1205.

12. Потапов А. Б. Построение двумерных собственных функций нелинейной среды. Препринт ИГиМатем. АН СССР, №8, М., 1986.

13. Димова С. Н., Касчиев М. С., Курдюмов С. П. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. Численный метод и эксперименты. Препринт ОИЯИ Р11-88-473, Дубна, 1988.

14. Димова С. Н., Касчиев М. С., Курдюмов С. П. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае. *ЖВМ и МФ*, 1989, т. 29, №6, 61-73.

15. Димова С. Н., Касчиев М. С. Численный анализ двумерных собственных функций горения нелинейной анизотропной среды. Препринт ОИЯИ Р11-88-876, Дубна, 1988.

16. Бакирова М. И., Димова С. Н. и др. Инвариантные решения уравнений теплопроводности, описывающие направленное распространение горения и спиральные волны в нелинейной среде. *ДАН СССР*, т. 299, №2, 1988, 346-350.

17. Пузынин И. В., Пузынина Т. П. В сб.: *Алгоритмы и программы решения некоторых задач физики*. КФКИ-74-34, Будапешт, 1974, 93.

Рукопись поступила в издательский отдел

17 декабря 1991 года.