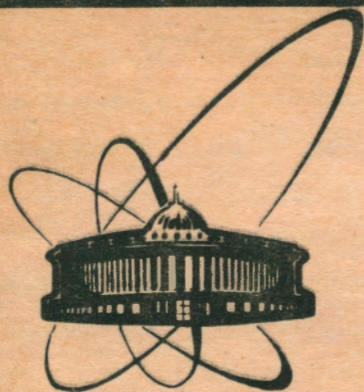


91-327



**СООБЩЕНИЯ  
ОБЪЕДИНЕННОГО  
ИНСТИТУТА  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА**

P11-91-327

**С. И. Виноцкий, И. В. Пузынин, Ю. С. Смирнов**

**ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ  
ПОВЫШЕННОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ  
ДЛЯ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ  
НА КВАЗИРАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ**

**1991**

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу рассеяния в адиабатическом представлении для стационарного уравнения Шредингера в следующей постановке<sup>/1/</sup>:

$$\phi^{(1)} = (L + k^2) \phi(r) = 0, \quad (1)$$

$$\phi^{(2)} = \left( A_1 \frac{d}{dr} + B_1 \right) \phi(r) \Big|_{r=r_{\min}} = 0, \quad (2)$$

$$\phi^{(3)} = \left( A_2 \frac{d}{dr} + B_2 \right) \phi(r) \Big|_{r=r_{\max}} = 0, \quad (3)$$

$$\phi^{(4)} = (\psi, \phi^{(1)}(k, \psi)) = 0, \quad (4)$$

$$\phi^{(5)} = (\psi, \phi^{(1)}(k_*, \psi)) = 0. \quad (5)$$

Здесь дифференциальный оператор  $L$  имеет вид:  $L = I \frac{d^2}{dr^2} + 2Q \frac{d}{dr} - U$ ;  $I$  - единичная матрица,  $k$  - диагональная матрица импульсов,  $Q(r)$  и  $U(r)$  - матрицы эффективных потенциалов задачи трех кулоновских частиц<sup>/2/</sup>, матрицы  $A_1(k^2, \delta, r), B_1(k^2, \delta, r), i=1, 2$  имеют диагональный вид и определяются поведением асимптотик волновых функций. Неизвестными являются фаза рассеяния  $\delta$  и вектор волновых функций  $\psi(r)$ .  $k_*$  - фиксированное значение импульса, при котором требуется найти решение задачи.

В работе<sup>/1/</sup> была предложена вычислительная схема решения низкоэнергетической задачи рассеяния в данной постановке на равномерной сетке. Однако на практике часто возникает необходимость использования неравномерных или квазиравномерных сеток по радиальной переменной  $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$ , что связано с поведением потенциалов  $Q(r)$  и  $U(r)$ , задаваемых в виде таблиц с неравномерным шагом<sup>/2,3/</sup>.

В настоящей работе предложен итерационный алгоритм, использующий разностные схемы повышенного порядка точности для задачи рассеяния на квазиравномерной сетке. Под квазиравномерной сеткой будем понимать конечное объединение равномерных сеток, имеющих попарно пересекающиеся концевые точки и таких, что величина шага на каждой последующей (правой) сетке в целое число раз больше, чем на предыдущей, и при этом не превышает длины предшествующей сетки, т.е.  $\Omega_h = \bigcup_{i=0}^I \Omega_{h_i}$ , где  $\Omega_{h_i} = \{r_{1_j} = r_{1_{j-1}} + h_i; j=1, \dots, J(i)\}$ ,  $r_{1_{J(i)}} = r_{1_{(i+1)_0}}$ ,  $h_{i+1} = N(i)h_i \leq |r_{1_{J(i)}} - r_{1_0}|$ ,  $i=0, \dots, I-1$ . На примерах исследована зависимость вычисленных фаз рассеяния от структуры квазиравномерной сетки и найдены границы применимости разностных схем повышенного порядка точности в задаче рассеяния трёхчастичных систем мезоатомного типа.

### 2. Аппроксимация на квазиравномерной сетке

При решении задачи рассеяния в постановке (1)-(5), как и ранее<sup>/1/</sup>, используем непрерывный аналог метода Ньютона с функцией включения возмущения  $g(t)$  с параметром  $t \geq 0$ . При этом разностную

аппроксимацию на сетке  $\Omega_h$  дифференциального оператора в уравнении (1) и краевых условиях (2)-(3) разбиваем на две части посредством функции включения:

$$\begin{cases} [ D_h^{(2)} + g(t)(D_h^{(6)} - D_h^{(2)}) + (k^2 - U) ] \phi_1, & i=2,3,\dots,N-1, \\ [ A_1(d_h^{(2)} + g(t)(d_h^{(6)} - d_h^{(2)})) + B_1 ] \phi_1, \\ [ A_2(d_h^{(2)} + g(t)(d_h^{(6)} - d_h^{(2)})) + B_2 ] \phi_N. \end{cases}$$

Здесь мы ввели следующие обозначения разностных операторов дифференцирования порядков  $O(h^6)$  и  $O(h^2)$  соответственно:

$$\begin{aligned} D_h^{(6)}(\phi_1) &= \frac{d^2}{dr^2} \phi_1 + 2Q_1 \frac{d}{dr} \phi_1 + O(h^6); & i=2,3,\dots,N-1, \\ D_h^{(2)}(\phi_1) &= \frac{d^2}{dr^2} \phi_1 + 2Q_1 \frac{d}{dr} \phi_1 + O(h^2); & i=2,3,\dots,N-1, \\ d_h^{(6)}(\phi_1) &= \frac{d}{dr} \phi_1 + O(h^6); & i=1,N, \\ d_h^{(2)}(\phi_1) &= \frac{d}{dr} \phi_1 + O(h^2); & i=1,N, \end{aligned}$$

где  $\phi_1 = \phi(r_1)$ ,  $Q_1 = Q(r_1)$  - соответствующие значения сеточных функций в точках сетки  $\Omega_h$ .

Реализация конечно-разностных аппроксимаций дифференциальных операторов на равномерной сетке, которую мы рассматривали в работе<sup>1/</sup>, особых затруднений не вызывает. Однако в случае квазиравномерной сетки возникает задача аппроксимации дифференциальных операторов в граничных точках подынтервалов квазиравномерной сетки. Для простоты рассмотрим сетку с одним изменением шага:  $\Omega_h = \{ r_1; r_i = r_{i-1} + h_0; i=2,3,\dots,m; r_i = r_{i-1} + h_1; i=m+1,\dots,M+1 \}$ . Обобщение на квазиравномерные сетки произвольной структуры не представляет сложности.

Для аппроксимации дифференциальных операторов с точностью

$O(h)$  в первых и последних трех точках сетки воспользуемся семи- и восьмиточечными разностными несимметричными формулами, а в остальных точках - семиточечными формулами. Необходимые формулы численного дифференцирования для равномерной сетки приведены в работе<sup>1/</sup>. При такой аппроксимации особой является  $m+1$ -я точка, в которой происходит изменение шага сетки с  $h_0$  на  $h_1 = nh_0$ , а также прилегающие к ней точки с номерами  $m-1$ ,  $m$ ,  $m+2$  и  $m+3$ . В точках с номерами  $m$  и  $m-1$  будем использовать несимметричные аппроксимации с меньшим левым шагом  $h_0$ , а в  $m+1$ -ой,  $m+2$ -ой и  $m+3$ -ей точках - симметричные аппроксимации, отстоящие на шаг  $h_1$ . Структура матрицы полученного разностного оператора и соответствие этой структуры сетке  $\Omega_h$ , где  $h_1 = 3h_0$  (т.е.  $n=3$ ), представлено на рис. 1.

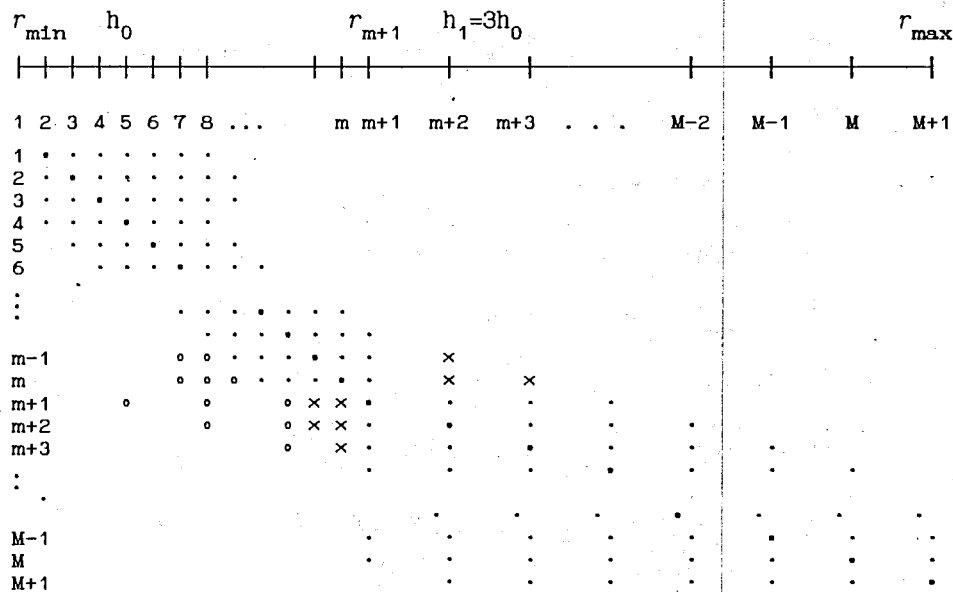


рис. 1

На рис.1 символом  $\bullet$  обозначены элементы матрицы, соответствующие точкам, относительно которых рассматривается аппроксимация, т.е. коэффициенты разностного оператора, находящиеся на главной диагонали матрицы; символом  $\circ$  - элементы, относящиеся к дополнительным точкам;  $\times$  - элементы, соответствующие точкам сетки, неиспользуемым при выбранной аппроксимации в окрестности граничной точки подынтервалов.

Соответствующие формулы численного дифференцирования на квазиравномерной сетке  $\Omega_h$  для аппроксимации шестого порядка точности с учетом изложенного выше примут вид:

$$\psi''_{m-1} = \frac{1}{180h^2}(-2\psi_{m-6} + 16\psi_{m-5} + 54\psi_{m-4} + 85\psi_{m-3} + 130\psi_{m-2} - 378\psi_{m-1} + 214\psi_m - 11\psi_{m+1}),$$

$$\psi'_{m-1} = \frac{1}{60h}(\psi_{m-5} - 8\psi_{m-4} + 30\psi_{m-3} - 80\psi_{m-2} + 35\psi_{m-1} + 24\psi_m - 2\psi_{m+1}),$$

$$\psi''_m = \frac{1}{180h^2}(11\psi_{m-6} - 90\psi_{m-5} + 32\psi_{m-4} - 670\psi_{m-3} + 855\psi_{m-2} - 486\psi_{m-1} - 70\psi_m + 126\psi_{m+1}),$$

$$\psi'_m = \frac{1}{60h}(-2\psi_{m-5} + 15\psi_{m-4} - 50\psi_{m-3} + 100\psi_{m-2} - 150\psi_{m-1} + 77\psi_m + 10\psi_{m+1}),$$

$$\psi''_{m+1} = \frac{1}{180h^2}(2\psi_{m+1-3n} - 27\psi_{m+1-2n} + 270\psi_{m+1-n} + 490\psi_{m+1} + 270\psi_{m+2} - 27\psi_{m+3} + 2\psi_{m+4}),$$

$$\psi'_{m+1} = \frac{1}{60h}(-\psi_{m+1-3n} + 9\psi_{m+1-2n} - 45\psi_{m+1-n} + 45\psi_{m+2} - 9\psi_{m+3} + \psi_{m+4}),$$

$$\psi''_{m+2} = \frac{1}{180h^2}(2\psi_{m+1-2n} - 27\psi_{m+1-n} + 270\psi_{m+1} + 490\psi_{m+2} + 270\psi_{m+3} -$$

$$-27\psi_{m+4} + 2\psi_{m+5}),$$

$$\psi'_{m+2} = \frac{1}{60h}(-\psi_{m+1-2n} + 9\psi_{m+1-n} - 45\psi_{m+1} + 45\psi_{m+3} - 9\psi_{m+4} + \psi_{m+5}),$$

$$\psi''_{m+3} = \frac{1}{180h^2}(2\psi_{m+1-n} - 27\psi_{m+1} + 270\psi_{m+2} + 490\psi_{m+3} + 270\psi_{m+4} - 27\psi_{m+5} + 2\psi_{m+6}),$$

$$\psi'_{m+3} = \frac{1}{60h}(-\psi_{m+1-n} + 9\psi_{m+1} - 45\psi_{m+2} + 45\psi_{m+4} - 9\psi_{m+5} + \psi_{m+6}).$$

Здесь мы использовали обозначение  $n=h_1/h_0=3$ . В остальных точках сетки выбирались аппроксимации для равномерной сетки с шагами  $h_0$  или  $h_1$ . При решении соответствующих краевых задач необходимо модифицировать алгоритм прогонки в тех точках, где происходит увеличение шага.

### 3. Численные расчеты

1. Рассмотрим одноканальную задачу рассеяния на оси  $r \in (-\infty; +\infty)$  с потенциалом Морзе <sup>14/</sup>, заданным аналитически:

$$U(r) = 2MD \left[ e^{-2\alpha(r-r_a)} - 2e^{-\alpha(r-r_a)} \right], \quad Q(r) \equiv 0,$$

где  $M = 8,876$ ;  $D = 0,104$ ;  $\alpha = 0,67$ ;  $r_a = 2,09$ .

В этом случае при решении задачи рассеяния в постановке (1)-(5) достаточно ограничиться разностной аппроксимацией на отрезке  $r \in [-5, 0; 45, 0]$  <sup>11/</sup>. Потенциал Морзе с указанными выше параметрами изображен на рис.2.

В таблице 1 представлена зависимость величины фазы рассеяния  $\delta_h$  от параметров квазиравномерной сетки  $\Omega_h$ . При фиксированном значении импульса  $k \in [0,0001; 0,20]$  сравниваются результаты.

Таблица 1

k	$\delta_{ан.}$	порядок схемы	$\delta_h$	$\delta_h$	$\delta_h$
			-5(0,1)45	-5(0,1)30 (0,5)45	-5(0,1)25 (0,5)45
0,0001	-6,55934578 E-4 *)	$O(h^2)$	-6,54553242	-6,54553268	-6,54553618
		$O(h^4)$	-6,55930092	-6,55930093	-6,55930093
		$O(h^6)$	-6,55934549	-6,55934549	-6,55934549
0,01	-0,65585983 E-1 *)	$O(h^2)$	-0,65448097	-0,65450866	-0,65450852
		$O(h^4)$	-0,65585535	-0,65585535	-0,65585535
		$O(h^6)$	-0,65585980	-0,65585980	-0,65585980
0,08	-0,52098999	$O(h^2)$	-0,51991665	-0,51986333	-0,51978134
		$O(h^4)$	-0,52098654	-0,52098651	-0,52098653
		$O(h^6)$	-0,52098997	-0,52098997	-0,52098997
0,10	-0,64867094	$O(h^2)$	-0,64737060	-0,64772305	-0,64765517
		$O(h^4)$	-0,64866692	-0,64866605	-0,64866603
		$O(h^6)$	-0,64867091	-0,64867091	-0,64867091
0,14	-0,89890908	$O(h^2)$	-0,89709417	-0,89578375	-0,89580013
		$O(h^4)$	-0,89890346	-0,89890538	-0,89890534
		$O(h^6)$	-0,89890904	-0,89890903	-0,89890904
0,20	-1,25832522	$O(h^2)$	-1,25595056	-1,25452773	-1,25462685
		$O(h^4)$	-1,25831789	-1,25831649	-1,25831266
		$O(h^6)$	-1,25832518	-1,25832518	-1,25832520

\*) Все значения фаз  $\delta_h$ , приведенные в первой графе таблицы 1 умножаются на  $10^{-4}$  (или E-4); во второй графе - соответственно на  $10^{-1}$ .

полученные при помощи трех конечно-разностных схем точности  $O(h^2)$ ,  $O(h^4)$  и  $O(h^6)$ . Используя эти результаты, можно определить, при каких границах квазиравномерных участков (общих для любой из трех рассматриваемых схем) сохраняется соответствующее теоретической точности каждой схемы число значащих цифр в решении. В этом примере мы ограничились следующими значениями шагов сетки:  $h_0=0,1$ ;  $h_1=0,5$  и постепенно разрежали сетку, уменьшая число точек, полученных с использованием шага  $h_0$ , и увеличивая число точек с шагом  $h_1$  (что соответствует движению слева направо по столбцам таблицы 1). Из анализа таблицы можно сделать вывод о том,

Таблица 1 (продолжение)

$\delta_h$	$\delta_h$	$\delta_h$	$\delta_h$	$\delta_h$	$\delta_h$
-5(0,1)20 (0,5)45	-5(0,1)15 (0,5)45	-5(0,1)10 (0,5)45	-5(0,1)5 (0,5)45	-5(0,1)0 (0,5)45	-5(0,5)45
-6,54559512	-6,54616253	-6,54788495	-6,56639646	-6,19529963	-6,19615081
-6,55930032	-6,55929609	-6,55934212	-6,56155944	-	-
-6,55934550	-	-	-	-	-
-0,65451480	-0,65457094	-0,65474360	-0,65659164	-0,61950778	-0,61949546
-0,65585528	-0,65585480	-0,65585947	-0,65608102	-0,65324856	-0,65324618
-0,65585980	-0,65585981	-0,65585957	-0,65585477	-0,65548984	-0,65548960
-0,51977067	-0,51974688	-0,51990586	-0,52122271	-0,49279926	-0,49278983
-0,52098645	-0,52098613	-0,52098971	-0,52115843	-0,51897997	-0,51897812
-0,52098997	-0,52098997	-0,52098978	-0,52098624	-0,52070526	-0,52070507
-0,64755292	-0,64752659	-0,64765947	-0,64926818	-0,61444820	-0,61443668
-0,64866594	-0,64866552	-0,64866993	-0,64887518	-0,64620932	-0,64620705
-0,64867091	-0,64867091	-0,64867068	-0,64866647	-0,64832238	-0,64832215
-0,89559083	-0,89542171	-0,89546425	-0,89746011	-0,85128487	-0,85126965
-0,89890521	-0,89890454	-0,89890825	-0,89917865	-0,89569593	-0,89563454
-0,89890904	-0,89890904	-0,89890873	-0,89890350	-0,89847560	-0,89844534
-1,25388858	-1,25411165	-1,25309089	-1,25501223	-1,19524948	-1,19522983
-1,25831560	-1,25831147	-1,25832114	-1,25837635	-1,25405850	-1,25405458
-1,25832518	-1,25832520	-1,25832476	-1,25831589	-1,25772223	-1,25772181

что результаты вычислений на сетке с постоянным шагом  $h = 0,1$ :  $-5,0(0,1)45,0$  (при этом требуется 500 точек по  $r$ ) и на квазиравномерной сетке  $\Omega_h$  вида:  $-5,0(0,1)15,0(0,5)45,0$  (260 точек по  $r$ ) практически не различимы в пределах точностей  $\approx 10^{-1} \div 10^{-2}$  для схемы порядка  $O(h^2)$ ,  $10^{-4} \div 10^{-5}$  для схемы порядка  $O(h^4)$ ,  $10^{-6} \div 10^{-7}$  для схемы порядка  $O(h^6)$ . Если поставить задачу минимизации числа узлов для каждой схемы при заданной точности вычислений, например ограничиться тремя значащими цифрами в фазе рассеяния, то из таблицы 1 следует: для схемы точности  $O(h^6)$  требуется 101 точка сетки  $\Omega_h = -5,0(0,5)45,0$  (см. крайний правый столбец), для схемы  $O(h^4)$  - 221 точка сетки  $\Omega_h = -5,0(0,1)10,0(0,5)45,0$  (см. 4-ый справа столбец табл. I), а для схемы  $O(h^2)$  - более 500 узлов.



Таблица 2

$k$	$\delta_{ан.}$	порядок схемн	$\delta_h; h=0,1$	$\delta_h; h=0,05$	$\delta_h; h=0,025$
0,50	0,421458813	$O(h^2)$	0,426803343	0,422795639	0,421793219
		$O(h^4)$	0,421472439	0,421459666	0,421458864
		$O(h^6)$	0,421458891	0,421458814	0,421458813
0,70	-0,290894484	$O(h^2)$	-0,280195318	-0,288218344	-0,290225334
		$O(h^4)$	-0,290875728	-0,290893302	-0,290894412
		$O(h^6)$	-0,290894374	-0,290894483	-0,290894484
1,00	-1,095603818	$O(h^2)$	-1,072126482	-1,089724890	-1,094133468
		$O(h^4)$	-1,095557124	-1,095600909	-1,095603635
		$O(h^6)$	-1,095603596	-1,095603815	-1,095603818
2,00	0,649224206	$O(h^2)$	0,551406485	0,689459314	0,659297817
		$O(h^4)$	0,649965943	0,649271437	0,649227105
		$O(h^6)$	0,649233980	0,649224358	0,649224209
3,00	0,301139287	$O(h^2)$	0,798085396	0,426420045	0,332577195
		$O(h^4)$	0,307435645	0,301549755	0,301164635
		$O(h^6)$	0,301224037	0,301140382	0,301139305
3,50	0,365203726	$O(h^2)$	1,174981348	0,561636055	0,414201942
		$O(h^4)$	0,379907815	0,366140594	0,365261714
		$O(h^6)$	0,365289670	0,365205294	0,365203756

Таблица 2 показывает область применимости схем повышенного порядка точности в зависимости от значения импульса  $k$ , выраженного в единицах задачи. С ростом  $k$  частота осцилляций волновых функций резко возрастает. Это видно на рисунках 3 и 4, где представлены волновые функции, вычисленные для потенциала Морзе при  $k=0,1$  и  $k=3,5$  соответственно. Такое поведение решений приводит к ухудшению точности результатов при достаточно больших импульсах. Из таблицы 2 видно, что при фиксированном значении шага сетки  $h=0,1$  схема порядка  $O(h^2)$  не дает ни одного верного знака в фазе  $\delta_h$ , начиная уже с  $k > 1,0$ . В то же время схема порядка  $O(h^6)$  дает 4 верных значащих цифры в решении и при  $k=3,5$ . При дальнейшем увеличении  $k$  нужно либо уменьшать шаг сетки (см. последний столбец в таб.2),

MORSE POTENTIAL

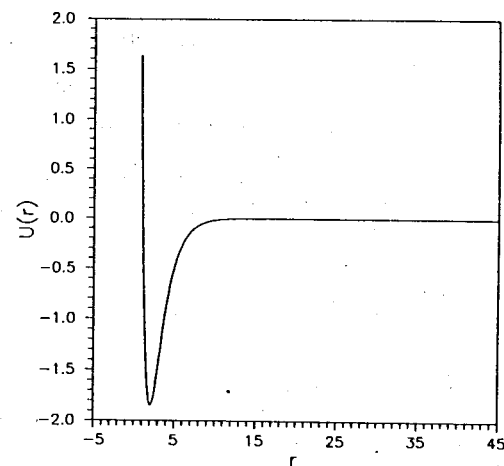


Рис.2

либо использовать специальные алгоритмы для сильно осциллирующих функций.

2. Рассмотрим приложение указанного алгоритма к конкретной физической задаче определения положения  $E_R$  и ширины  $\Gamma_R$  резонанса формы  $1P^0_{0(2,1)} + H^-$ . Соответствующий потенциал, представленный на рис.5, имеет асимптотику  $2r^{-2}$  при  $r \rightarrow \infty$ , задается в виде таблицы и качественно напоминает потенциал Морзе. Применение разработанной итерационной схемы позволяет вычислить радиальную волновую функцию  $\psi(r)$  (рис.5) и проследить зависимости фазы  $\delta = \delta(E)$  (рис.6) и сечения  $\sigma = \sigma(E)$  (рис.7). Используя стандартный графический прием определения ширины резонанса (рис.7), где полуширина резонанса соответствует полувисоте пика в сечении, имеем следующую оценку для положения  $E_R = 0,0353$  эВ и ширины  $\Gamma_R = 0,0282$  эВ резонанса. Эти величины практически совпадают с соответствующими оценками работы<sup>/5/</sup>.

Заметим, что для достаточно широких резонансов подобная процедура не приводит к хорошим результатам. Возможность

корректного определения широких резонансов дают ньютоновские итерационные схемы, в которых задача по  $r$  решается явно относительно комплексного собственного значения  $E = E - i\Gamma/2$ . Развитие итерационной схемы<sup>/1/</sup> в этом направлении не вызывает принципиальных затруднений. Можно также обобщить представленный алгоритм для квазиравномерной сетки на многоканальную задачу рассеяния.

Авторы признательны Павлову Д.В. за полезные обсуждения.

$k=0.1$

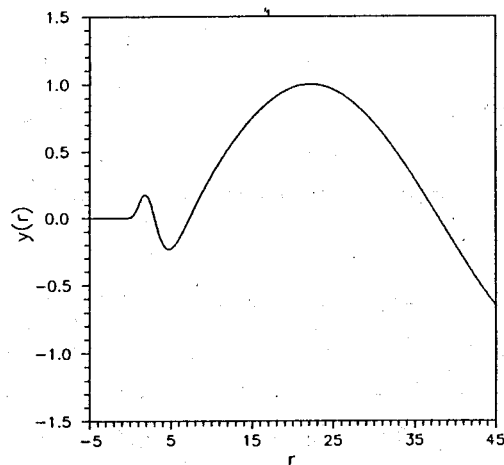


Рис. 3

$k=3.5$

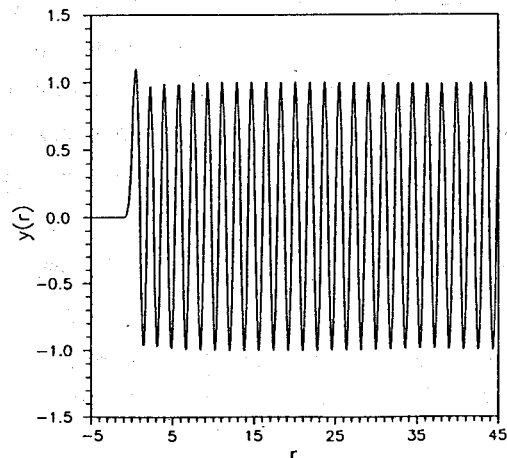


Рис. 4

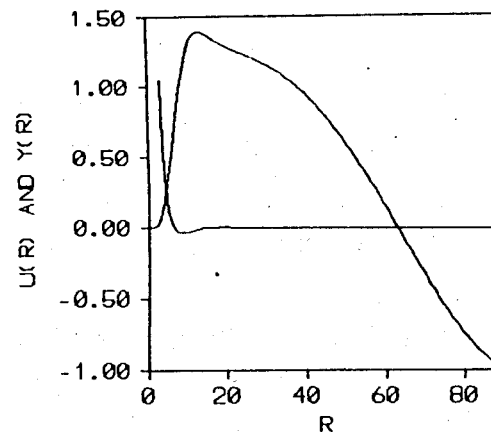


Рис. 5

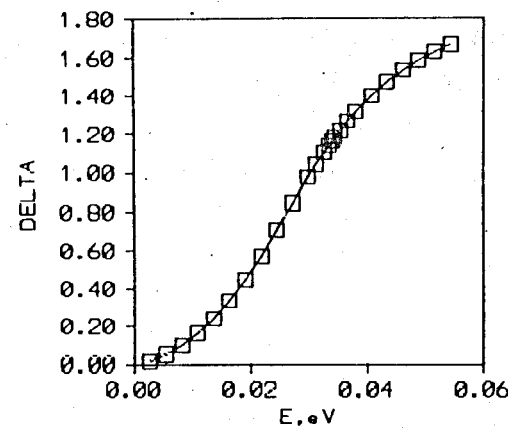


Рис. 6

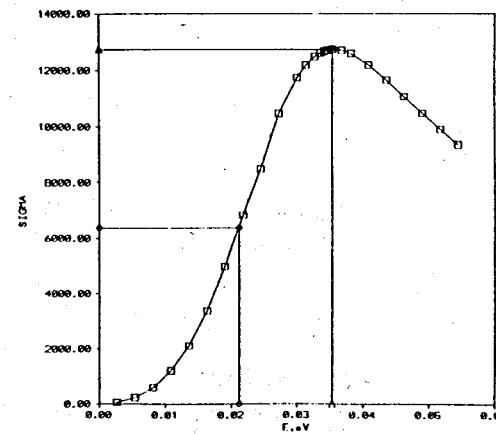


Рис. 7

Литература

1. Виноцкий С.И., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С. - ЯФ, 1990, т.52, вып.4(10), с.1176.  
Виноцкий С.И., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С. Сообщения ОИЯИ P11-91-141, Дубна, 1991.
2. Popomarev L.I., Puzynina T.P. Communications JINR E4-83-778, Dubna, 1983.
3. Абрашкевич А.Г. и др. Препринт ОИЯИ P4-88-746, Дубна, 1988.
4. Alhassid Y., Gursev F., Jachello F. - Ann.Phys., 1983, v.148, p.346.
5. Lin C.D. - Phys.Rev.Let., 1975, v.35, 17, p.1150.

Рукопись поступила в издательский отдел  
22 июля 1991 года.

Виноцкий С.И., Пузынин И.В., Смирнов Ю.С. P11-91-327  
Исследование разностных схем повышенного  
порядка точности для задачи рассеяния на квазиравномерной сетке

Предложен итерационный алгоритм, использующий разностные схемы повышенного порядка точности для задачи рассеяния на квазиравномерной сетке. На тестовых задачах исследована зависимость вычисленных фаз рассеяния от структуры квазиравномерной сетки и найдены границы применимости разностных схем повышенного порядка точности в задаче рассеяния трехчастичных систем мезоатомного типа. При помощи представленного алгоритма произведен расчет положения  $E_R$  и ширины  $\Gamma_R$  резонанса формы  ${}^1P_{0(2,1)}^0 + H^-$ .

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод авторов

Vinitsky S.I., Puzynin I.V., Smirnov Yu.S. P11-91-327  
Investigation of the Increased Accuracy Order Difference  
Schemes for the Scattering Problem at the Quasi-Uniform Mesh

An iteration algorithm for solving the scattering problem is proposed, such that uses the increased accuracy order difference schemes at the quasi-uniform mesh. The dependence of calculated phase shifts on the quasi-uniform mesh structure is investigated. The borders of the increased accuracy order difference schemes application in the scattering problem is defined. The calculation of the location  $E_R$  and the width  $\Gamma_R$  of the  ${}^1P_{0(2,1)}^0 + H^-$  form resonance is executed with the help of the present algorithm.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991