объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

P11-91-309

А.А.Бакасов, Б.Б.Говорков (мл.)

ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ТОЧЕК БИФУРКАЦИЙ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА

Направлено в журнал "Прикладная математика и механика"

1991

1. Введение

Хорошо известно [1], что функции Ляпунова являются не только красивым методом исследования устойчивости, но и допускают прямую физическую интерпретацию как энергия или энтропия рассматриваемой физической системы, записываемые в виде функций важнейших ее параметров.

Однако применяемые в современных приложениях методы качественного исследования [2-4] основаны на вычислении величин, обычно не имеющих столь же ясную физическую интерпретацию, что, вообще говоря, не совсем удобно при сравнении результатов, получаемых в практике "физическими" и "математическими" методами.

Вместе с тем, прямой метод Ляпунова содержит множество полузабытых рецептов, которые при надлежащем применении всегда приводят к построению искомой функции Ляпунова. Это делает настоятельно необходимым ознакомление широкого круга практических исследователей с этими рецептами, особенно в физических приложениях. Поэтому приводимое исследование устойчивости в точках бифуркаций стационарных решений модели Лоренца проведено методами Ляпунова для критических случаев [5,6], и изложено с той долей подробности, какую позволял объем журнальной заметки. Простые результаты, полученные этими методами частью являются новыми, а частью подтверждают ранее известные.

Система Лоренца [7,8], или трехпараметрическая система трех обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}=-\sigma x+\sigma y,\quad \dot{y}=-y+rx-xz,\quad \dot{z}=-bz+xy,\quad \sigma>0,\ r>0,\ b>0, \qquad (1.1)$$

где величина r обычно считается бифуркационным параметром, была первоначально сформулирована как динамическая модель переходных процессов в мазере [7], и несколько позже - как простейшая модель для исследования турбулентности жидкости, подогреваемой снизу в

$$\dot x_1=-\sigma x_1+\sigma x_2, \quad \dot x_2=x_1-x_2-x_1x_3, \quad \dot x_3=-bx_3+x_1x_2. \qquad (2.1)$$

Матрица линейной части системы (2.1) вырождена: соответствующее характеристическое уравнение имеет корни $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-(\sigma+1)<0$, $\lambda_3=-b<0$, т.е. реализуется критический случай с одним нулевым корнем [5,6]. Следует либо применить метод, соответствующий этому критическому случаю [5,6], либо применить прямой метод Ляпунова. Первый метод всегда дает искомый ответ после конечного числа преобразований, но приводит к достаточно громоздким выкладкам (см., к примеру, работу [17], где рассматривался критический случай с одним нулевым корнем для пятимерной системы уравнений, содержащей модель Лоренца как частный случай). Мы воспользуемся прямым методом Ляпунова и построим соответствующую функцию Ляпунова. С этой целью введем новые переменные:

$$z_1=x_1+\sigma x_2, \quad z_2=\sigma x_2-\sigma x_1, \quad z_3=\sigma x_3. \qquad (2.2)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$x_1=\frac{z_1-z_2}{\sigma+1}, \quad x_2=\frac{\sigma z_1+z_2}{\sigma(\sigma+1)}, \quad x_3=\frac{z_3}{\sigma}. \qquad (2.3)$$

Система в новых переменных принимает форму:

$$\begin{aligned}
\dot z_1 &= -z_3\frac{z_1-z_2}{\sigma+1},\\
\dot z_2 &= -(\sigma+1)z_2-z_3\frac{z_1-z_2}{\sigma+1} = -(\sigma+1)z_2+\dot z_1, \qquad (2.4)\\
\dot z_3 &= -bz_3+\frac{\sigma z_1+z_2}{\sigma+1}\,\frac{z_1-z_2}{\sigma+1}.
\end{aligned}$$

Полагаем функцию Ляпунова равной

$$V=\frac{1}{2}\left[\sigma z_1^2+z_2^2+(\sigma+1)z_3^2\right]=\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}\left[x^2+\sigma y^2+\sigma z^2\right]\geqslant 0 \qquad (2.5)$$

и вычисляем ее производную:

$$\dot V=-(\sigma+1)\left[z_2^2+bz_3^2\right]=-\sigma^2(\sigma+1)\left[(x-y)^2+bz^2\right]\leqslant 0. \qquad (2.6)$$

В силу неравенств (2.5)-(2.6) тривиальное решение системы (2.4) устойчиво, но не асимптотически. Из (2.5)-(2.6) следует, что функция

Ляпунова (2.5) является глобальной, т.е. определенной не только в окрестности C_0, а во всем пространстве переменных x, y и z. Видно, что при $r=1$ среди решений системы Лоренца нет других устойчивых решений, кроме C_0. Заметим, что функция Ляпунова (2.5) является частным случаем функции Ляпунова, полученной в [17].

3. Исследование устойчивости нетривиальных стационарных решений $C_{1,2}$ при $r=r_2=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$

Выше точки $r_2=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$ как тривиальное C_0, так и нетривиальные $C_{1,2}$ стационарные решения становятся неустойчивыми. Нетривиальные стационарные решения в точке бифуркации r_2 есть:

$$C_{1,2}\Big|_{r=r_2}=\left\{x_0,\ x_0,\ \frac{x_0^2}{b}\right\}, \qquad (3.1)$$

где обозначено $x_0=\mp\sqrt{\dfrac{b(\sigma+1)(\sigma+b+1)}{\sigma-b-1}}$. Соответствующие уравнения в вариациях $\{x_1,x_2,x_3\}$ около стационарных решений (3.1) имеют вид:

$$\dot x_1=-\sigma x_1+\sigma x_2, \quad \dot x_2=x_1-x_2-x_0x_3-x_1x_3, \quad \dot x_3=x_0x_1+x_0x_2-bx_3+x_1x_2. \qquad (3.2)$$

Характеристическое уравнение для матрицы линейной части уравнений (3.2) имеет следующие корни:

$$\rho_{1,2}=\pm i\rho_0, \quad \rho_0=\sqrt{\frac{2\sigma b(\sigma+1)}{\sigma-b-1}}, \quad \rho_3=-(\sigma+b+1). \qquad (3.3)$$

Следовательно, реализуется критический случай с двумя мнимыми корнями [5,6]. Исследование устойчивости в этом случае проводится в три этапа.

На первом этапе систему (3.2) следует привести неособенным (в общем случае нелинейным) преобразованием к виду, когда линейные части двух первых уравнений имеют гамильтонову структуру, а линейная часть третьего уравнения не содержит двух первых переменных. Дополнительным требованием является то, что наинизшая степень нелинейности в третьем уравнении должна быть не ниже, чем наинизшая степень нелинейности в первых двух уравнениях. Если новые переменные удовлетворяют этим требованиям, то первые две переменные называют критическими, а остальные (в нашем случае третья) – некритическими [5,6]. Для системы (3.2) искомое преобразование можно выбрать в виде линейного преобразования:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{2}{\rho_0 x_0} x_1 + \frac{2\sigma}{\rho_0 x_0} x_2 - \frac{\rho_0}{b(r_2-1)} x_3,\\
y_2 &= \frac{x_1 + x_2}{x_0} + \frac{\sigma+1}{b(r_2-1)} x_3,\\
y_3 &= \frac{(\sigma+1)(1-\sigma-b)}{(\sigma-b-1)\, x_0} x_1 + \frac{\sigma+1}{x_0} x_2 + x_3,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

после чего линейные части уравнений примут надлежащий вид. Для вычисления нелинейностей необходимо воспользоваться обратным преобразованием:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x_0 S(l_{22}y_1 - l_{12}y_2 + S_{13}y_3),\\
x_2 &= x_0 S(-l_{21}y_1 + l_{11}y_2 - S_{23}y_3),\\
x_3 &= 2bS(\sigma-1)(\sigma-b-1)(r_2-1)\left[\rho_0 y_1 - (\sigma+b+1)y_2 - \frac{\sigma+b+1}{r_2-1} y_3\right],
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где обозначено:

$$
\begin{aligned}
S &= -\left[2(\sigma-1)(\sigma-b-1)\{(\sigma+b+1)^2+\rho_0^2\}\right]^{-1},\\
S_{13} &= 2\sigma(\sigma-1)(\sigma-b-1),\\
S_{23} &= 2(\sigma-1)(\sigma-b-1)(b+1),\\
l_{11} &= 2b\left[(\sigma+b+1)(\sigma-b-1)+\sigma(\sigma+1)(1-\sigma-b)\right],\\
l_{12} &= 2b\left[\sigma(\sigma+b+1)(\sigma-b-1)+\sigma(\sigma+1)(\sigma-b-1)\right],\\
l_{21} &= \rho_0(\sigma-b-1)\left[b(\sigma+b+1)-(\sigma+1)(1-\sigma-b)\right],\\
l_{22} &= \rho_0(\sigma-b-1)\left[b(\sigma+b+1)-(\sigma+1)(\sigma-b-1)\right].
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Используя преобразования (3.4)-(3.6), приводим систему (3.2) к стандартной форме, требуемой при исследовании устойчивости в критическом случае с двумя мнимыми корнями [5,6]:

$$
\begin{aligned}
\dot y_1 &= -\rho_0\left[y_2 + a_{11}y_1^2 + a_{12}y_1y_2 + a_{22}y_2^2 + a_{13}y_1y_3 + a_{23}y_2y_3 + a_{33}y_3^2\right],\\
\dot y_2 &= \rho_0\left[y_1 + b_{11}y_1^2 + b_{12}y_1y_2 + b_{22}y_2^2 + b_{13}y_1y_3 + b_{23}y_2y_3 + b_{33}y_3^2\right],\\
\dot y_3 &= \rho_3\left[y_3 + d_{11}y_1^2 + d_{12}y_1y_2 + d_{22}y_2^2 + d_{13}y_1y_3 + d_{23}y_2y_3 + d_{33}y_3^2\right].
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

Коэффициенты элементарно выражаются через параметры исходных уравнений:

$$
\begin{aligned}
a_{11} &= \frac{S^2}{b}\left[l_{21}(\sigma-2b-1) - l_{22}(1-\sigma-b)\right] l_{22},\\
a_{12} &= \frac{S^2}{b}\left[2l_{12}l_{22}(1-\sigma-b) - (l_{11}l_{22}+l_{12}l_{21})(\sigma-2b-1)\right],\\
a_{22} &= \frac{S^2}{b}\left[l_{11}(\sigma-2b-1) - l_{12}(1-\sigma-b)\right] l_{12},\\
b_{11} &= \frac{\rho_0 S^2}{2\sigma b}\left[l_{22}(1-\sigma-b) - 2l_{21}(\sigma-b-1)\right] l_{22},\\
b_{12} &= \frac{\rho_0 S^2}{\sigma b}\left[(l_{11}l_{22}+l_{12}l_{21})(\sigma-b-1) - l_{12}l_{22}(1-\sigma-b)\right],\\
b_{22} &= \frac{\rho_0 S^2}{2\sigma b}\left[l_{12}(1-\sigma-b) - 2l_{11}(\sigma-b-1)\right] l_{12},
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

Остальные коэффициенты вышли при вычислениях ненулевыми и в дальнейшем не используются.

Полученная таким образом система уравнений (3.7) удовлетворяет виду, требуемому в теории критических случаев с двумя мнимыми корнями [5,6]. Следовательно, вопрос об устойчивости стационарных решений C_1 и C_2 исходной системы Лоренца (1.1) при $r=r_2$ сводится к вопросу об устойчивости тривиального решения "укороченной" системы второго порядка, составленной из "критических" переменных [5,6]:

$$
\begin{aligned}
\dot x &= -\rho_0(y + a_{11}x^2 + a_{12}xy + a_{22}y^2),\\
\dot y &= \rho_0(x + b_{11}x^2 + b_{12}xy + b_{22}y^2),
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

где коэффициенты a_{ij} и b_{kl} определены согласно (3.8), а ρ_0 – согласно (3.3).

Для построения функции Ляпунова может, однако, потребоваться бесконечное число шагов [5,6][1]. Поэтому на данном этапе необходимо решить задачу различения центра и фокуса для системы (3.9).

Эта задача была решена в [15] вместе с определением знака фокусной величины. Однако мы приводим здесь вычисление по методу К.С. Сибирского, имея ввиду простоту и высокую эффективность последнего. Этот метод [18] может быть широко использован для подобных задач, где нелинейность имеет не вторую, а произвольную конечную степень. В данном случае мы иллюстрируем метод Сибирского проблемой центра в модели Лоренца, с целью сравнения получившегося результата с аналогичным в [15].

Несмотря на то что в общем виде проблема различения центра и фокуса еще не решена, для конкретной системы (3.9) с нелинейностями второго порядка метод определения типа изолированной особой точки в начале координат уже известен. Для системы (3.9) эта задача была поставлена еще Пуанкаре [19] и фактически решена в работах [20-21]. Однако условия наличия центра в начале координат, выраженные непосредственно через коэффициенты системы (3.9), были получены лишь много позже К.С. Сибирским [16,18]. Итак, в начале координат имеет место особая точка типа центр, если коэффициенты в уравнении (3.9) удовлетворяют хотя бы одной из следующих трех серий условий [16]:

---

[1] Ни один из других известных методов не имеет здесь преимущества перед прямым методом Ляпунова, в том числе и алгоритм Баутина, примененный в [15],- в случае центра все они приводят к бесконечному числу шагов. Поэтому неясно, почему в [15] не приводится предварительное исследование проблемы центра, которое, несомненно, было проведено.

I. $a_{11}+a_{22}= b_{11}+b_{22}=0;$ (3.10)

II. $\alpha(a_{11}+a_{22})-\beta(b_{11}+b_{22})=$
$=a_{11}\alpha^3-(b_{11}+a_{12})\alpha^2\beta+(b_{12}+a_{22})\alpha\beta^2-b_{22}\beta^3=0;$ (3.11)

III. $\alpha+5(b_{11}+b_{22})=\beta+5(a_{11}+a_{22})=2a_{11}^2+2b_{22}^2+a_{11}a_{22}+b_{11}b_{22}=0,$ (3.12)

где $\alpha=a_{12}-2b_{11}$, $\beta=b_{12}-2a_{22}$. Каждая из серий условий (3.10)-(3.12) является необходимым и достаточным условием существования центра в начале координат системы (3.9). В нашем случае, когда вид коэффициентов определяется согласно (3.8), ни одна из этих серий условий не выполняется, так как в каждой серии не равны тождественно нулю уже первые входящие в эти серии выражения (см. Дополнение). Следовательно, начало координат является особой точкой типа фокус, что совпадает с одним из результатов работы [15].

Здесь необходимо сделать замечание. Условия Сибирского [16], то есть условия (3.10)-(3.12), не выполняются ни при каких положительных значениях σ и b, удовлетворяющих условиям существования бифуркационной точки $r = r_2$ стационарных решений C_1 и C_2, определяемых из (3.1). Как легко видеть из (3.3), условия существования бифуркации при $r = r_2$ есть условие наличия двух мнимых корней:

$$\sigma-b>1. \quad (3.13)$$

В квантовой оптике это условие носит название "условие плохого резонатора" [22,23] .

Перейдем к построению функции Ляпунова. Известно, что в случае фокуса функцию Ляпунова следует искать в виде [5,6,24,25]:

$$V = x^2+ y^2+\sum_{n=3}^{N} V_n(x,y), \quad (3.14)$$

где $V_n(x,y)$ - однородный полином n-го порядка относительно x и y, причем существует число N, соответствующее максимальному порядку полиномов, входящих в $V(x,y)$. Покажем, что в нашем случае $N = 4$, т.е. функция Ляпунова строится на первом же шаге известного алгоритма Ляпунова.

Вычисляя производную от $V(x,y)$ по времени в силу уравнений (3.9), получим:

$$\frac{dV}{dt}=-\rho_0\left\{2x+\frac{\partial V_3}{\partial x}+\frac{\partial V_4}{\partial x}\right\}(y+a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2)+$$
$$+\rho_0\left\{2y+\frac{\partial V_3}{\partial y}+\frac{\partial V_4}{\partial y}\right\}(x+b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2). \qquad (3.15)$$

Полученное выражение начинается членами 3-го порядка, совокупность которых записывается в виде:

$$\frac{dV^{(3)}}{dt}=-2\rho_0 x(a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2)+ \qquad (3.16)$$
$$+2\rho_0 y(b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2)+\rho_0\left\{\frac{\partial V_3}{\partial y}x-\frac{\partial V_3}{\partial x}y\right\}.$$

Чтобы производная (3.15) была знакоопределенной, необходимо, чтобы выражение (3.16) обращалось в нуль. Это единственным образом определяет форму $V_3(x,y)$, которая имеет вид:

$$V_3(x,y) = f_1x^3+ f_2x^2y + f_3xy^2+ f_4y^3, \qquad (3.17)$$

где коэффициенты равны:

$$f_1= (4b_{22}+2b_{11}-2a_{12})/3, \qquad f_2= 2a_{11},$$
$$f_3= 2b_{22}, \qquad f_4= (4a_{11}+2a_{22}-2b_{12})/3. \qquad (3.18)$$

Величины (3.18) выражаются через параметры b и σ соотношениями (3.6) и (3.8). Определив таким образом $V_3(x,y)$, потребуем далее, чтобы совокупность членов 4-го порядка в производной (3.15) была знакоопределенной, т.е. найдем такое действительное число G_4, чтобы выполнялось равенство:

$$\frac{dV^{(4)}}{dt} = -\rho_0\frac{\partial V_3}{\partial x}(a_{11}x^2+a_{12}xy+a_{22}y^2)-\rho_0\frac{\partial V_4}{\partial x}y+ \qquad (3.19)$$
$$+\rho_0\frac{\partial V_3}{\partial y}(b_{11}x^2+b_{12}xy+b_{22}y^2)+\rho_0\frac{\partial V_4}{\partial y}x = G_4(x^2+y^2)^2.$$

Значение G_4 определяется единственным образом [5,6,25] из формулы

$$G_4=\frac{\rho_0}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\frac{\partial V_3(\sin\theta.\cos\theta)}{\partial(\sin\theta)}(b_{11}\cos^2\theta+b_{12}\cos\theta\sin\theta+b_{22}\sin^2\theta)-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial V_3(\cos\theta,\sin\theta)}{\partial(\cos\theta)}(a_{11}\cos^2\theta+a_{12}\cos\theta\sin\theta+a_{22}\sin^2\theta)\right\}d\theta. \qquad (3.20)$$

Вычисление дает:

$$G_4= kP_3P_4 \neq 0, \qquad (3.21)$$

где

$$k = 16\sigma^2b^3(\sigma+b+1)^2(\sigma-b-1)^2(\sigma-1)^3, \qquad (3.22)$$

$$P_3= b^3+b^2\sigma+3b^2-3b\sigma^2+3b-\sigma^3-\sigma^2+\sigma+1, \qquad (3.23)$$

$$P_4= -4(\sigma^2+\sigma-3)b^2+2(\sigma^2-5\sigma+3)(\sigma+1)b-2(\sigma-5)b^3+3b^4-\sigma^4-2\sigma^3+2\sigma+1. \qquad (3.24)$$

Положительность величины k при условии (3.13) очевидна. Легко показать, что полиномы P_3 и P_4 при этом условии отрицательны. Например, используя (3.13) можно записать следующее неравенство:

$$P_3= \left\{(b+1)^3-\sigma^3\right\} + \left\{\sigma(1-\sigma)\right\} + \left\{b\sigma(b-3\sigma)\right\} < 0.$$

поскольку каждый член в фигурных скобках отрицателен. Легко оценить сверху и полином P_4, если ввести новую переменную [15] $\xi=\sigma-b-1$, которая в силу (3.13) положительна:

$$P_4=-\left[\xi^4+2\xi^3(b+3)+4\xi^2(b^2+5b+3)+2\xi(4b^3+17b^2+19b+4)+2b(b^3+6b^2+11b+6)\right]<0.$$

Таким образом, мы получили:

$$G_4= kP_3P_4> 0. \qquad (3.26)$$

Следовательно, начало координат для уравнения (3.9) является неустойчивым фокусом.

Задача исследования устойчивости стационарных решений C_1 и C_2 исходной модели Лоренца при $r=r_2=\sigma(\sigma+b+3)/(\sigma-b-1)$ была решена построением функции Ляпунова. Легко видеть, что давно известный рецепт [5] построения функции Ляпуова приводит к очень простым и непродолжительным вычислениям, в отличии от уже использованных в этой задаче методов [15,26]. При этом предварительное решение задачи о различении центра и фокуса является неизбежным этапом и для методов работ [15,26], поскольку в случае центра и эти методы приводят к бесконечному числу шагов в вычислениях.

4. Дополнение

Не равные тождественно нулю первые выражения в сериях условий Сибирского (3.10)-(3.12) имеют следующий явный вид (члены группируются сначала по степеням параметра b, а затем – по σ):

$$a_{11}+a_{22}=-2\rho_0 b\sigma\,(3b^6\sigma-3b^6+2b^5\sigma^2+14b^5\sigma-16b^5-13b^4\sigma^3+15b^4\sigma^2+33b^4\sigma-35b^4-2b^3\sigma^4-34b^3\sigma^3+34b^3\sigma^2+42b^3\sigma-40b^3+11b^2\sigma^5-9b^2\sigma^4-38b^2\sigma^3+34b^2\sigma^2+27b^2\sigma-25b^2+8b\sigma^5-8b\sigma^4-16b\sigma^3+16b\sigma^2+8b\sigma-8b-\sigma^7+\sigma^6+3\sigma^5-3\sigma^4-3\sigma^3+3\sigma^2+\sigma-1)\neq 0; \quad (\text{Д1})$$

$$\alpha(a_{11}+a_{22})-\beta(b_{11}+b_{22})=16\rho_0 b^3\sigma^2(3b^{11}\sigma^3-9b^{11}\sigma^2+9b^{11}\sigma-3b^{11}+b^{10}\sigma^4+28b^{10}\sigma^3-90b^{10}\sigma^2+92b^{10}\sigma-31b^{10}-21b^9\sigma^5+67b^9\sigma^4+70b^9\sigma^3-402b^9\sigma^2+431b^9\sigma-145b^9+\text{ члены, содержащие меньшие степени параметра } b)\neq 0; \quad (\text{Д2})$$

$$\alpha+5(b_{11}+b_{22})=-2\rho_0 b\sigma(11b^6\sigma-11b^6+8b^5\sigma^2+46b^5\sigma-54b^5-55b^4\sigma^3+61b^4\sigma^2+107b^4\sigma-113b^4-14b^3\sigma^4-130b^3\sigma^3+138b^3\sigma^2+138b^3\sigma-132b^3+51b^2\sigma^5-53b^2\sigma^4-142b^2\sigma^3+146b^2\sigma^2+91b^2\sigma-93b^2+6b\sigma^6+32b\sigma^5-50b\sigma^4-64b\sigma^3+82b\sigma^2+32b\sigma-38b-7\sigma^7+7\sigma^6+21\sigma^5-21\sigma^4-21\sigma^3+21\sigma^2+7\sigma-7)\neq 0. \quad (\text{Д3})$$

Литература

1. Климонтович Ю.Л.// УФН. 1989. Т.158. Вып.1. С.59-91.
2. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1990. 486 с.
3. Афраймович В.С., Быков В.В., Шильников Л.П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца// ДАН СССР. 1977. Т.234. №2. С.336-339.

4. Марсден Дис., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. М.: Мир, 1980. 368 с.
5. Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М-Л: Гос. изд. техн.-теор. лит, 1950. 472 с.
6. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966. 530 с.
7. Grasiuk A.Z., Oraevsky A.N. in: 4th International Congress on Microwave Tubes. Scheveningien, 1962, p.446
8. Lorenz E.N., J. Atmos. Sci, 1963, v.20, p.130-141; p.448.
9. Haken H., Phys. Lett, 1975, vol. A53, p.77.
10. Sparrow C., The Lorenz Equations: Bifurkations, Chaos, and Strange Attractors, Springer-Verlag, 1982, New York Heidelberg Berlin. 268 p.
11. Ackherhalt J.H., Milloni P.W., Shih M.-L. Chaos in Quantum Optics// Phys. Rep., 1985, V.128, Nos.4-5, p.205-300.
12. Hao Bai-Lin, Chaos, World Scientific Publishing Co., 1984, Singapore Ney Jersy London Hong Kong.
13. Хакен Г. Синергетика. М: Мир, 1980. 404 с.
14. Fluctuations, Instabilities and Phase Transitions, ed. by T.Riste, Plenum Press, New York, 1975.
15. Рощин В.Н.// ПММ. 1978. Т.42. №5. С.950-952.
16. Сибирский К.С.// Изв. АН МССР. 1963. №11. С.86-91.
17. Bakasov A.A. Rigorous qualitative study of the dynamic model for the single mode laser. The critical case.// Phys. Lett. A. 1990. V.146. P.209-216.
18. Сибирский К.С. Введение в алгебраическую теорию инвариантов дифференциальных уравнений. Кишинев: Штиница, 1982.
19. Пуанкаре А. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М-Л: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1947. 392 с.
20. Dulac H., Bull. sciences math., 32, 230(1908).

21. Kapteyn W., Proc. konikl. Akad. Wet., Amsterdam, 13, 2p., 124(1911), 14 , 2p., 1185(1912), 15 , 1p., 46(1912).

22. Ораевский А.Н.// Труды ФИАН. 1986. Вып.171 1.

23. Abraham N.B., Lugiato L.A., Narducci L.M.// J. Opt. Soc. Am. B 1985. V.2. N°1. p.7.

24. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М-Л: Гос. изд. техн.-теор. лит, 1949. 550 с.

25. Амелькин В.В., Лукашевич Н.А., Садовский А.П., Нелинейные колебания в системах второго порядка, Минск: Изд. БГУ, 1982. 207 с.

26. Pade J., Rauh A., and Tsarouhas G., Phys. Lett. A, Vol.115, N 3, p.93.

Рукопись поступила в издательский отдел
3 июля 1991 года.