91-259

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-91-259

Т.Жанлав, И.В.Пузынин

ИТЕРАЦИОННАЯ СХЕМА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ, ОСНОВАННАЯ НА МЕТОДЕ УСТАНОВЛЕНИЯ

1991

Жанлав Т., Пузынин И.В. P11-91-259

Итерационная схема для нелинейных задач, основанная на методе установления

Изучена итерационная схема для нелинейного уравнения, полученная на основе метода установления. Исходной задаче сопоставлено нелинейное эволюционное уравнение. Соответствующая дискретная схема приводит к задачам, для численного решения которых был применен непрерывный аналог метода Ньютона. Результаты применены к решению граничной задачи для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка. Доказаны теоремы о монотонной сходимости как итерационной схемы в целом, так и итерационной ньютоновской схемы на каждом шаге итераций.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1991

Перевод авторов

Zhanlav T., Puzynin I.V. P11-91-259

Iterative Scheme for Nonlinear Problem Based on Stabilization Method

An iterative scheme for a nonlinear equation obtained on the basis of the stabilization method is studied. The original problem is associated with a nonlinear evolutionary equation. The corresponding discrete scheme leads to nonlinear problems which are solved by the continuous analog of Newton's method. The results have been used to solve the boundary value problem for a nonlinear differential equation of second order. The theorems about the monotonic convergence both of the iterative scheme as a whole and of the iterative Newton scheme at every step of iteration are proved.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1991

Один из способов построения итерационных схем для решения стационарных задач базируется на методе установления /I-3/. Такие итерационные схемы получаются как результат применения разностных аппроксимаций соответствующих эволюционных уравнений. При этом условия сходимости таких схем могут быть исследованы как самостоятельно, так и в связи со свойствами решения эволюционного уравнения.

В данной работе рассмотрен первый подход к изучению свойств итерационных схем. В п.I рассматриваются условия сходимости итерационной схемы для нелинейного функционального уравнения,полученной формально как разностная аппроксимация соответствующей эволюционной задачи. В п.2 изучаются условия сходимости таких итераций нелинейной граничной задачи для дифференциального уравнения второго порядка. При этом на каждом шаге основного итерационного процесса используются ньютоновские итерации.

I. Метод установления для функциональных уравнений

Рассмотрим нелинейное функциональное уравнение

$$\varphi(z)=0 \quad , \tag{I.I}$$

где нелинейный оператор φ отображает В-пространство X в В-пространство Y. Предположим, что уравнение (I.I) имеет единственное решение z^* в выпуклой области D пространства X и в D существуют непрерывные производные $\varphi'(z)$, $\varphi''(z)$, причем линейный оператор $\varphi'(z)$ имеет ограниченный обратный оператор $(\varphi'(z))^{-1}$. Вводя непрерывный параметр $t\in[0,\infty)$, сопоставим уравнению (I.I) абстрактную нестационарную задачу Коши:

$$B(t)\frac{dz}{dt} = \varphi(z(t)), \qquad z(0)=z_0 . \tag{I.2}$$

Здесь z_0 - заданный элемент из пространства X и $B(t)$ - некоторый линейный оператор, переводящий В-пространство X в Y. Предположим, что задача (I.2) имеет решение. Если $z(t)\to z^*$ при $t\to\infty$, то уравнение (I.2) соответствует методу установления. Класс уравнений метода установления для задачи (I.I) обозначим через Q_∞. Известные методы решения нелинейных функциональных уравнений,

Объединенный институт ядерных исследований БИБЛИОТЕКА

такие, как непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН)/4,5/, непрерывный аналог R –процесса/6,7/, эволюционный ньютоновский процесс/8/, могут быть записаны в виде (I.2) с различными операторами B. При некоторых условиях гладкости и обратимости оператора B имеет место соотношение $z(t) \to z^*$ при $t \to \infty$. Таким образом, все упомянутые выше методы принадлежат классу Q_∞.

Рассмотрим случай, когда $B(t) = E$ – единичный оператор, а $\varphi(z)$ переводит пространство X в себя. Тогда задача (I.2) приобретает вид

$$\frac{dz(t)}{dt} = \varphi(z(t)), \qquad (I.3)$$

$$z(0) = z_0 .$$

Рассмотрим следующее дискретное по параметру t приближение задачи (I.3):

$$\frac{z^{n+1}-z^n}{\tau_n} = \varphi(z^{n+1}), \qquad (I.4)$$

$$z^0 = z_0 , \quad 0 < \tau_n \le 1,$$

которое, в случае установления, можно рассматривать как итерационный процесс решения задачи (I.I). Сформулируем одно достаточное условие установления решения задачи (I.4).

Теорема I.I. Пусть выполняются условия:

1. Для каждого n решение задачи (I.4) существует и принадлежит выпуклой области D.
2. В области D существует производная Фреше $\varphi'(z)$ и обратный оператор $(E-\tau\varphi'(z))^{-1}$, причем выполняется неравенство

$$\|(E-\tau\varphi'(z))^{-1}\| \le \tilde q < 1 , \quad 0 < \tau \le 1 . \qquad (I.5)$$

Тогда решение задачи (I.4) сходится при $n \to \infty$ к решению z^* задачи (I.I).

Доказательство. Обозначим $\theta^{n+1}=z^{n+1} - z^*$. Из уравнений (I.I) и (I.4) легко получаем

$$(E-\tau_n\varphi'(\tilde z_n))\theta^{n+1} = \theta^n, \qquad (I.6)$$

где $\tilde z_n = \alpha_n z^{n+1} + (1-\alpha_n) z^*$, $\alpha_n \in (0,1)$.

В силу первого условия теоремы имеем $\tilde z_n \in D$. Тогда существует оператор $(E-\tau_n\varphi'(\tilde z_n))^{-1}$. Из (I.6) с учетом неравенства (I.5) получаем

$$\|\theta^{n+1}\| \le \tilde q \cdot \|\theta^n\| \le \ldots \le \tilde q^{n+1} \cdot \|\theta^0\| .$$

Отсюда следует, что $z^n \to z^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана. Нелинейную задачу (I.4) можно решать, например, с помощью либо непрерывного аналога метода Ньютона, либо итераций

$$(E-\tau_n\varphi'(z^n))v^n = \varphi(z^n) , \qquad (I.7)$$

$$z^{n+1} = z^n + \tau_n v^n ,$$

которые получены методом квазилинеаризации/3/. В итерациях (I.7) величина τ_n играет роль параметра и, естественно, ее выбор можно связать с минимизацией невязки /9,10/.

2. Итерация для дифференциальных уравнений

2.I. В качестве примера рассмотрим краевую задачу

$$z'' = f(x,z,z') , \quad 0 \le x \le \ell , \qquad (2.I)$$

$$z(0)=z(\ell)=0 .$$

Пусть $u(x)$, $U(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемые на $[0,\ell]$ функции, удовлетворяющие однородным краевым условиям и неравенству $u(x) < U(x)$ при $0 < x < \ell$. Пусть $D=\{0 \le x \le \ell,\ u(x) \le z \le U(x)\}$ – выпуклая область. Предположим, что задача (2.I) имеет единственное решение z^* в области D. Для задачи (2.I) итерации (I.4) имеют вид

$$\frac{z^{n+1}-z^n}{\tau_n} = z^{n+1\,''} - f(x, z^{n+1}, z^{n+1\,'}) , \qquad (2.2)$$

$$z^0 = z_0(x) , \quad z^{n+1}(0)=z^{n+1}(\ell) = 0 ,$$

где $z_0(x) \in D$. Предположим, что задача (2.2) имеет решение при каждом фиксированном n и что это решение также принадлежит области D. Условие (I.5) в теореме I.I выполняется при определенных ограничениях относительно нелинейной функции $f(x,z,z')$ и ее производных.

Теорема 2.I. Пусть функция $f(x,z,z')$ имеет непрерывные производные по аргументам z, z' до второго порядка включительно и выполнено условие

$$f_z(x,z,z') \geq \delta > 0 \qquad (2.3)$$

в области D. Тогда итерации (2.2) сходятся при $n \to \infty$ к решению z^* задачи (2.I).

Доказательство. Обозначим $e^{n+1}=z^{n+1}-z^*$. Из уравнений (2.I), (2.2) получаем

$$e^{n+1''} - f_{z'}(x,\tilde z_n,\tilde z_n')e^{n+1'} - \left(f_z(x,\tilde z_n,\tilde z_n') + \frac{1}{\tau_n}\right)e^{n+1} = -\frac{e^n}{\tau_n}, \qquad (2.4)$$

$$e^{n+1}(0) = e^{n+1}(\ell) = 0,$$

где $\tilde z_n = \alpha_n z^{n+1} + (1-\alpha_n) z^*$, $\alpha_n \in (0,1)$.
В силу условия (2.3) и $\tau_n > 0$ задача (2.4) имеет единственное решение и для ее решения справедлива оценка /II/

$$\|e^{n+1}\|_C \leq q \|e^n\|_C, \quad q = \frac{1}{1+\delta\tau_n} < 1, \qquad (2.5)$$

где $\|e\|_C = \max_{0\le x\le\ell} |e(x)|$.
Из (2.5) ясно, что $\|e^n\|_C \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. $z^n \to z^*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Следует отметить, что при исследовании сходимости итерационного процесса для задачи (2.I) обычно накладываются ограничения на нелинейную часть уравнения /I2/. Для определенного класса нелинейности в /I3/ найдены общие условия, при которых имеет место стабилизация решения. Условие (2.3) часто встречается /I4,I5/ в исследовании краевых задач (2.I).

2.2. Для численного решения нелинейной задачи (2.2) применим НАМН /4,5/. В результате мы имеем итерационный процесс

$$L_k^n v_k = v_k'' - f_{z'}(x, z_k^{n+1}, z_k^{n+1'})v_k' - \left(f_z(x, z_k^{n+1}, z_k^{n+1'}) + \frac{1}{\tau_n}\right)v_k = r_k^{n+1} \qquad (2.6)$$

$$v_k(0) = v_k(\ell) = 0,$$

$$z_{k+1}^{n+1} = z_k^{n+1} + \sigma_k v_k, \quad z_0^{n+1} = z^n, \ n, k = 0,1,\dots, \quad 0 < \sigma_k \leq 1, \qquad (2.7)$$

где

$$r_k^{n+1} = \frac{z_k^{n+1} - z^n}{\tau_n} - z_k^{n+1''} + f(x, z_k^{n+1}, z_k^{n+1'}). \qquad (2.8)$$

Можно сформулировать условия глобальной сходимости итераций (2.6)-(2.7).

Теорема 2.2. Предположим, что все условия теоремы 2.I выполнены и квадратичная форма $f_{zz}\xi^2 + 2f_{zz'}\xi\eta + f_{z'z'}\eta^2$ относительно ξ и η положительно (отрицательно) полуопределена во всей рассматриваемой области определения D, т.е.

$$f_{zz}(x,w,w')\xi^2 + 2f_{zz'}(x,w,w')\xi\eta + f_{z'z'}(x,w,w')\eta^2 \geq 0 \ (\leq 0). \qquad (2.9)$$

Пусть при некотором значении $k \geq 0$ выполняется условие

$$r_k^{n+1} \geq 0 \ (\leq 0). \qquad (2.10)$$

Тогда имеет место монотонная сходимость итерационного процесса (2.6)-(2.7):

$$z^{n+1} \leq \dots \leq z_{k+2}^{n+1} \leq z_{k+1}^{n+1} \leq z_k^{n+1}, \qquad (2.11)$$

$$(z_k^{n+1} \leq z_{k+1}^{n+1} \leq z_{k+2}^{n+1} \leq \dots \leq z^{n+1}).$$

Доказательство. При выполнении условий (2.3),(2.I0) дифференциальный оператор L_k^n в (2.6) является монотонным /I6/ (см. стр.356-358) и, следовательно, имеем $v_k \leq 0$. Тогда из (2.7) вытекает, что

$$z_{k+1}^{n+1} \leq z_k^{n+1}.$$

Далее запишем r_{k+1}^{n+1} в виде

$$r_{k+1}^{n+1} = (1-\sigma_k) r_k^{n+1} + \frac{\sigma_k^2}{2}\left\{\tilde f_{zz} v_k^2 + 2\tilde f_{zz'} v_k v_k' + \tilde f_{z'z'} v_k'^2\right\}, \qquad (2.12)$$

где $\tilde f$ – значение функции f в некоторой точке из области D. Если учесть неравенства (2.9) и (2.I0), то из (2.I2) следует неравенство $r_{k+1}^{n+1} \geq 0$. Отсюда, как и в предыдущем шаге, получаем $z_{k+2}^{n+1} \leq z_{k+1}^{n+1}$ и т.д. Легко видеть, что при фиксированном n последовательность $\{z_k^{n+1}\}$ монотонно убывающая. Обозначим $e_m^{n+1} = z^{n+1} - z_m^{n+1}$. Тогда легко проверить, что e_m^{n+1} удовлетворяет

$$\bar L_m^n e_m^{n+1} = (e_m^{n+1})'' - \bar f_{z'}(e_m^{n+1})' - \left(\bar f_z + \frac{1}{\tau_n}\right)e_m^{n+1} = r_m^{n+1}, \qquad (2.13)$$

$$e_m^{n+1}(0) = e_m^{n+1}(\ell) = 0, \quad m = k, k+1, \dots,$$

где $\bar f$ – значение функции f в некоторой точке из области D. Отсюда, как и выше, получаем неравенство $e_m^{n+1} \leq 0$ для всех $m \geq k$. Таким образом, верно (2.II) и, следовательно, монотонная ограниченная снизу последовательность имеет предел. Покажем, что

$\lim\limits_{k\to\infty} z_k^{n+1} = z^{n+1}$. Действительно, для решения задачи (2.I3) справедлива оценка[II]

$$\| e_k^{n+1} \|_C \le q \cdot \| r_k^{n+1} \|_C . \qquad (2.I3')$$

Из формулы (2.7) ясно, что для сходимости последовательности z_k^{n+1} необходимо, чтобы $v_k \to 0$ при $k \to \infty$. С другой стороны, в силу условия (2.3) и $\tau_n > 0$ оператор L_k^n в (2.6) имеет ограниченный обратный оператор $\|(L_k^n)^{-1}\| \le q$. Из уравнения (2.6) найдем

$$v_k = (L_k^n)^{-1} \cdot r_k^{n+1} .$$

Отсюда ясно, что $r_k^{n+1} \to 0$ при $k \to \infty$, либо в противном случае мы пришли бы к выводу, что v_k не стремится к нулю при $k \to \infty$. Это противоречило бы тому, что последовательность z_k^{n+1} сходится при $k \to \infty$. Тогда из (2.I3') вытекает, что

$$\| z^{n+1} - z_k^{n+1} \|_C \longrightarrow 0 \text{ при } k \to \infty .$$

Аналогичным образом доказывается вторая часть неравенства (2.II).

Теорема 2.2. уточняет доказательство теоремы из работы[I7].

2.3. Теорема 2.I устанавливает сходимость итераций (2.2). Справедлива также следующая

Теорема 2.3. Пусть r_0^m $(m \geqslant 1)$ знакопостоянна на интервале $(0,\ell)$ и выполняются все условия теоремы 2.2. Тогда имеет место монотонная сходимость итераций (2.2), то есть справедливы неравенства

$$z^* \le \ldots \le z^m \le z^{m-1} \quad \text{при} \quad r_0^m \geqslant 0 , \qquad (2.I4)$$

$$\left(z^* \geqslant \ldots \geqslant z^m \geqslant z^{m-1} \quad \text{при} \quad r_0^m \le 0 \right). \qquad (2.I5)$$

Доказательство. Пусть $r_0^m \geqslant 0$, $m \geqslant 1$. Тогда, согласно теореме 2.2 справедливы неравенства

$$z^m \le \ldots \le z_2^m \le z_1^m \le z_0^m = z^{m-1} .$$

Отсюда и из (2.2),(2.8) имеем

$$r_0^{m+1} = \frac{z_0^{m+1} - z^m}{\tau_m} - z_0^{m+1''} + f(x, z_0^{m+1}, z_0^{m+1'}) = -z^{m''} + f(x, z^m, z^{m'}) =$$

$$= - \frac{z^m - z^{m-1}}{\tau_{m-1}} \geqslant 0 .$$

Следовательно, выполняются неравенства $z^{m+1} \le z^m \le z^{m-1}$, $r_0^{m+i} \geqslant 0$, $i=1,2,\ldots$. Необходимо доказать неравенство $z^* \le z^n$ при любом натуральном $n \geqslant m$. Для этого рассмотрим равенства

$$-z^{n''} + f(x, z^n, z^{n'}) = r_0^{n+1} , \quad z^n(0) = z^n(\ell) = 0 ,$$

$$z^{*''} - f(x, z^*, z^{*'}) = 0 , \quad z^*(0) = z^*(\ell) = 0 .$$

Из них легко можно прийти к задаче

$$(z^* - z^n)'' - \bar f_{z'}(z^* - z^n)' - \bar f_z (z^* - z^n) = r_0^{n+1} ,$$

$$[z^* - z^n]_{x=0,\ell} = 0 .$$

Здесь $\bar f$ – значение функции f в некоторой средней точке, принадлежащей D. Отсюда с учетом условия (2.3) и $r_0^{n+1} \geqslant 0$ получаем неравенство $z^* - z^n \le 0$.

Аналогичным образом доказываются неравенства (2.I5). Рассмотрим еще одно утверждение, характеризующее качественное свойство решения дифференциальной задачи (2.I).

Теорема 2.4. Пусть выполнятся неравенство (2.9) и условия теоремы 2.I. Пусть также дифференциальное неравенство

$$z'' - f(x,z,z') \le 0 \; (\geqslant 0) \qquad (2.I6)$$

имеет хотя бы одно неположительное (не отрицательное) решение, удовлетворяющее условиям $z(0) = z(\ell) = 0$. Тогда решение краевой задачи (2.I) неположительно (неотрицательно) на отрезке $[0, \ell]$.

Доказательство. Неположительное решение неравенства (2.I6) возьмем в качестве начального приближения в итерациях (2.6), (2.7), т.е. $z^0 \le 0$, $z^{0''} - f(x, z^0, z^{0'}) \le 0$. Тогда из (2.8) вытекает неравенство

$$r_0^1 = \frac{z_0^1 - z^0}{\tau_0} - z_0^{1''} + f(x, z_0^1, z_0^{1'}) = -z^{0''} + f(x, z^0, z^{0'}) \geqslant 0 .$$

Отсюда ясно, что имеет место монотонная сходимость как для непрерывного аналога метода Ньютона, так и для итераций (I.4). Таким образом, выполняются неравенства

$$z^* \le \ldots \le z^n \le \ldots \le z^1 \le z^0 \le 0 .$$

Совершенно аналогично доказываются обратные неравенства. Отметим, что с помощью предлагаемого итерационного процесса численно решены[I7] некоторые уравнения, встречающиеся в нелинейной теории поля при изучении взаимодействия элементарных частиц.

Литература

I. Самарский А.А. Теория разностных схем – М.: Наука, 1983.
2. Бахвалов Н.С. Численные методы – М.: Наука, 1976.
3. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи – М.: Мир, 1968.
4. Гавурин М.К. Изв.вузов, сер.матем., 1958, № 5(6), с.18.
5. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В. ЭЧАЯ, 1973, 4, I,с.127.
6. Александров Л. ЖВМ и МФ, 1970, т.II, № I, с.36.
7. Александров Л. Диф.уравнения, 1977, т.XШ, № 7, с.1281.
8. Жанлав Т., Пузынин И.В. ОИЯИ, P11-91-100, Дубна, 1991.
9. Красносельский М.А. и др. Приближенное решение операторных уравнений – М.: Наука, 1969.
10. Кивистик Л.А. ДАН СССР, 1961, т.136, № I, с.22.
11. Треногин В.А. Функциональный анализ – М.: Наука, 1980.
12. Глинская Н.Н., Мысовских И.П. Вестник Ленинградского университета, сер.матем., 1954, № 8, с.49.
13. Friedman A. J. Math. and Mech. 1959, v.8, No 1, p.57.
14. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений – М.: Мир, 1978.
15. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям – М.: Наука, 1976.
16. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика – М.: Мир, 1969.
17. Жанлав Т., Пузынин И.В. ОИЯИ, P11-87-722, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
10 июня 1991 года.