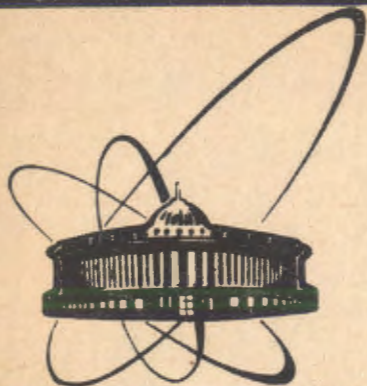


90-588



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

P11-90-588

П.Г.Акишин

**ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ
ДЛЯ РАСЧЕТА ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ
МАГНИТОСТАТИКИ МЕТОДОМ ОБЪЕМНЫХ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ**

1990

Введение

Метод объемных интегральных уравнений является эффективным методом решения задач магнитостатики. Наиболее популярный программный пакет общего назначения, использующий интегральную постановку, GFUN3D был создан Симкиным и др. /1/.

Пусть $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ есть индукция, напряженность и намагниченность магнитного поля. Имеет место следующее интегральное уравнение:

$$\vec{H}(\vec{a}) = \vec{H}^s(\vec{a}) + \frac{\nabla \vec{a}}{4\pi} \int_G (\vec{M}(\vec{x}), \nabla_{\vec{a}} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}|}) dV_{\vec{x}}, \quad (1)$$

где G - область, заполненная магнитным материалом, $\vec{H}^s(\vec{a})$ - поле от токовых обмоток. Величины $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ связаны нелинейными соотношениями

$$\vec{H}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0 \mu(|\vec{B}(\vec{x})|)}, \quad (2)$$

$$\vec{M}(\vec{x}) = \frac{\vec{B}(\vec{x})}{\mu_0} - \vec{H}(\vec{x}),$$

где $\mu = \mu(|\vec{B}|)$ - магнитная проницаемость, μ_0 - магнитная проницаемость вакуума.

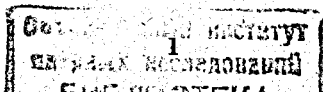
Для дискретизации (1) область G разбивается на элементы $\{G_i\}$:

$$G = \bigcup_{i=1}^N G_i.$$

Полагая $\vec{B}, \vec{H}, \vec{M}$ постоянными в G_i и равными соответственно $\vec{B}_i, \vec{H}_i, \vec{M}_i$, можно записать следующую дискретизованную систему уравнений:

$$\vec{H}_i = \vec{H}^s(\vec{a}_i) + \frac{\nabla \vec{a}_i}{4\pi} \left(\sum_{j=1}^N \int_{G_j} (\vec{M}_j, \nabla_{\vec{a}_i} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{a}_i|}) dV_{\vec{x}} \right) \Big|_{\vec{a}_i = \vec{a}_i}, \quad (3)$$

$i = \overline{1, N}$



где \bar{a}_i являются центроидами G_i . Величины $\bar{H}_i, \bar{V}_i, \bar{M}_i$ удовлетворяют соотношениям (2).

Отметим основные сложности использования метода объемных интегральных уравнений.

1. Полностью заполненная матрица дискретизованной системы уравнений. В связи с этим с ростом размерности дискретизованной задачи имеет место квадратичный рост вычислительных затрат на определение коэффициентов матрицы и требований к оперативной памяти ЭВМ для хранения найденных коэффициентов.

2. Проблема решения нелинейной дискретизованной системы уравнений большой размерности с полностью заполненной матрицей.

Одним из путей преодоления сложностей, указанных выше, является использование областей специального вида ^{2-4/}.

В данной работе автор следует идее, сформулированной А.Б.Самохиним в ^{4/} для задач теории дифракции.

1. Погружение расчетной области в параллелепипед

Рассмотрим случай, когда область G является параллелепипедом. Разобьем G на $N \times L \times M$ равных параллелепипедов (рис. I).

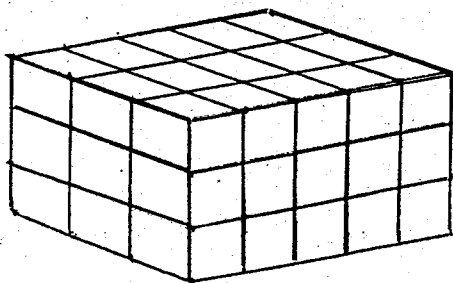


Рис. I

Введем следующую индексацию элементов:

$$G = \bigcup G_{i,j,k} \quad i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, L-1}, \quad k = \overline{0, M-1}.$$

Для данного разбиения запишем (3) в следующем виде:

$$\bar{H}_{i,j,k} = \bar{H}^s(\bar{a}_{i,j,k}) + \sum_{i_1=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{L-1} \sum_{k_1=0}^{M-1} [A_{i_1,j_1,k_1}^{i,j,k}] \bar{M}_{i_1,j_1,k_1} \quad (4)$$

$$i = \overline{0, N-1}, \quad j = \overline{0, L-1}, \quad k = \overline{0, M-1}$$

где $[A_{i_1,j_1,k_1}^{i,j,k}] \bar{B} = \frac{\nabla \bar{a}}{4\pi} \left(\int_{G_{i_1,j_1,k_1}} (\bar{B}, \nabla \frac{1}{|\bar{x} - \bar{a}|}) dV_x \right) \Big|_{\bar{a} = \bar{a}_{i,j,k}}$

Как отмечалось в ^{4/}, матрицы $[A_{i_1,j_1,k_1}^{i,j,k}]$ являются функциями величин $(i - i_1), (j - j_1), (k - k_1)$. Поэтому коэффициенты всех матриц $[A_{i_1,j_1,k_1}^{i,j,k}]$ можно выразить через коэффициенты $N \cdot L \cdot M$ матриц $[A_{i,j,k}^{0,0,0}]$ ($i = \overline{0, N-1}, j = \overline{0, L-1}, k = \overline{0, M-1}$). В дальнейшем матрицы $[A_{i,j,k}^{0,0,0}]$ будем обозначать как $[C_{i,j,k}]$. Пусть $[D_1], [D_2], [D_3]$ есть следующие диагональные матрицы:

$$[D_1] = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [D_2] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [D_3] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Доопределим $[C_{i,j,k}]$ для отрицательных i :

$$[C_{-i,j,k}] = [D_1][C_{i,j,k}][D_1].$$

Аналогично

$$[C_{i,-j,k}] = [D_2][C_{i,j,k}][D_2],$$

$$[C_{i,j,-k}] = [D_3][C_{i,j,k}][D_3].$$

Для вычисления тройной суммы в правой части (4) можно использовать быстрые алгоритмы умножения блочно-теплицевых матриц на вектор ^{5/}. Положим $\omega_1 = 2\pi \cdot (2N-1)^{-1}, \omega_2 = 2\pi \cdot (2L-1)^{-1}, \omega_3 = 2\pi \cdot (2M-1)^{-1}$. Пусть $\hat{M}_{i,j,k}$ есть следующая сумма:

$$\hat{M}_{i,j,k} = \sum_{l_1=0}^{N-1} \sum_{j_1=0}^{L-1} \sum_{k_1=0}^{M-1} \exp(\omega_1 \cdot i \cdot l_1 + \omega_2 \cdot j \cdot j_1 + \omega_3 \cdot k \cdot k_1) \cdot \bar{M}_{i,j_1,k_1}. \quad (5)$$

Аналогично

$$[\hat{C}_{i,j,k}] = \sum_{l_1=-(N-1)}^{N-1} \sum_{j_1=-(L-1)}^{L-1} \sum_{k_1=-(M-1)}^{M-1} [C_{i,j_1,k_1}] \exp(\omega_1 \cdot i \cdot l_1 + \omega_2 \cdot j \cdot j_1 + \omega_3 \cdot k \cdot k_1). \quad (6)$$

Тогда тройная сумма $\bar{S}'_{i,j,k}$ в правой части (4) есть

$$\bar{S}'_{i,j,k} = \alpha \sum_{l_1=0}^{2N-1} \sum_{j_1=0}^{2L-1} \sum_{k_1=0}^{2M-1} \exp(-\omega_1 \cdot i \cdot l_1 - \omega_2 \cdot j \cdot j_1 - \omega_3 \cdot k \cdot k_1) \cdot [\hat{C}_{i,j_1,k_1}] \cdot \hat{M}_{i,j_1,k_1}, \quad (7)$$

где $\alpha = ((2N-1)(2L-1)(2M-1))^{-1}$.

2. Решение нелинейной дискретизованной системы

Запишем систему уравнений (4) в сокращенном виде

$$\bar{H} = \bar{H}^s + [A] \bar{M}. \quad (8)$$

Как отмечалось выше,

$$[A] \bar{M} = [F^*] [C] [F] \bar{M}, \quad (9)$$

где $[F]$ и $[F^*]$ есть прямое и обратное трехмерное дискретное преобразование Фурье, определяемое по формулам (5), (7), а $[C]$ — есть блочно-диагональная матрица из (6). По главной диагонали $[C]$ стоят симметричные матрицы с действительными коэффициентами размера $[3 \times 3]$. Отметим, что спектр матрицы $[A]$ определяется спектром матрицы $[C]$, спектр которой может быть легко вычислен.

Для решения (8) используется следующий итерационный процесс:

$$\bar{B}_{k+1} = \bar{H}^s + ([A] + [E]) \bar{M}(\bar{B}_k) \quad (10)$$

$$\bar{B}_0 = \bar{H}^s$$

$$k = 1, 2, \dots,$$

где $[E]$ — единичная матрица.

Итерационный процесс (10) заканчивается, если $\|\bar{M}(\bar{B}_{k+1}) - \bar{M}(\bar{B}_k)\|$ меньше наперед заданной величины. С учетом разложения (9) для каждого шага итерационного процесса (10) требуется $O(NLM \cdot (N+L+M))$ операций.

Очевидно, что предложенный алгоритм может быть использован и в случае, когда часть элементов разбиения параллелепипеда отсутствует. Пусть $[D]$ есть диагональная матрица, характеризующая разбиение параллелепипеда (на соответствующем месте стоит 1, если элемент принадлежит области магнитного материала, и 0 в противном случае). Итерационный процесс (10) заменяется на следующий итерационный процесс:

$$\bar{B}_{k+1} = \bar{H}^s + ([A] + [E])[D] \bar{M}(\bar{B}_k) \quad (11)$$

$$\bar{B}_0 = \bar{H}^s$$

$$k = 1, 2, \dots$$

Итерационный процесс заканчивается, если $\|D(\bar{M}(\bar{B}_{k+1}) - \bar{M}(\bar{B}_k))\|$ меньше наперед заданной величины. Отметим, что в этом случае мы определяем поле не только в ферромагнетике, а в центроидах всех элементов разбиения параллелепипеда.

3. Численные результаты

Предложенный алгоритм был использован для создания комплекса программ расчета магнитоэлектронных полей "BAR". Для определения коэффициентов дискретизованных уравнений и вычисления трехмерного дискретного преобразования Фурье в процессе решения нелинейной системы были разработаны параллельные алгоритмы, базирующиеся на распределенном вычислительном комплексе ЭВМ ЕС-1061 и матричном процессоре ЕС-2706. При работе с комплексом программ "BAR" имеется возможность учета симметрии поля рассчитываемой магнитной системы. Данный комплекс использовался для расчета магнитного поля дипольного магнита нуклотрона ЛВЭ ОИЯИ (рис.2). На рис.3 приведено разбиение восьмой части магнита, используемое в расчетах. В таблице приведены результаты расчетов магнитного поля для двух разбиений. В первом случае $N=14$, $L=12$, $M=14$, во втором $N=30$, $L=12$, $M=14$. Время центрального процессора ЕС-1061 в первом случае составило 8 мин 48 с, во втором 18 мин 9 с. Для вычисления поля в рабочей области магнита (в данном случае она имеет форму параллелепипеда) использовалась трехмерная сплайн-аппроксимация. Каждая компонента поля по значениям поля в центроидах элементов приближалась полиномиальной функцией от переменных x, y, z , имеющей смешанную производную по x, y, z до третьего порядка по каждой переменной и непрерывную до второго порядка.

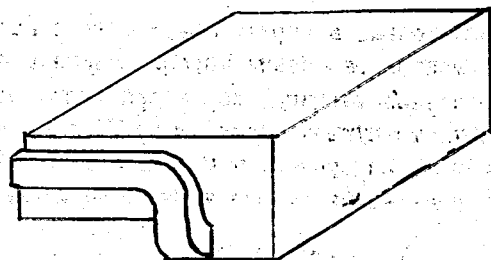


Рис.2.

Восьмая часть дипольного магнита.

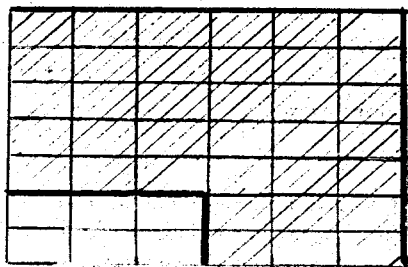


Рис.3.

Разбиение магнита, используемое в расчетах.

Таблица

X	0.0539	0.1617	0.2696	0.3775	0.4854	0.5932	0.7011
I	1.8803	1.8771	1.8701	1.8581	1.8080	1.7988	1.7876
II	1.8781	1.8722	1.8600	1.8412	1.8153	1.7984	1.7766

Литература

1. Armstrong A.G., Collie A.M., Diserens C.J., Newman N.J., Simkin M.J. and Trowbridge C.W., New developments in the magnet design program GFUN. Rutherford Laboratory Report, RL-75-060.
2. Pasciak J.E., An iterative algorithm for the volume integral method for magnetostatics problem. Comp. Math. with Appls. Vol.8, 283-290 (1982).
3. Акишин П.Г. Об одном методе расчета магнитных полей в системах с осесимметричной конфигурацией ферромагнетика. ЖВМ и МФ, 1989, т.29, с.1168-1174.
4. Самохин А.Б. Исследование задач дифракции электромагнитных волн в локально-неоднородных средах. ЖВМ и МФ, 1990. т.30, № I, с.107-121.
5. Воеводин В.В., Тыртышников Е.Е. Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами. М.: Наука, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1990 года.