

90-219



ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА

Ш 122

P11-90-219

Е. П. Шабалин

СТОХАСТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА  
ИМПУЛЬСНОГО РЕАКТОРА  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ

Направлено в Оргкомитет конференции "Безопасность быстрых реакторов", Сноубед, США, 12-16 августа 1990 года, и в журнал "Атомная энергия"

1990

## 1. Введение

Для обычных реакторов известны два типа неустойчивости и, соответственно, два типа поведения мощности за пределами устойчивости: асимптотический рост мощности и нелинейные автоколебания. Недавно был обнаружен другой тип неустойчивости, характерный для импульсного реактора периодического действия (и.р.п.д.) – возникновение колебаний мощности с частотой точно в 2 раза меньше частоты пульсации реактивности [1,2]. Физически природа неустойчивости заключается в "чистом" запаздывании отрицательной обратной связи в и.р.п.д. – на один импульс мощности.

Интересен и важен с точки зрения анализа безопасности реактора вопрос о том, каков характер поведения мощности и.р.п.д. за пределами устойчивости. Частный случай был рассмотрен в работе [1]. Здесь дан анализ решений уравнений дискретной модели динамики и.р.п.д., справедливость которой бесспорно доказана практической работой реакторов ОИЯИ [3,4].

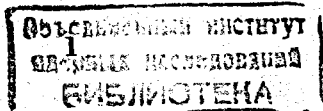
### 2. Простейшая дискретная нелинейная модель динамики импульсного реактора периодического действия

Пусть обратная связь в и.р.п.д. имеет простейший вид, т.е. существует единственный её механизм – мгновенный температурный эффект реактивности. В этом случае, пренебрегая изменением источника запаздывающих нейтронов в течение процесса, можно описать динамику реактора рекурсивными уравнениями [1]:

$$\rho_{n+1} = \varphi \cdot (\rho_n + k_0 \cdot Q_0 \cdot q_n) \quad (I-1)$$

$$q_n = \exp(\rho_n + \rho_0) - 1, \quad (I-2)$$

где  $\rho_n$  – реактивность обратной связи в  $n$ -м импульсе мощности (для рассматриваемого типа реакторов "реактивность"



равна превышению коэффициента размножения нейтронов в пике импульса мощности над его критическим значением и измеряется в ед.  $\beta_{имп}$  - "импульсной доли запаздывающих нейтронов" [5]);

$\rho_0$  - внешняя реактивность;

$q_n$  - относительное отклонение энергии  $n$ -го импульса мощности реактора от его начального (равновесного) значения  $Q_0$ , при котором  $\rho_n = \rho_0 = 0$ ;

$\varphi = \exp(-\alpha \cdot T)$ ;  $\alpha$  - постоянная времени охлаждения активной зоны реактора,  $T$  - период пульсации реактора (временной интервал между двумя последовательными импульсами мощности);

$k_0$  - амплитуда импульсной функции обратной связи, т.е. "отклика" реактивности на изменение энергии одного импульса:  $k(t) = k_0 \cdot \exp(-\alpha \cdot t)$ . Очевидно,  $\varphi = k(T)/k_0$ .

В уравнении (I-1) второе слагаемое в скобках есть изменение реактивности из-за дополнительного, сверх среднего, нагрева топлива в предыдущем ( $n-1$ -м) импульсе, равного  $q_n \cdot Q_0 / c$  ( $c$  - теплоёмкость топлива). Коэффициент  $\varphi$  учитывает охлаждение реактора (соответственно, изменение реактивности) за время между соседними импульсами мощности.

Как следует из уравнений (I), поведение мощности и т.п. строго определено начальными условиями - значениями величин  $Q_0$  и  $\rho_0$ , а рабочая точка реактора (равновесное состояние  $q_n = 0$ ) соответствует значениям  $\rho_0 = 0$  и  $\rho_n = 0$ . Так как целью данной работы является изучение поведения мощности реактора вне пределов области стабильности, рабочую точку реактора следует считать неустойчивой. Это значит, что любое, сколь угодно малое отклонение  $\rho_0$  от нуля вызывает такие изменения мощности (энергии импульсов) реактора во времени (в дальнейшем именуемые "движением"), которые уже не зависят от  $\rho_0$ , а целиком управляются механизмом обратной связи. Поэтому можно считать  $\rho_0$  равным нулю в уравнении (I), которое теперь будет иметь такой вид:

$$\rho_{n+1} = \varphi \cdot (\rho_n + k \cdot Q \cdot (\exp \rho_n - 1)) \quad (I-3)$$

( для упрощения обозначений опущены индексы у величин  $k_0$  и  $Q_0$  ).

Для анализа устойчивости рабочей ("неподвижной") точки обычно линеаризуют уравнение динамики. Линеаризация (I-3) приводит к уравнению

$$\rho_{n+1} = \varphi \cdot (1 + kQ) \cdot \rho_n,$$

$$\text{или } \rho_{n+1} / \rho_n = \varphi \cdot (1 + kQ) = r, \quad (I-4)$$

из которого следует условие устойчивости реактора:

$$|r| \leq 1 \quad (r = \varphi \cdot (1 + k \cdot Q)). \quad (2)$$

Если параметр  $r$  удовлетворяет (2), то небольшое возмущение  $\rho_0$  приводит лишь к временному изменению мощности, и реактор постепенно возвращается к равновесному состоянию  $q_n = 0$ . Напротив, при  $r < -1$  сколь угодно малое возмущение реактивности вызывает непрекращающееся движение ( надо помнить, что при этом обратная связь отрицательна). Как было показано ранее [1,2], при значениях  $r$  в интервале  $[-1, -1,5]$

реактор выходит на режим периодических колебаний с периодом, в 2 раза превышающим период пульсации  $T$ , т.е. на режим попеременных импульсов (рис. I). Физическая природа этого явления заключается в том, что в импульсном реакторе неизбежно

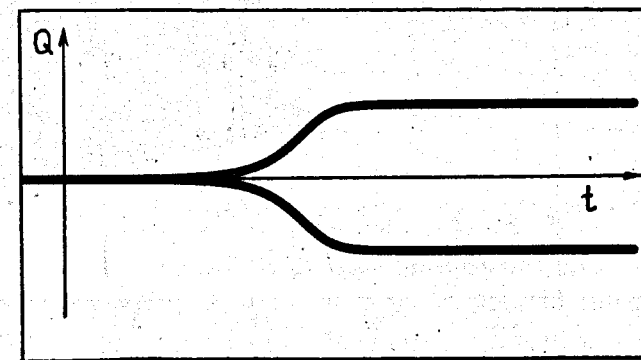


Рис. I. Временная зависимость энергии (Q) импульсов мощности и т.п. в неустойчивом состоянии вблизи границы устойчивости ( $r = -1,05$ ); верхняя и нижняя ветви соответствуют четным и нечетным импульсам.

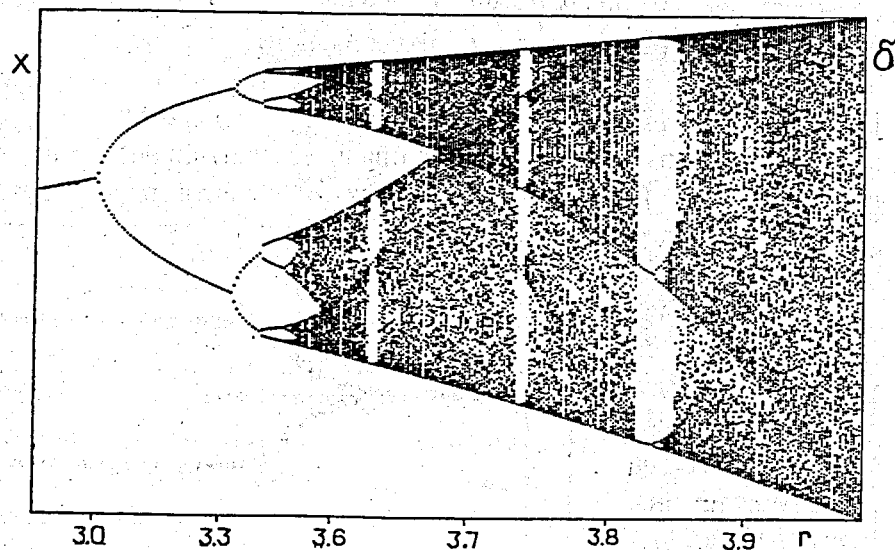
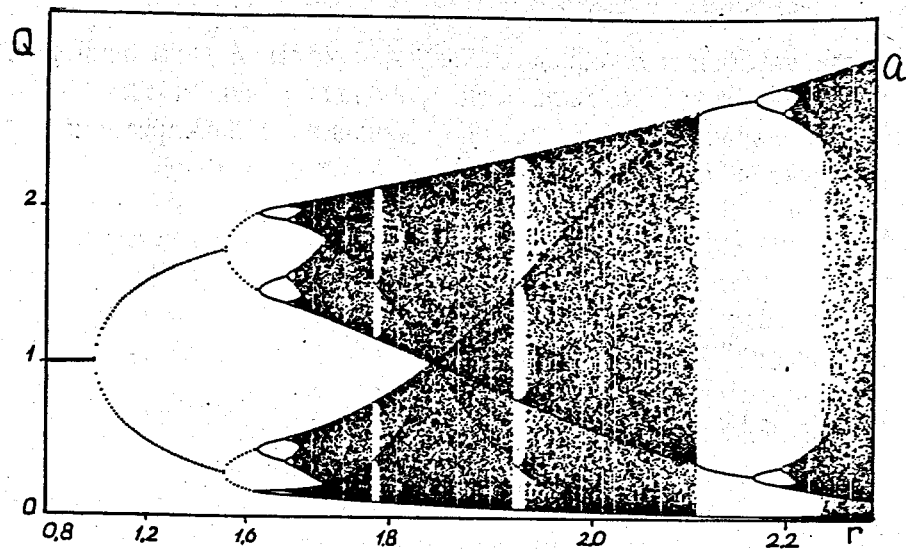


Рис.2. Установившиеся значения энергии импульсов мощности  $Q$  в свободных колебаниях в зависимости от параметра обратной связи  $\gamma$  для реактора, описываемого ур-нием (I-3) ("диаграмма Файгенбаума") (а).

Диаграмма Файгенбаума для ур-ния (3) (б).

имеет место "чистое" запаздывание обратной связи на один период пульсации, а это и есть предпосылка к неустойчивости динамической системы. Колебания мощности и.р.п.д. за границей устойчивости в то же время являются устойчивыми, и их амплитуда может быть определена из уравнения (I-3) [1].

Вопрос состоит в том, что будет при меньших, чем  $-1,5$ , значениях  $\gamma$ ; иначе говоря, каково будет поведение реактора с более глубокой отрицательной обратной связью? На рис.2а показаны значения энергии импульсов мощности в установившихся циклах свободных колебаний при разных значениях  $\gamma$  от  $-0,8$  до  $-2,5$  ( $\varphi$  - постоянна и равна  $0,98$ ). Из рисунка ясно, что при  $\gamma = -1,5$  двухточечный цикл, который стабилен для  $\gamma$ , меньших по модулю, становится неустойчив и уступает место 4-точечному циклу - колебаниям с периодом  $4T$ . Этот в свою очередь теряет устойчивость при  $\gamma \approx -1,67$ , и возникает цикл с периодом  $8T$ . Такое последовательное удвоение периода продолжается бесконечно в точках  $\gamma_k$ , располагающихся всё ближе друг к другу по мере возрастания  $k$  и сходящихся к  $\gamma_\infty = 1,696\dots$ , где неожиданно возникает хаотическое движение - неупорядоченное изменение энергии импульсов мощности ( $Q$ ) как в  $Q$ -пространстве (см. рис.2а), так и во времени (рис. 3).

Значения  $Q$  мечутся непредсказуемо между верхним и нижним пределами. Этот феномен - беспорядок, порождаемый строго детерминированным уравнением (здесь - уравнением (I-3) динамики и.р.п.д.), был открыт в конце 70-х годов и назван

"детерминированным хаосом" [6,7]. Он оказался весьма типичным явлением для многих динамических систем. На рис.2б показан

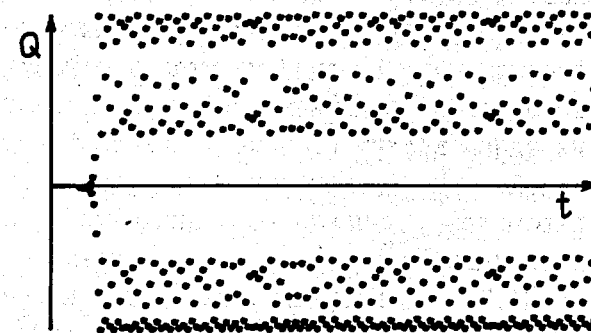


Рис.3. Временная зависимость энергии импульсов мощности и.р.п.д. в неустойчивом состоянии вдали от границы устойчивости ( $\gamma = -1,71$ ).

хрестоматийный пример, так называемая "диаграмма Файгенбаума"—установившиеся значения переменной  $x$ , которые определяются уравнением

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \quad (3)$$

— моделью численности биологических популяций [ 8 ]. Уравнение (3) имеет "неподвижную" точку  $x=1-1/r$ , устойчивую в интервале  $1 < r < 3$ ; при  $r > 3$  неустойчивость ведёт к нелинейным свободным колебаниям  $x$ . Сравнивая диаграммы рис.2а и 2б, вы видите удивительную их схожесть, удивительную потому, что породившие их уравнения (1-3) и (3) весьма несхожи.

Как показал М.Файгенбаум [ 9 ], для большого класса нелинейных рекурсионных соотношений  $x_{n+1} = f(x_n)$ , имеющих единственный максимум порядка  $z > 1$  ( т.е.  $f(x_m) - f(x) \propto |x - x_m|^z$  для  $(x - x_m)$  достаточно малой), характерны универсальные свойства и одинаковый путь перехода от периодического к хаотическому движению (называемый теперь "сценарием Файгенбаума") независимо от конкретного вида рекурсионного соотношения. К этому же классу относится и уравнение (1-3), обладающее свойствами файгенбаумовского перехода. Перечислим их здесь кратко (точная и полная формулировка дана в [9,10]):

1. В некотором интервале изменения управляющего параметра, начиная от значения, соответствующего границе устойчивости "в малом" (для ур-ния (1-3) — от  $r_1 = -1$  до  $r_\infty \approx -1,7$ ), итерации сходятся к периодическим устойчивым циклам с периодом  $2^k$  итераций ( $2^k$ -точечные циклы) с  $k$ , изменяющимся от 1 до  $\infty$  в точках  $r_k$  — точках "бифуркаций удвоения периода".

2. Значения  $r_k$ , точки бифуркаций удвоения периода, имеют "скейлинг", т.е. подчиняются масштабному соотношению:

$$\frac{r_{k+1} - r_k}{r_{k+2} - r_{k+1}} \rightarrow \delta \quad \text{при } k \rightarrow \infty.$$

Число  $\delta = 4,6692\dots$  — одна из универсальных констант Файгенбаума.

3. Размещение точек периодического цикла  $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots, \rho_k)$  в пространстве  $\rho$  также обнаруживает скейлинг, при каждой бифуркации воспроизводя себя в  $\alpha$  раз меньшем масштабе;  $\alpha = 2,5029\dots$  Как следствие этого, любая малая область на диаграммах 2а или 2б, будучи увеличенной, станет подобна другой области той же диаграммы при меньшем  $k$ .

4. При значении  $r = r_\infty$  цикличность уступает место хаотическому движению.

5. Для  $|r| > r_\infty$  среди хаоса имеются "окна" регулярности — малые области с последовательностью  $m \cdot 2^k$ -точечных циклов, где  $k$  возрастает от 0 до  $\infty$ , а  $m$ , любое натуральное число, — период цикла, которым открывается "окно".

6. При каждой бифуркации удвоения периода в фурье-спектре колебаний появляются две новые субгармоники.

Детальное объяснение и доказательство универсальности свойств перехода Файгенбаума можно найти в оригинальных работах [7-12].

Вернёмся к диаграмме  $Q(r)$  на рис.2а, к её стохастической правой части. Прежде всего, бросаются в глаза периодические "окна", неожиданно возникающие среди преобладающего хаоса. Первым появляется 20-точечный цикл при  $r = -1,713\dots$  Заметно, что чем меньше начальный период в "окне", тем шире "окно" на оси  $r$ , где размещается последовательность циклов, испытывающих бифуркации удвоения периода. Так, первое "окно" с начальным периодом 2 (левая часть диаграммы) занимает на оси  $r$  сегмент  $\Delta r = 0,696\dots$ ; "окно" с начальным периодом  $m=3$  — сегмент  $\Delta r = 0,13\dots$ ; для  $m=5$   $\Delta r \approx 0,01$ , а для  $m=12$  — не более 0,001. Эти периодические "окна", как уже было сказано выше, типичны для файгенбаумовского перехода.

Интересен вопрос о том, почему строго детерминированные уравнения приводят к хаосу. Исчерпывающее объяснение дано, например, в книге [ 11 ], поэтому ограничимся здесь общим утверждением, что это связано с одновременным действием двух факторов — быстрым разбеганием двух начально близких траекторий и "свёртыванием" их в заданный ограниченный

интервал. Подробнее остановимся на вопросе - в какой степени движение является хаотическим? Из рис. 3 видно, что оно не обладает свойствами "белого" шума. Какова же мера его хаотичности?

Рассмотрим две последовательности итераций ("траектории"), начинающихся в близких точках  $x_0$  и  $x_0 + \varepsilon_0$  ( $\varepsilon_0$  мало). Первая итерация (и последующие) дают  $x_1 = f(x_0)$  и  $x_1 + \varepsilon_1$ , где  $\varepsilon_1 = f'(x_0) \cdot \varepsilon_0$ . Очевидно, траектории будут расходиться, если  $\langle \varepsilon_1 / \varepsilon_0 \rangle = \langle |f'(x)| \rangle = R > 1$  (здесь знак  $\langle \rangle$  означает усреднение по всей траектории). Чем быстрее расходятся близкие траектории, тем меньше возможность предсказания их - после расхождения на полный интервал и свёртывания траектория "забывает" своё прошлое. Следовательно, естественно определить степень хаотичности как величину, обратную количеству итераций, в течение которых можно их предсказать. Если  $\varepsilon_{int}$  есть величина порядка интервала изменения  $x$ , а  $N$  - количество итераций, о которых только что шла речь, то можно записать соотношение

$$\varepsilon_{int} \propto R^N \cdot \varepsilon_0, \text{ или } N \cong \ln(\varepsilon_{int} / \varepsilon_0) / \ln R.$$

Величину  $\lambda = \langle \ln |f'(x)| \rangle \cong \ln R$  называют "показателем Ляпунова" и обычно используют для характеристики хаотичности одномерного процесса. Для детерминированного процесса  $\lambda < 0$ , для "белого" шума  $\lambda = \infty$ . В исследуемом примере (ур-ние 1-3) для  $|r| \geq 1,7$   $\infty > \lambda > 0$ , что указывает на "детерминированный хаос". Так, для  $r = -1,71$   $\lambda = 0,11\dots$ , для  $r = -1,85$   $\lambda = 0,35\dots$ , для  $r = -2,12$  ("окно")  $\lambda = -0,84\dots$

### 3. Реалистическая модель динамики

#### импульсного реактора периодического действия

Качественно динамика и.р.п.д. в "закритической" области (т.е. вне области устойчивости линейной модели, устойчивости "в малом") не изменяется при использовании более сложных, реалистических моделей, нежели рассмотренная выше. Дело в

том, что любая математическая модель, адекватно описывающая реактор, обязана обладать диссипативными свойствами, так как их проявляет реактор (рассеивается тепловая энергия, распадаются источники запаздывающих нейтронов и т.д.). Диссипативности преобразования (в том числе многомерного) и его нелинейности достаточно, чтобы оно показывало свойства перехода к "детерминированному хаосу" [ 11 ].

Дадим пример компьютерного моделирования динамики и.р.п.д. таким рекурсивным соотношением:

$$\mathbf{x}_{n+1} = G(\mathbf{x}_n), \quad (4-1)$$

где вектор  $\mathbf{x}$  имеет 9 проекций  $\rho_1, \rho_2, \rho_3, s_1, s_2, \dots, s_6$ ; первые три - парциальные компоненты реактивности обратной связи, остальные - групповые интенсивности запаздывающих нейтронов (точнее, относительные отклонения интенсивности от среднего значения). Оператор  $G$  определяется уравнениями

$$\begin{aligned} \rho_{1,n+1} &= \varphi_1(\rho_{1,n} + k_1 Q \cdot q_n) & i=1,2,3, \\ s_{m,n+1} &= \varphi_m(s_{m,n} + r_m \cdot q_n) & m=1,2,\dots,6, \\ q_n &= \sum_m s_{m,n} \times \exp \sum_i \rho_{i,n} - 1, \end{aligned} \quad (4-2)$$

где  $\varphi_m = \exp(-\lambda_m T)$ ,  $\varphi_1 = \exp(-\alpha_1 T)$ ,

$$\Gamma_m = \frac{\lambda_m \beta_m}{\sum_m \lambda_m \beta_m \cdot \varphi_m / (1 - \varphi_m)},$$

$\lambda_m$  и  $\beta_m$  - постоянные распада и доли запаздывающих нейтронов, а  $Q$  и  $T$  - среднее (начальное) значение энергии импульсов мощности и период пульсации реактора.

Эта модель относится к и.р.п.д. с трёхкомпонентной обратной связью - импульсная характеристика обратной связи может быть описана суммой трёх экспонент с амплитудами  $k_1$  и

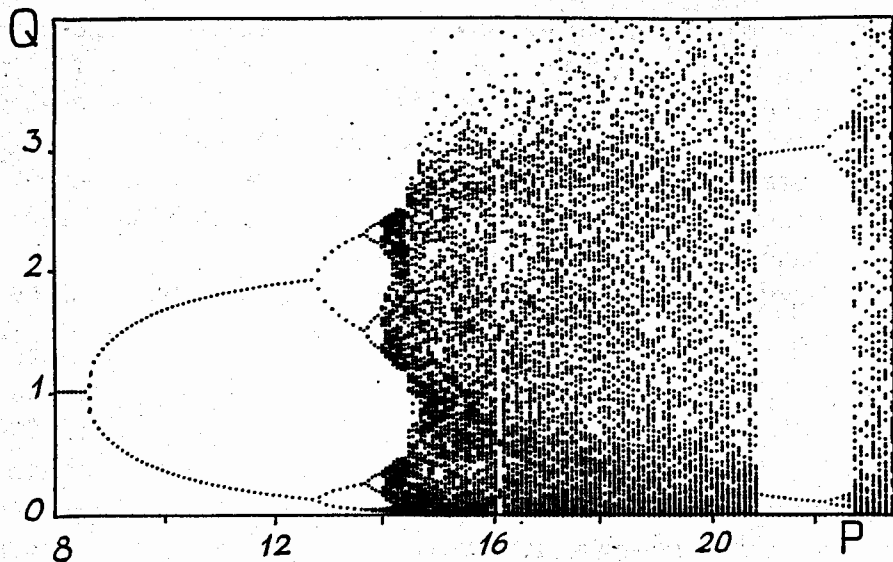


Рис. 4. Установившиеся значения энергии импульсов ( $Q$ , отн. ед.) свободных колебаний реактора с моделью динамики по ур-нию (4) в зависимости от средней мощности ( $P$ , МВт).

постоянными времени  $\alpha_1$ . Для ИБР-2 параметры модели таковы:

$$k_1 = -0,65, \quad k_2 = +0,61, \quad k_3 = -1,67 \beta_u / \text{МДж};$$

$$T_1 = 10,2, \quad T_2 = 1,8, \quad T_3 = 0,3 \text{ с.}$$

На рис. 4 дана диаграмма, аналогичная диаграммам рис. 2, для реактора ИБР-2 (естественно, расчётная!); в качестве управляющего параметра выбрана начальная (средняя) мощность реактора  $P = Q \cdot T$ . Каскад бифуркаций начинается в точке  $P \approx 8,5$  МВт, там, где реактор становится неустойчивым в линейном приближении модели динамики (это можно получить и аналитически, проверив ур-ние (4) на устойчивость, например, критерием Шура-Кона [14]). Хаотическое движение появляется при  $P \approx 14,2$  МВт. Все значения  $P$ , соответствующие бифуркациям, подчиняются тем же правилам, что параметр  $\gamma$  на рис. 2. Отличие диаграмм рис. 2 и 4 — только в числе и расположении периодических "окон" в стохастической области.

#### 4. О других сценариях перехода к стохастической динамике

Очевидно, что импульсный реактор может быть неустойчивым и в привычном смысле, т.е. показывая вне области линейной устойчивости обычные нелинейные периодические колебания с периодом, который не кратен периоду следования импульсов мощности. Назовём такую неустойчивость "колебательной", дабы отличить от "импульсной", описанной выше. Следовательно, ур-ние (4-I) может иметь решения колебательного типа. Особо сложное поведение демонстрирует реактор, когда неустойчивости обоих типов появляются почти одновременно (при одной мощности); иными словами, когда его параметры оказываются вблизи точки, где пересекаются границы областей "импульсной" и "колебательной" неустойчивостей (точка 0 на рис. 5).

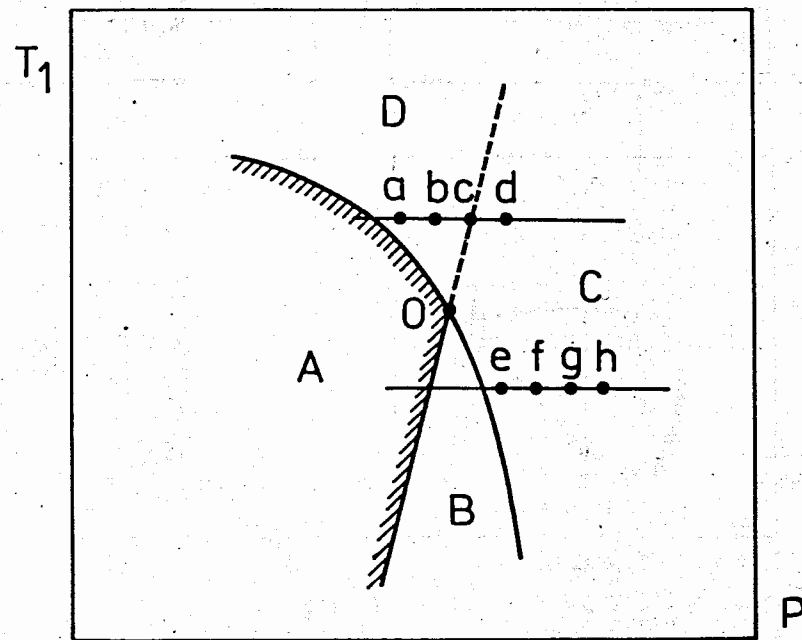


Рис. 5. Качественный характер границ области устойчивости (A) с колебательной (сплошная линия) и "импульсной" (пунктирная) неустойчивостью в плоскости двух параметров динамической модели —  $P$  и  $T_1$ .



Если изменяемые параметры динамической модели находятся в секторе А (рис.5), то реактор устойчив; в секторе В он обнаруживает свойства, характеризующие "импульсную" неустойчивость; в секторе D, ближе к границе устойчивости, имеют место обычные нелинейные колебания. Но в секторе С, а также в D вблизи границы с сектором С, колебания мощности

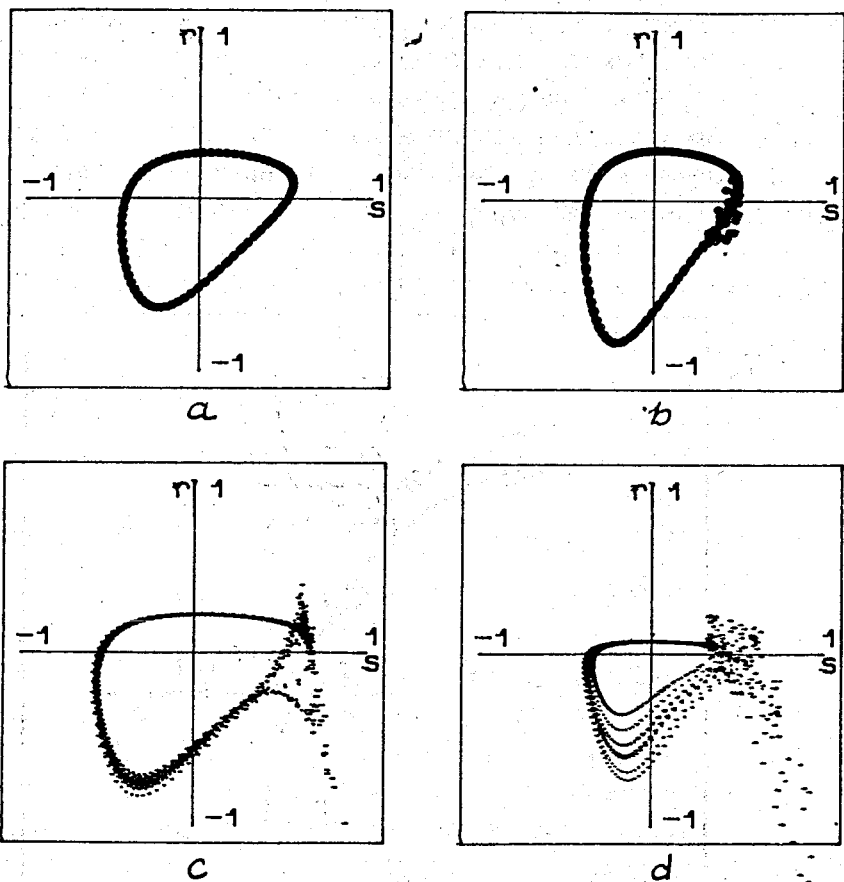


Рис.6. Фазовые портреты (движение двух компонент вектора  $x$  в уравнении (4) – интенсивности запаздывающих нейтронов  $S$  и реактивности  $R$ ) свободных колебаний и.р.п.д. при значениях параметров на линии а-д рис.5.

сложны; им присущи как периодичность, так и хаотичность. Интересно наблюдать (см. рис.6 и 7), как эволюционирует характер свободного движения от регулярного до хаотического, когда управляющие параметры ( $P, T_1$ ) изменяются в определенных направлениях. И в том случае, когда "колебательная" неустойчивость наступает ранее "импульсной" (рис. 6), и в другом, обратном варианте (рис. 7) происходит постепенный переход к стохастическому движению, но путями, отличными от

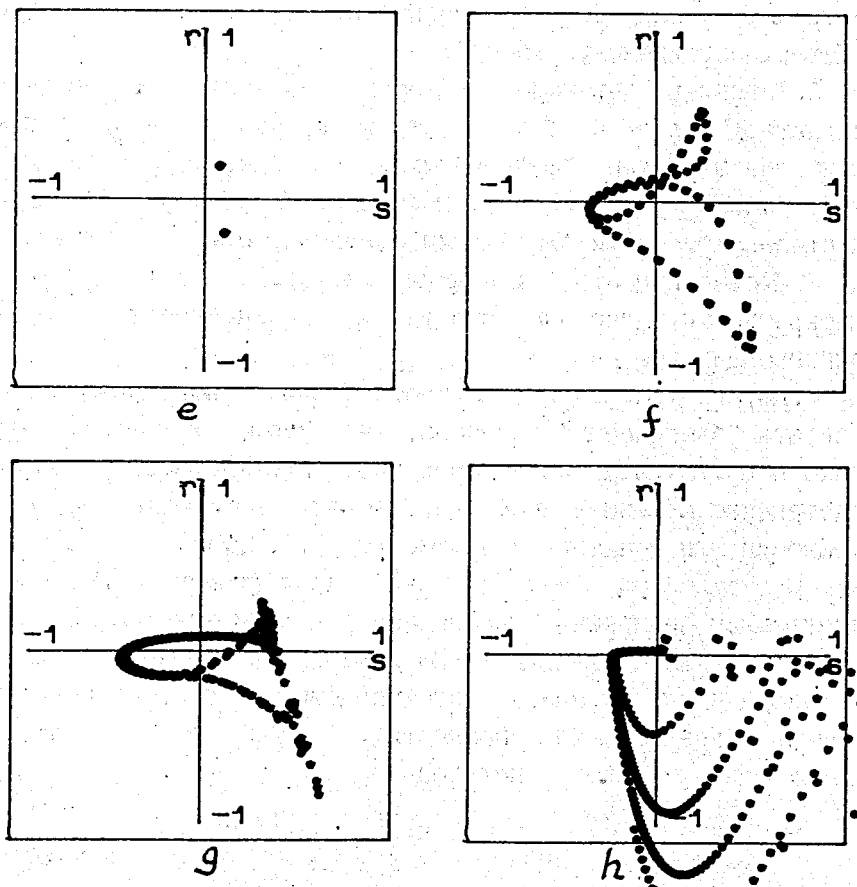


Рис.7. То же, что на рис.6, для параметров на линии е-н рис.5.



сценария Файгенбаума. Такой переход к хаосу называют "перемежаемостью"; он характеризуется хаотическими всплесками на фоне регулярного движения, которые по мере приближения к хаосу становятся больше и (или) появляются чаще [ 15 ].

## 5. Выводы

1. Импульсный реактор периодического действия с отрицательным температурным эффектом при достижении некоторой мощности с неизбежностью приходит к стохастическому поведению энергии импульсов мощности, так называемому "детерминированному хаосу".

2. Характер перехода к хаосу зависит от временного характера обратной связи, от конкретной модели динамики; наиболее вероятен "файгенбаумовский" переход, при котором хаотическое движение наступает после бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода колебаний.

3. Стохастичность динамики и.р.п.д. есть следствие дискретности, диссипативности и нелинейности уравнений, описывающих её.

4. Переход и.р.п.д. к хаотическому поведению следует считать "безопасным" согласно, например, критериям авторов работы [ 16 ], так как размах колебаний мощности возрастает постепенно с изменением управляющих параметров (средней мощности или реактивности, см. рис. 2, 4, 6, 7).

Практический интерес в продолжении исследований дискретной нелинейной динамики и.р.п.д. может заключаться в поиске таких моделей, которые давали бы "опасный" характер перехода через границу устойчивости (т.е. немонотонное, резкое возрастание мощности), либо в доказательстве невозможности такого перехода.

1. Шабалин Е.П. О колебаниях мощности и пределе устойчивости импульсного реактора. "Атомная энергия", 1986, т.61, вып.6, с.401.
2. Попов А.К. Передаточная функция и устойчивость импульсного реактора периодического действия. "Атомная энергия", 1987, т.62, вып.3, с.195.
3. Шабалин Е.П. Импульсные реакторы на быстрых нейтронах. М., Атомиздат, 1976, с.248
4. Ананьев В.Д., Архипов В.А., Бабаев А.И. и др. Энергетический пуск реактора ИБР-2 и первые физические исследования на его пучках. "Атомная энергия", 1984, т.57, вып.4, с. 227-234.
5. Бондаренко И.И., Стависский Ю.Я. Импульсный режим работы быстрого реактора. "Атомная энергия", 1959, т.7, вып.5, с.417.
6. R.H.May. Nature, 1976, V.261, p.459.
7. S.Grossman, S.Thomae. Z.Naturforsch, 1977, V.32a, p.1353.
8. Пейтген Х.О., Рихтер П.Х. Красота фракталей. М., "Мир", 1990.
9. M.J.Feigenbaum Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations. J. Stat. Phys., 1978, v.19, p.25.
10. N.Metropolis, M.L.Stein, P.R.Stein. On Finite Limit Sets for Transformations on the Unit Interval. J. Combinatorial Theory, 1973, v.15, N1, p.25.
11. Х.Шустер. Детерминированный хаос. М., "Мир", 1988.
12. R.L.Devaney. Introduction to Chaotic Dynamical Systems. Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1986.
13. S.Grossman. Discrete Nonlinear Dynamics. In "Nonequilibrium Cooperative Phenomena in Physics and Related Fields", NATO ASI Series, Series B: Physics, V.116, 1984, Plenum Press, New York, p.413.
14. Иванов В.А., Юценко А.С. Теория дискретных систем автоматического регулирования. М.: Наука, 1983, 336 с.
15. Y.Pomeau, P.Manneville. Phys.Lett., 1979, v.75A, p.1.
16. Горяченко В.Д., Золотарёв С.Л., Колчин В.А. Исследование динамики ядерных реакторов качественными методами. М.: Энергоатомиздат, 1988, 168 с.

Рукопись поступила в издательский отдел

27 марта 1990 года.