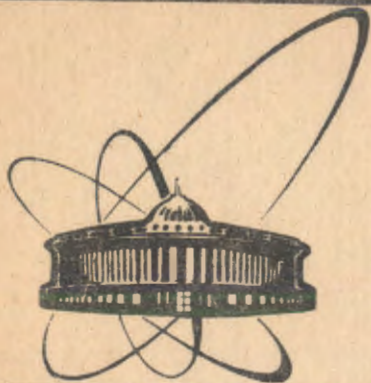


90-213



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

Ж 306

P11-90-213

Т. Жанлав, И. В. Пузынин

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ  
НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ,  
ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ  
НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА  
С НАКАЧКОЙ

1990

## 1. Введение

Нелинейное уравнение Шредингера с диссипацией и накачкой

$$i\psi_t + \psi_{xx} + 2\psi|\psi|^2 = -F \cdot e^{i\Omega t} + i\gamma\psi \quad (I)$$

описывает ряд процессов в нелинейной оптике, физике плазмы, ферромагнетиках и джозефсоновских контактах<sup>/1,2/</sup>. В работе<sup>/3/</sup> обсуждались свойства солитонных решений уравнения (I) в случае  $\gamma=0$ , для которого найдено однопараметрическое семейство стационарных решений  $\varphi(x) = \varphi(x, \alpha)$  в явном виде. Для анализа устойчивости этих солитонов рассматривалось решение уравнения (I) вида

$$\tilde{\varphi}(x, t) = \varphi(x) + \delta\varphi(x, t), \quad (2)$$

где  $\varphi(x)$  - стационарный солитон, а  $\delta\varphi$  - малое возмущение специального вида. При подстановке выражения (2) в уравнение (I) в линейном по  $\delta\varphi$  приближении получается система

$$f_t = L_0 g \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \Omega - 2\varphi^2\right) g, \quad (3)$$

$$-g_t = L_1 f \equiv \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \Omega - 6\varphi^2\right) f, \quad (4)$$

где  $f = \text{Re}(\delta\varphi)$ ,  $g = \text{Im}(\delta\varphi)$ .

В работе<sup>/3/</sup> доказано, что система (3), (4) не имеет решений вида

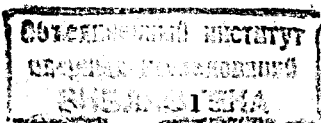
$$f(x, t) = \tilde{f}(x) \cdot e^{\lambda t}, \quad g(x, t) = \tilde{g}(x) \cdot e^{\lambda t}$$

с действительным  $\lambda$ . Более общий подход связан с выбором

$$f(x, t) = (f_1(x) \cdot \cos \lambda_2 t - f_2(x) \cdot \sin \lambda_2 t) e^{\lambda_1 t}, \quad (5)$$

$$g(x, t) = (g_1(x) \cdot \cos \lambda_2 t - g_2(x) \cdot \sin \lambda_2 t) \cdot e^{\lambda_1 t}.$$

Подставляя выражения (5) в систему (3), (4), получаем задачу на собственные значения вида



$$\begin{aligned} L_0 g_1 &= \lambda_1 f_1 - \lambda_2 f_2, \\ L_0 g_2 &= \lambda_2 f_1 + \lambda_1 f_2, \\ L_1 f_1 &= -\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2, \\ L_1 f_2 &= -\lambda_2 g_1 - \lambda_1 g_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия для задачи (6) имеют вид

$$f_i(x) = g_i(x) = 0, \quad i = 1, 2, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (7)$$

В изложенном подходе считают, что стационарное решение устойчиво, если  $\lambda_1 \leq 0$ , и неустойчиво в противном случае.

Цель настоящей работы — построить численный метод решения задачи (6), (7) и найти область изменения параметра  $\alpha$  задачи, в которой солитонное решение  $\varphi(x, \alpha)$  уравнения (I) устойчиво. Отметим, что при  $\lambda_1 = 0$  система (6) превращается в две подсистемы, причем первая из них с помощью подстановки переходит во вторую

$$\begin{aligned} L_0 g_2 &= \lambda_2 f_1, \\ L_1 f_1 &= \lambda_2 g_2. \end{aligned} \quad (8)$$

## 2. Численное решение задачи (8)

Сначала мы рассмотрим численный метод решения задачи (8). С учетом вида солитона  $\varphi$  запишем ее в виде

$$(L - \lambda D) y = 0, \quad (9)$$

где 
$$L = \begin{pmatrix} L_0 & 0 \\ 0 & L_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = (g_2, f_1), \quad \lambda = \lambda_2,$$

$$L_0 = -\frac{d^2}{dx^2} - (2V - cth^2 \alpha), \quad L_1 = -\frac{d^2}{dx^2} - (6V - 1),$$

$$V = \frac{ch \alpha (ch \alpha - ch x)}{(ch \alpha + ch x - 1)^2}, \quad \alpha \in (0, +\infty).$$

В силу симметрии решений системы (9) с асимптотическими условиями (7), граничные условия для уравнений (9) можно задать в виде

$$\begin{aligned} y'(0) &= 0, & x &= 0, \\ \alpha y + y' &= 0 & (y=0), & \quad x \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\alpha = \left[ \frac{1 + cth^2 \alpha}{2} - \left( \left( \frac{1 + cth^2 \alpha}{2} \right)^2 + \lambda^2 - cth^2 \alpha \right)^{1/2} \right]^{1/2}.$$

При больших значениях  $\alpha$  соответствует второе граничное условие  $y=0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Предположим, что решение  $y(x, \alpha)$  задачи (9), (10) является достаточно гладким.

Аппроксимацию дифференциальной задачи (9), (10) осуществим с помощью метода сплайн-функций<sup>/4/</sup> на равномерной сетке  $\Delta_N$ :  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = R$ ,  $R$  — большое число, т.е. приближенное решение задачи (9), (10) ищется в виде кубического сплайна класса  $C^2(0, R)$ :

$$y \sim S = \sum_{j=1}^{N+1} \alpha_j B_j(x),$$

где  $B_j(x)$  — нормализованные базисные B-сплайны. Потребуем, чтобы сплайн  $S$  удовлетворял соотношениям<sup>/5/</sup>:

$$(L - \lambda D) S + \frac{h^2}{12} \Delta^2 I [S'']^t = 0, \quad x \in \Delta_N \quad (9')$$

$$S'(0) = 0,$$

$$\alpha S + S' = 0, \quad (S=0), \quad x=R,$$

где  $I$  — двумерная единичная матрица,  $\Delta^2$  — оператор второй раз- деленной разности,  $h = x_{i+1} - x_i = const$ ,

$$[S'']^t = \begin{cases} 2S_1'' - S_2'' & , \quad x = x_0 \\ S_i'' & , \quad x = x_i, \quad i = 1, \dots, N-1 \\ 2S_{N-1}'' - S_{N-2}'' & , \quad x = x_N. \end{cases}$$

Известно<sup>/5/</sup>, что схема (9') имеет аппроксимацию  $O(h^4)$ . Задачу (9') вместе с условием нормировки

$$(S, S) - 1 = 0, \quad (11)$$

где  $(u, v) = \int_0^R u(x) v(x) dx$ , можно рассматривать как нелинейное функциональное уравнение вида

$$F(z, \alpha) = 0, \quad z = \{\lambda, S\}. \quad (12)$$

Для решения уравнения (I2) можно применять обобщенный алгоритм с включением возмущения<sup>6/</sup> непрерывного аналога метода Ньютона (НАМН). Приведем основные формулы этого алгоритма. На каждой итерации с номером  $k$  необходимо решить следующие задачи:

$$(L - \lambda_k D) W_k = D S_k, \quad x \in \Delta_N, \quad (I3)$$

$$W_k'(0) = 0,$$

$$\alpha_k W_k + W_k' = -\alpha_k'(\lambda_k) \cdot S_k, \quad x = R,$$

$$(L - \lambda_k D) u_k = -\frac{h^2}{12} \Delta^2 I [S_k'' + g_k (S_k'' - S_{k-1}'') / \tau_{k-1}]^+, \quad (I4)$$

$$g_k = 1 - \exp(-t_k), \quad x \in \Delta_N,$$

$$u_k'(0) = 0,$$

$$\alpha_k u_k + u_k' = 0, \quad x = R.$$

После решения систем (I3) и (I4) поправка для собственного значения  $\lambda$  вычисляется по формуле

$$\mu_k = \frac{1 + (S_k, S_k) - 2(S_k, u_k)}{2(S_k, W_k)} \quad (I5)$$

Следующее приближение  $z_{k+1}$  найдется по формуле

$$S_{k+1} = (1 - \tau_k) S_k + \tau_k (u_k + \mu_k W_k), \quad (I6)$$

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \tau_k \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

При вычислении скалярных произведений в (I5) используется квадратурная формула Симпсона с узлами на сетке  $\Delta_N$ . Как известно<sup>7,8/</sup>, итерации (I6) сходятся, если начальное приближение  $z_0 = \{\lambda_0, S_0\}$  взято из достаточно малой окрестности изолированного решения  $z^* = \{\lambda^*, S^*\}$  задачи (I2), и поэтому здесь актуальным является выбор начального приближения.

Легко видеть, что задача (9), (I0) имеет решение  $z_\infty^* = \{\lambda_2^*, g_2^*, f_1^*\} = \{0, 1/\text{ch } x, 0\}$ , при  $\alpha \rightarrow +\infty$ . Поэтому при больших  $\alpha = \alpha_N$  в качестве начального приближения к  $z_N^*$  в итерациях (I3)–(I6) можно взять  $z_0 = z_\infty^*$ , и при этом итерационный процесс будет сходиться.

С другой стороны, в силу свойства коэффициентов уравнения (9),

зависимость решения от параметра можно считать слабой при больших  $\alpha$ . Поэтому величину  $z_N$ , найденную с помощью итераций (I3)–(I6), можно взять в качестве начального приближения для решения уравнения

$$F(z, \alpha_{N-1}) = 0, \quad \alpha_{N-1} < \alpha_N$$

и т.д. Итерации можно организовать по методу продолжения по параметру<sup>9/</sup> в порядке убывания  $\alpha$ . Однако для сокращения количества итераций предпочтительно использовать различные приемы продолжения по параметру<sup>10–12/</sup> с более высокой точностью. Здесь рассмотрим один из возможных вариантов.

Дифференцируя уравнения (9), (I0), (II) по параметру  $\alpha$ , получаем

$$(L - \lambda D) \frac{dy}{d\alpha} - \frac{d\lambda}{d\alpha} Dy + (L'_\alpha) y = 0, \quad (I7)$$

$$\frac{dy}{d\alpha} = 0, \quad x = 0,$$

$$\alpha \frac{dy}{d\alpha} + \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{d\alpha} \right) + \alpha'_\alpha = 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\left( \frac{dy}{d\alpha}, y \right) = 0.$$

Учитывая, что  $y = y(x, \lambda, \alpha)$ , величину  $dy/d\alpha$  ищем в виде

$$\frac{dy}{d\alpha} = \omega_1 + \omega_2 \frac{d\lambda}{d\alpha} \quad (I8)$$

Подставляя (I8) в (I7), получим

$$(L - \lambda D) \omega_1 = - (L'_\alpha) y_k, \quad (I9)$$

$$(L - \lambda D) \omega_2 = Dy_k, \quad (I20)$$

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = - \frac{(\omega_1, y_k)}{(\omega_2, y_k)}. \quad (I21)$$

После решения задачи (I9), (I20) с соответствующими краевыми условиями найдем следующее приближение по формуле

$$S_{n+1} = S_n + (\omega_{1n} + \omega_{2n} \frac{d\lambda_n}{d\alpha}) \Delta \alpha_n, \quad (I22)$$

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n + \frac{d\lambda_n}{d\alpha} \cdot \Delta \alpha_n, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$\Delta \alpha_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n.$$

Очевидно, что если  $\Delta \alpha_n$  достаточно мало, то это начальное приближение будет давать значение  $(S_{n+1})_0$  с погрешностью  $O(\Delta \alpha_n^2)$ .

Итерационный параметр  $\tau_k$  в соотношении (I6) выбирается из условия уменьшения невязки сеточной аппроксимации уравнения (I2) в сеточной  $C$ -норме  $^{/I3/}$ . Такой выбор параметра обеспечивает устойчивую сходимость метода. Итерационный процесс останавливается при выполнении условия

$$\|v_k\|_{C(\Delta_N)} \leq \varepsilon, \quad (23)$$

$\varepsilon$  - заданная точность,  $v_k$  - невязка уравнения (9'), т.е.

$$v_k = (L - \lambda_k D) S_k + \frac{h^2}{12} \Delta^2 I [S_k'']^+, \quad x \in \Delta_N.$$

Выбор величины  $R$  осуществлен путем численного эксперимента. Оказалось, что достаточно выбрать  $R=20$ , так как уточнение сеточного решения за счет дальнейшего расширения интервала  $(0, R)$  становилось много меньше погрешности метода сплайн-аппроксимации. Согласно построению алгоритма (I3)-(I6) собственное число найдется с точностью  $O(h^4)$ , о чем свидетельствует таблица I.

Таблица I

$\alpha$	$\lambda(\alpha)$			$\sigma$
	$h=0,05$	$h/2$	$h/4$	
3.	0,62115130(21)*	0,62114655(21)	0,62114640(I8)	31,6
2,8	0,71025401(4)	0,71024820(4)	0,71024802(4)	32,2
2,6	0,83481122(5)	0,83480131(5)	0,83480101(4)	33

\* В скобках указано число итераций, для которых была достигнута заданная точность  $\varepsilon = 10^{-7}$  в (23).

Здесь  $\sigma = \left| \frac{\lambda_n - \lambda_{h/2}}{\lambda_{h/2} - \lambda_{h/4}} \right|$ .

Расчеты показывают, что функция  $\lambda = \lambda(\alpha)$  является убывающей по параметру  $\alpha$ , и некоторые ее значения приведены в таблице 2.

Таблица 2  
( $h=0,025$ )

$\alpha$	I8	I0	2,9	2,58	2,534
$\lambda(\alpha)$	0,000405	0,016890	0,663010	0,852473	0,917605
$\alpha$	2,5329	2,5328	2,532719	2,532715	2,532714
$\lambda(\alpha)$	0,924203	0,925463	0,927473	0,927831	0,928121

Из таблицы 2 видно, что функция  $\lambda = \lambda(\alpha)$  имеет большой градиент в окрестности точки  $\alpha = 2,5327$ . При этом продолжение решения  $z$  по параметру  $\alpha$  для построения начальных приближений итерационного процесса становится затруднительным  $^{/10, I2/}$ . Проведенные численные эксперименты дают основание предположить  $^{/3/}$ , что существует критическое значение параметра  $\alpha = \alpha_c$  такое, что при  $\alpha < \alpha_c$  не существует решения задачи (I2).

### 3. Численное решение задачи (6)

Задачу (6), с учетом симметрии ее решения, можно записать в виде

$$(\bar{L} - (\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2)) y = 0, \quad (24)$$

$$y'(0) = y(\infty) = 0,$$

где

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} L_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_1 \end{pmatrix}; \quad D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = (y_1, f_1, y_2, f_2)^T.$$

Легко проверить, что для собственных векторов  $f, g$  при  $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$  справедливы равенства

$$y_1(\alpha) = \int_0^{\infty} (g_1 f_1 + g_2 f_2) dx = 0, \quad (25)$$

$$y_2(\alpha) = \int_0^{\infty} (g_2 f_1 - g_1 f_2) dx = 0. \quad (26)$$

При этом  $y_2(\alpha) \neq 0$ , когда  $\lambda_1(\alpha) \rightarrow 0$ . Для однозначного определения величины  $z = \{\lambda, y\}$  ( $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ ), кроме уравнения (24) и условия нормировки решения  $y$ , необходимо еще одно условие. Мы берем условие (25) в качестве дополнительного условия. Для решения нелинейной задачи (24), (25), как в предыдущем случае, можно применить изложенную выше итерационную схему. Приведем окончательный вид формул для каждой итерации.

$$(\bar{L} - (\lambda_{1k} D_1 + \lambda_{2k} D_2)) \theta_{ik} = D_i S_k, \quad x \in \Delta_N \quad (27)$$

$$\theta'_{ik} = 0, \quad x = 0 \quad (28)$$

$$\theta_{ik} = 0, \quad x = R, \quad i = 1, 2,$$

$$(\bar{L} - (\lambda_{1k} D_1 + \lambda_{2k} D_2)) \Omega_k = -\frac{h^2}{12} \Delta^2 I [S_k'' + g_k (S_k'' - S_{k-1}'') / \tau_{k-1}]^+, \quad x \in \Delta_N,$$

$$\Omega'_k = 0, \quad x = 0, \quad (29)$$

$$\Omega_k = 0, \quad x = R,$$

$$\left. \begin{aligned} a_{1k} \mu_{1k} + a_{2k} \mu_{2k} &= d_{1k}, \\ b_{1k} \mu_{1k} + b_{2k} \mu_{2k} &= d_{2k}, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$a_{ik} = (\theta_{ik}, S_k), \quad i = 1, 2; \quad d_{1k} = (1 + (S_k, S_k) - 2(\Omega_k, S_k)) / 2,$$

$$b_{ik} = \int_0^R (\theta_{ik}^{(2)} g_{1k} + \theta_{ik}^{(1)} f_{1k} + \theta_{ik}^{(4)} g_{2k} + \theta_{ik}^{(3)} f_{2k}) dx, \quad i = 1, 2,$$

$$d_{2k} = -\int_0^R (g_{1k} \Omega_k^{(2)} + f_{1k} \Omega_k^{(1)} + g_{2k} \Omega_k^{(4)} + f_{2k} \Omega_k^{(3)}) dx + \int_0^R (g_{1k} f_{1k} + g_{2k} f_{2k}) dx,$$

$$S_{k+1} = (1 - \tau_k) S_k + \tau_k (\Omega_k + \mu_{1k} \theta_{1k} + \mu_{2k} \theta_{2k}),$$

$$\lambda_{ik+1} = \lambda_{ik} + \tau_k \mu_{ik}, \quad i = 1, 2, \quad k = 0, 1, \dots \quad (31)$$

Верхние индексы в формулах для определения величин  $b_{ik}$  и  $d_{2k}$  указывают номер компоненты векторов  $\Omega_k$  и  $\theta_{ik}$ . В конечном счете задачи (27) - (29) представляют собой систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов сплайнов, имеющую трехдиагональную структуру, и решаются методом трехточечной матричной прогонки<sup>14/</sup>.

Вычисление показывает, что  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются убывающими по параметру  $\alpha$ ; в таблице 3 приведены некоторые их значения.

Таблица 3 ( $h=0,05$ )

R	$\alpha$	$\lambda_1(\alpha)$	$\lambda_2(\alpha)$	$ y_2 $
20	1,2	0,4626	2,2171	0,4831(-08)*
	1,6	0,3085	1,5075	0,2509(-07)
	2,0	0,2124	1,1654	0,2913(-07)
	2,4	0,1028	0,9733	0,1673(-06)
40	2,5324	0,005092	0,928199	0,1055(-05)
	2,5326	0,003177	0,928136	0,7392(-06)
	2,5327	0,001487	0,928103	0,9819(-06)

\*  $0,4831(-08) = 0,4831 \cdot 10^{-8}$ . Величина  $|y_2|$  вычислена с целью проверки условия (26).

Экстраполяция значений таблицы 3 показывает, что существует точка  $\alpha = \alpha_c$  такая, что  $\lambda_1(\alpha_c) = 0$ . По мере стремления  $\lambda_1$  к нулю уравнения системы (24) становятся линейно зависимыми и поэтому мы не имеем возможности более близко подойти к  $\alpha_c$ , решая систему (24). Тем не менее из таблицы 3 видно, что точка  $\alpha = 2,5327$  расположена достаточно близко к критической. Сравнение таблиц 1 и 3 позволяет сделать вывод<sup>13/</sup>, что  $\alpha_c$  находится в интервале  $(2,5327, 2,532714)$ , т.е.  $\alpha_c = 2,5327 \dots$

Таким образом, найдена область устойчивости солитона  $\alpha \in (\alpha_c, +\infty)$ . Авторы выражают благодарность И.В.Барашенкову за сотрудничество.

#### Литература

1. Kaup D.J., Newell A.C. - Proc. R. Soc. 1978, A.361, 413; Phys. Rev. 1978, B18, 5162.
2. Nozaki K., Bekki N. - J. Phys. Soc. Jpn, 1985, 54, 2363.
3. Barashenkov I.V., Bogdan M.M., Zhanlav T. - JINR, Preprint E5-89-817, Dubna, 1989.
4. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. - Методы сплайн-функций. - М.: Наука, 1980.
5. Жанлав Т. - ОИЯИ, PII-89-343, Дубна, 1989.
6. Бояджиев Т.Л., Жанлав Т., Пузынин И.В. - ОИЯИ, P5-89-423, Дубна, 1989.
7. Гавурин М.К. - Изв. вузов, математика, 1958, т.5/6, с.18.

8. Жидков Е.П., Макаренко Г.И., Пузынин И.В.-ЭЧАЯ, 1973, т.4, вып.1, с.127.
9. Ортега Дж., Пул У.-Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений. Пер. с англ. - М.: Наука, 1986.
10. Родионов И.Д. Препринт ИПМ АН СССР №23, 1982.
11. Стриж Т.А.- ОИЯИ, 11-89-24, Дубна, 1989.
12. Фадеев С.И.-В кн.: Аппроксимация сплайнами (Вычислительные системы, вып. 121) ИМ СО АН СССР, 1987, с.102.
13. Пузынин И.В.- ОИЯИ, 11-12016, Дубна, 1978.
14. Самарский А.А., Николаев Е.С.-Методы решения сеточных уравнений. - М.: Наука, 1978.

Рукопись поступила в издательский отдел  
26 марта 1990 года.