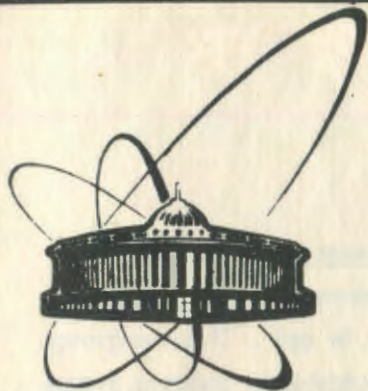


90-180



объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Ж 694

P11-90-180

Е.П.Жидков, А.В.Федоров, О.И.Юлдашев

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧИ МАГНИТОСТАТИКИ
В КОМБИНИРОВАННОЙ ПОСТАНОВКЕ

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

1990

Введение

Задача магнитостатики в общем случае формулируется во всем пространстве R^3 . При её численном решении неизвестные функции ищутся в точках ограниченной области Ω . Различают три постановки задачи магнитостатики по виду используемых уравнений: интегральная, дифференциальная и комбинированная [1]. В интегральной постановке неизвестные определяются только в области Ω_T , занятой ферромагнетиком. Постановка точно учитывает условия на бесконечности, обладает ещё рядом достоинств, но требует при численной реализации $O(n^6)$ слов памяти ЭВМ, где n - характерное число скалярных неизвестных по одному направлению.

В дифференциальной постановке задача решается в области Ω , содержащей в себе ферромагнетик (область Ω_T) и токовые элементы (область Ω_S). Эта постановка требует при численной реализации $O(n^3)$ слов памяти ЭВМ. Однако при этом возникает проблема определения размера самой области Ω и асимптотических условий на её границе Γ , достаточно точно учитывающих поведение решения на бесконечности.

В комбинированной постановке в качестве граничных условий используют граничные интегральные уравнения, точно учитывающие поведение решения на бесконечности. При этом неизвестные могут определяться только в Ω_T либо в некоторой произвольной области её содержащей. При численном решении требуется $O(n^3) + C_1 n^4$ слов памяти ЭВМ, а при выборе в качестве Γ поверхности специального вида - $O(n^3) + C_2 n^3$ [2].

В настоящей работе развивается подход к получению класса комбинированных постановок, характерной особенностью которого

является требование $O(n^3) + c_1 n^4/2$ слов памяти ЭВМ ($O(n^3) + c_2 n^3/2$ - если использовать специальные поверхности) при численной реализации. Отметим, что постановка аналогичного типа для неизвестных вектор-функций была рассмотрена в работах [3,4], а для скалярных функций в [5]. Обе эти постановки можно получить с помощью предлагаемого подхода.

В §1 приводятся комбинированные постановки, получаемые в рамках развиваемого подхода. В §2 исследуется проекционная формулировка одной из постановок этого класса относительно полного скалярного потенциала. Доказана однозначная разрешимость и сходимость приближенных решений, полученных методом Галеркина, к точному. В §3 для двумерной постановки относительно однокомпонентного векторного потенциала рассматривается дискретизация методом конечных элементов. Приводятся результаты численных экспериментов и результаты расчетов характеристик магнитного поля с учетом нелинейности ферромагнетика.

§1. Постановки задач

Пусть Ω - ограниченная область в R^3 , заполненная изотропным ферромагнетиком, Γ - её граница, обладающая достаточной гладкостью. Имеем уравнения для вектора магнитной индукции \vec{B} и вектора напряженности поля \vec{H} :

$$\nabla \times \vec{H} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}, \quad x \in \Omega, \quad (I.1)$$

где функция μ задана либо как $\mu = \mu(|\vec{B}|)$, либо как $\mu = \mu(|\vec{H}|)$.

Используя формулу Грина вне области Ω для вектора $\vec{B} = \vec{H}$ имеем:

$$\vec{B}(x) + \nabla \int_{\Gamma} \frac{\vec{B} \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS_y + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{B} \times \vec{n}}{4\pi r} dS_y = \vec{B}_s, \quad x \in R^3 \setminus \Omega, \quad (I.2)$$

где \vec{n} - вектор внешней к Ω нормали,

$$\vec{B}_s \equiv \nabla \times \int_{\Omega_s} \frac{\vec{J}}{4\pi r} d\Omega_y, \quad r = |x - y|,$$

Ω_2 - ограниченная область в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, вектор \vec{J} - задан. Учитывая скачки интегралов в (I.2) при $x \rightarrow \Gamma$ и условия непрерывности нормальной компоненты вектора \vec{B} и тангенциальной компоненты вектора \vec{H} при переходе через границу Γ , получим граничное соотношение:

$$\frac{1}{2} [\vec{H}(\vec{B} \cdot \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{H} \times \vec{n})] + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{H} \times \vec{n}}{4\pi r} dS_y + \nabla \int_{\Gamma} \frac{\vec{B} \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS_y = \vec{B}_s(x), x \in \Gamma. \quad (I.3)$$

Таким образом, в общем виде задачу магнитостатики можно сформулировать как задачу с уравнениями (I.1) и граничным условием (I.3).

С целью получения в (I.3) только одного интеграла по Γ , введём дополнительный вектор-функцию \vec{P} , удовлетворяющую в Ω уравнениям:

$$\nabla \times \vec{P} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{P} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (I.4)$$

Тогда из формулы Грина будем иметь:

$$\Delta(x) \vec{P}(x) = \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\vec{P} \times \vec{n}}{r} dS_y + \nabla \int_{\Gamma} \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{r} dS_y, \quad (I.5)$$

где $\Delta(x) = 4\pi$, если $x \in \Omega$ и $\Delta(x) = 2\pi$, если $x \in \Gamma$. С учётом (I.3) и (I.5), задавая для вектора \vec{P} условия на Γ в виде $\vec{P} \times \vec{n} = \vec{H} \times \vec{n}$ или в виде $\vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{n}$, получим следующие граничные условия:

$$\vec{P} \times \vec{n} = \vec{H} \times \vec{n}, \quad \left(\vec{P} + \nabla \int_{\Gamma} \frac{(\vec{B} - \vec{P}) \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS \right) \times \vec{n} = \vec{B}_s \times \vec{n}, \quad (I.6)$$

$$\vec{P} \times \vec{n} = \vec{H} \times \vec{n}, \quad \left(\frac{\vec{B} + \vec{P}}{2} + \nabla \int_{\Gamma} \frac{(\vec{B} - \vec{P}) \cdot \vec{n}}{4\pi r} dS \right) \cdot \vec{n} = \vec{B}_s \cdot \vec{n}, \quad (I.7)$$

а также

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{n}, \quad \left(\frac{\vec{H} + \vec{P}}{2} + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{(\vec{H} - \vec{P}) \times \vec{n}}{4\pi r} dS \right) \times \vec{n} = \vec{B}_s \times \vec{n}, \quad (I.8)$$

$$\vec{P} \cdot \vec{n} = \vec{B} \cdot \vec{n}, \quad \left(\vec{P} + \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{(\vec{H} - \vec{P}) \times \vec{n}}{4\pi r} dS \right) \cdot \vec{n} = \vec{B}_s \cdot \vec{n}. \quad (I.9)$$

То есть получаем к уравнениям (I.1) и (I.4) четыре краевых условия (I.6) - (I.9), точно учитывающих поведение решения на бесконечности. Соответственно граничным условиям получаем четыре комбинированные постановки, каждая из которых содержит только один граничный интегральный оператор.

Для численного решения трехмерных задач магнитостатики обыч-

но вводят скалярные потенциалы. Пусть $\bar{H} = \nabla\psi$ и $\bar{P} = \nabla\varphi$, тогда уравнения (I.1) и (I.4) примут вид

$$\nabla \cdot \mu \nabla \psi = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad x \in \Omega. \quad (I.10)$$

Проинтегрируем условие $\bar{P} \times \bar{n} = \bar{H} \times \bar{n}$ вдоль некоторой кривой, принадлежащей Γ , а также граничные уравнения (I.6) и (I.8). Тогда, принимая во внимание соотношение

$$\nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\bar{Q} \times \bar{n}}{4\pi r} dS = -\nabla \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \bar{Q} dS + \bar{n} (\bar{Q} \cdot \bar{n}) + \frac{1}{2} \bar{n} \times (\bar{Q} \times \bar{n}), \quad x \in \Gamma,$$

где $\bar{Q} = \bar{H} - \bar{P} = \nabla(\psi - \varphi)$, получим следующие граничные условия:

$$\varphi = \psi, \quad \varphi + \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \int_{\Gamma} \bar{c} \cdot \bar{b}_S dt, \quad (I.11)$$

$$\varphi = \psi, \quad \frac{1}{2} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} + \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} \left(\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS = \bar{n} \cdot \bar{b}_S, \quad (I.12)$$

а также

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) (\varphi - \psi) dS = \bar{n} \cdot \bar{b}_S, \quad (I.13)$$

$$\mu \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}, \quad \psi - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) (\varphi - \psi) dS = \int_{\Gamma} \bar{c} \cdot \bar{b}_S dt. \quad (I.14)$$

Здесь \bar{c} - вектор касательной к границе Γ . То есть к уравнениям (I.10) получаем четыре возможных краевых условия (I.11) - (I.14), соответствующие четырем комбинированным постановкам для скалярных потенциалов ψ и φ .

Отметим, что эти же формулировки краевых условий можно получить из формул Грина, учитывая дифференциальные уравнения для скалярных потенциалов в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ и в Ω . Имеем

$$\frac{1}{2} \varphi + \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) dS - \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (I.15)$$

$$\frac{1}{2} \psi - \int_{\Gamma} \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{4\pi r} \right) dS + \int_{\Gamma} \frac{1}{4\pi r} \mu \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = \int_{\Gamma} \bar{c} \cdot \bar{b}_S dt, \quad x \in \Gamma.$$

Используя либо условие $\varphi = \psi$, либо $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mu \frac{\partial \psi}{\partial n}$ и комбинируя интегральные уравнения в (I.15), получаем уравнения (I.11) и (I.14). Интегральные условия (I.12) и (I.13) получаются как результат дифференцирования интегральных уравнений (I.11) и (I.14) при $x \in \Omega$ и предельного перехода при $x \rightarrow \Gamma$.

Для численного решения двумерных задач обычно используют однокомпонентный векторный потенциал. Пусть $\bar{B} = \nabla \times \bar{A}$, $\bar{P} = \nabla \times \bar{F}$, причём выполняются условия:

$$\nabla \cdot \bar{A} = 0, \quad \nabla \cdot \bar{F} = 0, \quad [\bar{n} \cdot \bar{A}] = 0, \quad [\bar{n} \cdot \bar{F}] = 0, \quad (I.16)$$

где квадратными скобками обозначен скачок функции при переходе через Γ . В области Ω будем иметь уравнения

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} = 0, \quad \nabla \times \nabla \times \bar{F} = 0, \quad x \in \Omega. \quad (I.17)$$

Для простоты получения граничных условий соответствующих уравнениям (I.6) - (I.9), используем формулы Грина:

$$\frac{1}{2} \bar{A} - \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A})}{4\pi r} dS + \int_{\Gamma} \nabla \frac{1}{4\pi r} \times (\bar{n} \times \bar{A}) dS - \int_{\Gamma} (\bar{n} \cdot \bar{A}) \nabla \frac{1}{4\pi r} dS = \bar{A}_S,$$

$$\frac{1}{2} \bar{F} + \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times \nabla \times \bar{F}}{4\pi r} dS - \int_{\Gamma} \nabla \frac{1}{4\pi r} \times (\bar{n} \times \bar{F}) dS + \int_{\Gamma} (\bar{n} \cdot \bar{F}) \nabla \frac{1}{4\pi r} dS = 0,$$

где $\bar{A}_S = \int_{\Omega_S} \frac{\bar{J}}{4\pi r} dQ$. Учитывая, что условия $\bar{P} \cdot \bar{n} = \bar{B} \cdot \bar{n}$ и $\bar{P} \times \bar{n} = \bar{H} \times \bar{n}$ переходят при выполнении (I.16) соответственно в $\bar{A} = \bar{F}$ и $\bar{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} = \bar{n} \times \nabla \times \bar{F}$, имеем уравнения на Γ :

$$\bar{A} = \bar{F}, \quad \bar{A} - \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} - \nabla \times \bar{F})}{4\pi r} dS = \bar{A}_S, \quad (I.18)$$

$$\bar{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} = \bar{n} \times \nabla \times \bar{F}, \quad \frac{\bar{A} + \bar{F}}{2} + \int_{\Gamma} \nabla \frac{1}{4\pi r} \times (\bar{n} \times (\bar{A} - \bar{F})) dS - \int_{\Gamma} (\bar{n} \cdot (\bar{A} - \bar{F})) \nabla \frac{1}{4\pi r} dS = \bar{A}_S. \quad (I.19)$$

Продифференцируем интегральные уравнения (I.18) и (I.19), используя оператор ротора, а также учтем соотношение

$$\nabla \times \int_{\Gamma} \nabla \frac{1}{r} \times (\bar{n} \times \bar{A}) dS = \nabla \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \cdot \nabla \times \bar{A}}{r} dS, \quad x \in \Omega.$$

Тогда получим ещё два граничных условия:

$$\bar{A} = \bar{F}, \quad \bar{n} \times \nabla \times \left(\bar{A} - \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times (\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} - \nabla \times \bar{F})}{4\pi r} dS \right) = \bar{n} \times \bar{B}_S, \quad (I.20)$$

$$\bar{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{A} = \bar{n} \times \nabla \times \bar{F}, \quad \bar{n} \times \nabla \times \left(\frac{\bar{A} + \bar{F}}{2} \right) + \bar{n} \times \nabla \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \cdot \nabla \times (\bar{A} - \bar{F})}{4\pi r} dS = \bar{n} \times \bar{B}_S. \quad (I.21)$$

Таким образом, дополнительно к уравнениям (I.16), (I.17) получаем краевые условия (I.18) - (I.21) и соответственно четыре комбинированные постановки для векторных потенциалов \bar{A} и \bar{F} с одним граничным интегральным оператором на Γ .

Отметим, что 1) проекционная формулировка задачи (I.1), (I.4) (I.7) рассматривалась в работах [3, 4], а для скалярных неизвестных в работе [5]; 2) предлагаемый подход позволяет получать граничные условия не только на границе ферромагнетика, но и на произвольной границе, не пересекающей области Ω_S .

§2. Проекционная формулировка задачи (I.10), (I.13)

Рассмотрим проекционную формулировку задачи (I.10), (I.13) в $H_1(\Omega)$. Умножим уравнения (I.10) на произвольную функцию $w \in H_1(\Omega)$ и проинтегрируем по области Ω . Используя теорему о дивергенции и условия (I.13) приходим к системе уравнений

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla w \, d\Omega - \int_{\Omega} \mu \nabla \psi \cdot \nabla w \, d\Omega = 0, \quad (2.1)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla w \, d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (\bar{n} \times \nabla w) \cdot \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times (\nabla \varphi - \nabla \psi)}{r} \, dS_y \, dS_x = \int_{\Omega} \bar{B}_S \cdot \nabla w \, d\Omega. \quad (2.2)$$

Принимая во внимание разложение пространства $L_2(\Omega)^3$ [6]:

$$L_2(\Omega)^3 = G \oplus J,$$

где

$$G = \{ \bar{U} \mid \bar{U} = \nabla \varphi, \varphi \in H_1(\Omega) \},$$

$$J = \{ \bar{U} \mid \bar{U} \in L_2(\Omega)^3, \operatorname{div} \bar{U} = 0, \bar{n} \cdot \bar{U} = 0 \},$$

замечаем, что уравнение (2.1) есть уравнение для определения проекции $-\nabla \varphi$ вектора $\mu \bar{H} = \bar{B}$ на подпространство G . Эту проекцию обозначим \bar{B}_G , $\bar{B}_G = \nabla \varphi$. Уравнение (2.2) перепишем в виде

$$\int_{\Omega} \bar{B}_G \cdot \nabla w \, d\Omega - \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (\bar{n} \times \nabla w) \cdot \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times (\bar{B}_G - \bar{H})}{r} \, dS_y \, dS_x = \int_{\Omega} \bar{B}_S \cdot \nabla w \, d\Omega, \quad (2.3)$$

и покажем, что решением этого уравнения является вектор \bar{H} , который определяется из уравнения

$$\int_{\Omega} (\bar{B}(\bar{H}) - S\bar{M}(\bar{H})) \cdot \nabla w \, d\Omega = \int_{\Omega} \bar{B}_S \cdot \nabla w \, d\Omega, \quad w \in H_1(\Omega), \quad (2.4)$$

где

$$S\bar{M} \equiv \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_{\Omega} \bar{M} \times \nabla \frac{1}{r} d\Omega, \quad \bar{M} \equiv (\mu-1)\bar{H}.$$

Известно, что оператор $S : L_2(\Omega)^3 \rightarrow L_2(\Omega)^3$, $S = S^*$, $\|S\| \leq 1$ [7].

Справедлива лемма:

Лемма

1) $S\bar{U} = \bar{U}$, если $\bar{U} \in \mathcal{J}$;

2) $S\bar{U} \in G$, если $\bar{U} \in G$.

Доказательство леммы основывается на представлении вектора $\bar{U} \in L_2(\Omega)^3$ в виде

$$\bar{U} = S\bar{U} - A\bar{U},$$

где

$$A\bar{U} \equiv \frac{1}{4\pi} \nabla \int_{\Omega} \bar{U} \cdot \nabla \frac{1}{r} d\Omega,$$

и использовании свойств оператора A , установленных в [8], в частности, $A : L_2(\Omega)^3 \rightarrow L_2(\Omega)^3$, $A\bar{U} = 0$, если $\bar{U} \in \mathcal{J}$ и $A\bar{U} \in G$, если $\bar{U} \in G$.

Теорема I. Пусть для $\bar{M} \equiv (\mu(x, \bar{H})-1)\bar{H}$, где $\bar{M}, \bar{H} \in L_2(\Omega)^3$ выполняются неравенства:

$$(\bar{M}_1 - \bar{M}_2, \bar{H}_1 - \bar{H}_2) \geq m_0 \|\bar{H}_1 - \bar{H}_2\|^2, \quad m_0 > 0,$$

$$\|\bar{M}_1 - \bar{M}_2\| \leq \ell_0 \|\bar{H}_1 - \bar{H}_2\|, \quad \ell_0 > 0.$$

Тогда:

1) Оператор $T(\bar{H}) = \bar{B}(\bar{H}) - S\bar{M}(\bar{H})$, $T : G \rightarrow G$, сильно монотонный и липшиц-непрерывный, то есть задача

$$\int_{\Omega} (T(\bar{H}) - \bar{B}_S) \cdot \nabla w d\Omega = 0 \quad (2.5)$$

имеет единственное решение в пространстве G .

2) Задача (2.5) эквивалентна задаче (2.3).

Доказательство. 1) Тот факт, что оператор T действует из G в G следует из утверждения леммы и определения T . Далее преобразуем оператор T к виду:

$$T(\bar{H}) = \bar{B}(\bar{H}) - \bar{H} + \bar{H} - S\bar{M}(\bar{H}) = \bar{M}(\bar{H}) + \bar{H} - S\bar{M}(\bar{H}) = \bar{H} - A\bar{M}(\bar{H}).$$

Сильная монотонность и липшиц-непрерывность оператора $\bar{H} - A\bar{M}(\bar{H})$ в пространстве G при выполнении условий теоремы доказана в [5].

2) Для доказательства эквивалентности задач (2.5) и (2.3) запишем (2.5), учитывая утверждения леммы, в виде

$$\int_{\Omega} (\bar{B}_G - S(\bar{B}_G - \bar{H}) - \bar{B}_S) \cdot \nabla w \, d\Omega = 0$$

и установим, что для любых $\bar{U}, \bar{V} \in G$

$$\int_{\Omega} S\bar{U} \cdot \bar{V} \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (\bar{n} \times \bar{V}) \cdot \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times \bar{U}}{r} \, dS_y \, dS_x. \quad (2.6)$$

Пусть $\dot{G}(\bar{\Omega})$ - множество градиентов всех бесконечно дифференцируемых в $\bar{\Omega}$ функций. Множество $\dot{G}(\bar{\Omega})$ плотно в пространстве G [6].

Установим справедливость (2.6) для любых $\bar{U}, \bar{V} \in \dot{G}(\bar{\Omega})$. Имеем

$$\int_{\Omega} \bar{V} \cdot S\bar{U} \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \bar{V} \cdot \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times \bar{U}}{r} \, dS_y \, d\Omega_x =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \nabla \cdot (\bar{V} \cdot \nabla \times \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times \bar{U}}{r} \, dS_y) \, d\Omega_x = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} (\bar{n} \times \bar{V}) \cdot \int_{\Gamma} \frac{\bar{n} \times \bar{U}}{r} \, dS_y \, dS_x.$$

Учитывая, что $S : L_2(\Omega)^2 \rightarrow L_2(\Omega)^3$ - есть линейный ограниченный оператор, $\bar{n} \times \bar{V}$ и $\bar{n} \times \bar{U}$ - есть линейные непрерывные отображения из пространства G в пространство $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)[\rho]$, справедливость (2.6) для любых $\bar{U}, \bar{V} \in G$ следует по непрерывности. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь вопросы сходимости приближенных решений уравнения (2.5), построенных методом Галеркина, к точному. Пусть G_n - конечномерное линейное подпространство в пространстве G с нормой, индуцированной из G , и базисом $\nabla w_1, \dots, \nabla w_n$. Тогда n - е галеркинское приближение

$$\bar{H}_n = \sum_{i=1}^n a_i \nabla w_i, \quad w_i \in H_1(\Omega)$$

к точному решению \bar{H} находится из системы уравнений

$$\int_{\Omega} (\nabla(\bar{H}_n) - \bar{B}_S) \cdot \nabla w_i \, d\Omega = 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (2.7)$$

Теорема 2. В предположениях теоремы I задача (2.7) имеет единст-

венное в G_n решение и имеет место оценка

$\|\bar{H}_n - \bar{H}\|_{L_2(\Omega)^3} \leq \frac{\ell}{m} \inf \|\bar{V} - \bar{H}\|_{L_2(\Omega)^3}, \bar{V} \in G_n,$
 где ℓ - константа Липшица, m - постоянная сильной монотонности оператора T .

Доказательство теоремы следует из утверждений теоремы I и теоремы об оценке погрешности метода Галеркина для сильно монотонных и липшиц-непрерывных операторов [10].

§3. Расчет плоскопараллельных магнитных полей

Для расчета плоскопараллельных магнитных полей в комбинированной постановке будем использовать уравнения (I.I6), (I.I7) и краевые условия (I.2I). В этом случае в декартовой системе координат (x, y, z) имеем

$$\bar{A} = (0, 0, u), \bar{F} = (0, 0, v), \bar{J} = (0, 0, j). \quad (3.1)$$

Задачу будем рассматривать в области Ω , включающей в себя области, занимаемые ферромагнетиком и токовыми обмотками. Умножим уравнения (I.I7) на произвольную вектор-функцию $\bar{w} \in H_1(\Omega)^3$, проинтегрируем по области Ω . Учитывая условия (I.2I) и (3.1), приходим к следующей системе уравнений для неизвестных u и v :

$$\int_D \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla w \, dD - \int_D \nabla v \cdot \nabla w \, dD = \int_D j w \, dD, \quad (3.2)$$

$$\int_D \frac{1}{\mu} \nabla u \cdot \nabla w \, dD + \frac{1}{2\pi} \int_S \frac{\partial w}{\partial \tau} \int_S \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \ln \frac{1}{r} \, ds_y \, ds_x = \int_D j w \, dD, \quad (3.3)$$

где D - область, являющаяся сечением области Ω плоскостью, перпендикулярной оси Oz , S - граница D , $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$, через $\frac{\partial}{\partial \tau}$ обозначено дифференцирование по касательной к S .

Для дискретизации уравнений (3.2), (3.3) используем метод Галеркина с конечными элементами. Разобьем область D на треугольные элементы так, что

$$D = \bigcup_{m=1}^N D_m, \text{mes } D_m \cap D_n = 0, m \neq n.$$

В качестве базисных используем кусочно-линейные функции. Через \hat{u} и \hat{v} обозначим приближенные значения u и v . Функцию μ в каждом элементе считаем постоянной функцией от $|\bar{B}|$. Тогда из (3.2), (3.3) получим систему нелинейных алгебраических уравнений, которую запишем в виде

$$A_{\mu}(\hat{u})\hat{u} - A_1\hat{v} = f \quad (3.4)$$

$$(A_{\mu}(\hat{u}) + C)\hat{u} - C\hat{v} = f. \quad (3.5)$$

Здесь A_{μ} - $N \times N$ матрица, построенная из матриц отдельных конечных элементов, N - число узлов сетки. Элементы матрицы A_{μ} зависят от магнитной проницаемости μ . A_1 - матрица, аналогичная A_{μ} и построенная при $\mu = 1$. C - $N \times N$ матрица, ненулевыми в которой являются только элементы, связывающие неизвестные на границе S .

f - известный вектор. Заметим, что при численной реализации предлагаемого алгоритма необходимо хранить в памяти ЭВМ матрицы конечных элементов и одну полностью заполненную матрицу порядка N_{Γ} , где N_{Γ} - число узлов сетки на границе S .

Приведем использованный нами метод для решения системы уравнений (3.4), (3.5). Предварительно для симметричной разреженной матрицы A_1 строится разложение Холесского $A_1 = LD L^T$. Неизвестный вектор \hat{u} находится из нелинейного уравнения (3.5) с помощью двухступенчатого итерационного процесса, в котором итерации по методу симметричной последовательной верхней релаксации с адаптивной процедурой BT ускорения [II] при определении \hat{u} чередуются с нижней релаксацией при переопределении μ по формуле:

$$\mu_{n+1} = \mu_n + \rho(\mu(\hat{u}_{n+1}) - \mu_n),$$

где n - номер итерации. Значение параметра ρ выбирается из интервала $(0, 1)$ для уменьшения влияния нелинейности. Периодически, через некоторое количество итераций, уравнение (3.4) и построенное разложение Холесского, используется для переопределения \hat{u} . Итера-

ционный процесс заканчивается, если сразу же после переопределения \hat{v} выполняются неравенства

$$\sum_{i=1}^N |\hat{u}_{n+1}^i - \hat{u}_n^i| / \sum_{i=1}^N |u_{n+1}^i| < \varepsilon, \quad \max_{i=1, \dots, N_e} |A^i(\hat{u}_{n+1}) - A^i_n| < \varepsilon_\mu,$$

где $\varepsilon, \varepsilon_\mu$ - заданные величины.

Приведем результаты численных расчетов характеристик поля дипольного магнита инжекционного канала синхротрона СПИН [12], четвертая часть поперечного сечения которого представлена на рис. I. Для данного магнита характерно довольно сильное насыщение ферромагнитного экрана при токе в витке обмотки $I = 2000$ А [12]. Поэтому актуальными являются расчеты с точным учетом условий на бесконечности.

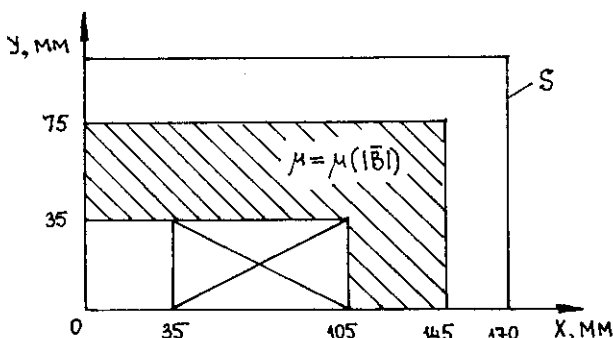


Рис. I. Четвертая часть поперечного сечения дипольного магнита.

После решения системы (3.4), (3.5) исследование свойств магнитного поля проводится с помощью гармонического анализа. В апертуре магнита поле можно представить в виде ряда Фурье:

$$B_y(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \left(\frac{r}{r_0} \right)^{k-1} \cos(k-\Delta)\theta,$$

где (r, θ) - полярные координаты, r_0 - фиксированный радиус.

Поведение поля в дипольных магнитах характеризуется коэффициентами

$$C_n = B_n / B_z, \quad n = 2k+1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

Таблица 1. Сравнение гармоник поля в случае $\mu = 1$, на радиусе $r = 3$ см.

	Точное решение	Приближенное решение	
		первая сетка	вторая сетка
$V_1, \text{Гс}$	6302,28	6321,31	6303,43
c_3	0,149	0,151	0,150
c_5	0,010	0,014	0,011

Таблица 2. Количество итераций KI на первой сетке в зависимости от различных значений μ .

μ	1.	10.	100.	1000.
KI	127	94	64	75

Таблица 3. Величины гармоник поля на радиусе $r = 3$ см. в случае $\mu = \mu(|\vec{B}|)$ при различных значениях тока I в витке обмотки. Сравнение результатов полученных с помощью программ HYBRID и GRIDS ∞ .

I(A)		HYBRID		GRIDS ∞		
		1 сетка	2 сетка	1 сетка	2 сетка	3 сетка
1500	$V_1, \text{Гс}$	13261,8	13274,3	13288,1	13278,5	13275,1
	$c_3 \cdot 10^2$	0,198	0,085	0,050	0,048	0,047
	$c_5 \cdot 10^2$	0,146	0,054	0,024	0,025	0,024
2000	$V_1, \text{Гс}$	15724,5	15733,9	15758,7	15738,5	15733,5
	$c_3 \cdot 10^2$	0,273	0,166	0,138	0,140	0,138
	$c_5 \cdot 10^2$	0,172	0,096	0,063	0,061	0,062
2500	$V_1, \text{Гс}$	17850,0	17861,3	17894,0	17871,7	17865,1
	$c_3 \cdot 10^2$	0,362	0,313	0,301	0,298	0,295
	$c_5 \cdot 10^2$	0,316	0,157	0,113	0,114	0,114

где для B_n справедливо представление

$$B_n = \frac{r_0}{n} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \hat{u}(r_0, \theta) \cos n\theta \, d\theta.$$

Для проверки правильности работы программы HYBRID, в которой используется описанный в этом параграфе алгоритм, было проведено сравнение результатов расчета по программе с точным решением в случае $\mu = 1$. Результаты сравнений на двух сетках представлены в таблице I. Первая сетка содержит 240 элементов, вторая получена разбиением каждого элемента предыдущей на четыре треугольника и содержит 960 элементов. Величина ϵ выбиралась равной $\epsilon = 0,5 \cdot 10^{-5}$. Из таблицы I видно, что на второй сетке основная гармоника поля совпадает с точной в трех знаках.

В таблице 2 приведено количество итераций KI на первой сетке, необходимое для достижения точности $\epsilon = 10^{-5}$ при различных значениях μ , постоянного во всей занимаемой ферромагнетиком области. Количество итераций несущественно зависит от величины μ .

В таблице 3 представлены величины основной дипольной гармоники поля B_1 и относительных амплитуд гармоник поля C_3, C_5 в зависимости от величины тока в витке обмотки для нелинейной зависимости $\mu = \mu(|\vec{B}|)$ из [12], представленной на рис.2. Результаты получены с помощью программы HYBRID и GRIDS ∞ . В последней реализован метод конечных разностей и методика учета условий на бесконечности, изложенная в работе [13]. Узлы сеток, используемые этими программами, совпадают, а третья сетка получена из второй так же, как вторая получалась из первой. Из таблицы 3 видно, что при расчете с помощью программы HYBRID основная гармоника B_1 устанавливается в четырех знаках уже на второй сетке. Отметим, что в случае расчета с однородным условием Дирихле на той же границе S [12] результаты различаются в третьем знаке.

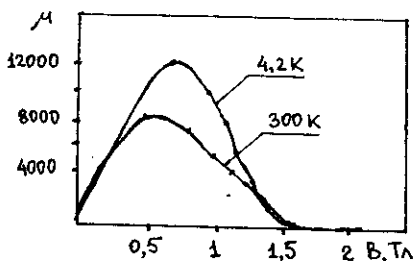


Рис.2. Зависимость $\mu = \mu(\bar{B})$ для температур $T=4,2\text{K}$ и $T=300\text{K}$ (сталь Fe + 3,25% Si).

В заключение авторы выражают благодарность Э.А.Айряну и П.Г.Акишину за полезные обсуждения.

Литература

1. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В. и др.-Численные алгоритмы расчета магнитных систем в ускорителях заряженных частиц. - ЭЧАЯ, №21, в.1, 1990.
2. Жидков Е.П., Хоромский Б.Н.-О структуре матриц в методе граничных интегральных уравнений для оператора Лапласа.ОИЯИ, PII-83-329, Дубна, 1983.
3. Friedman M.J., Colonias J.S.-On the coupled differential-integral equations for the solution of the general magnetostatic problem. IEEE Trans. Mag., v.Mag-18, No.2, 1982, pp.336-339.
4. Friedman M.J.-Finite Element Formulation of the General Magnetostatic Problem in the Space of Solenoidal Vector Functions. Math. Comp., v.43, No.168, 1984, pp.415-431.
5. Pasciak J.E.-A new Scalar Potential Formulation of the Magnetostatic Field Problem. Math. Comp., v.43, No.168, 1984.
6. Быховский Э.Б., Смирнов Н.В.-Об ортогональном разложении про-

- странства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа. Тр. Мат. ин-та АН СССР, т.59, 1960, с.5-35.
7. Жидков Е.П., Федоров А.В., Юлдашев О.И.-Исследование интегрального уравнения магнитостатики для векторного потенциала. ОИЯИ, РИИ-89-473, Дубна, 1989.
 8. Friedman M.J., Pasciak J.E.-Spectral Properties for the Magnetization Integral Operator. Math. Comp., v.43, No168, 1984.
 9. Дюво Г., Лионс Ж.-Л.-Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980, 384с.
 10. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.-Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978, 336с.
 11. Фадеев Д.К., Фадеева В.Н.-Вычислительные методы линейной алгебры. М.: Физматгиз, 1963, 656с.
 12. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Федоров А.В. и др.-Алгоритмы и программы численного моделирования стационарных магнитных полей электрофизических установок. ИФКИ-1987-17/М, Будапешт, 1987.
 13. Айрян Э.А., Жидков Е.П., Хоромский Б.Н., Юлдашев О.И.-Алгоритм учета условий на бесконечности в двумерных задачах магнитостатики. ОИЯИ, РИИ-87-49, Дубна, 1987.

Рукопись поступила в издательский отдел
12 марта 1990 года.