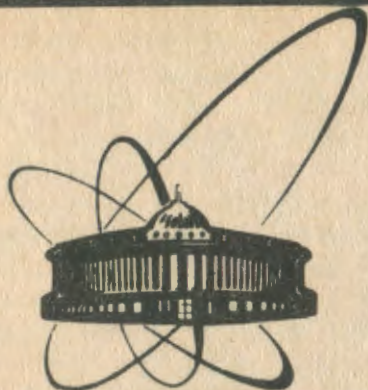


90-141



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

e
f

Ж 696

P11-90-141

Е.П.Жидков, Г.Е.Мазуркевич,
Б.Н.Хоромский, И.П.Юдин

АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОЛЯ
СПЕКТРОМЕТРИЧЕСКОГО МАГНИТА

1990

В работе [1] предложена программа исследований пион-ядерных взаимодействий на пионном канале и спектрометре низкой энергии Московской мезонной фабрики ИЯИ АН СССР. Совместная программа ОИЯИ и ИЯИ АН СССР рассчитана на изучение процессов с хорошим энергетическим разрешением (50–100 кэВ) в области энергий пионов до 100 МэВ.

Данная работа посвящена анализу распределения магнитного поля в указанном спектрометре. Конструкция электромагнита спектрометра показана на рис. 1. Магнитопровод имеет Ш-образную форму, полюсные накладки выполняются съемными и имеют прямоугольную форму. Электромагнит рассчитан на отклонение пучка $\pm 45^\circ$. Одна часть обмотки изображена на рис. 4, вторая – симметрична ей относительно плоскости YOZ .

Расчеты проводились с помощью комплекса программ CDD3, созданного на основе алгоритма клеточной декомпозиции области пересекающимися разрезами [2] и неполно-нелинейной постановки магнитостатических задач [3]. В таком подходе "нелинейные" неизвестные μ_i , являющиеся коэффициентами в эллиптическом уравнении для определения "пространственного" решения U и зависящие от модуля градиента $|\nabla U|$ этого решения, ищутся на более грубой сетке, чем сетка, на которой находятся "пространственные" неизвестные U . Эта грубая сетка для μ и определяет разбиение области расчетов на подобласти. Таким образом, если в традиционных дифференциальных постановках задач магнитостатики число "нелинейных" неизвестных равно числу "пространственных" неизвестных в области нелинейности, то постановка из [2,3] позволяет существенно уменьшить число "нелинейных" неизвестных при численном решении задачи, что в итоге приводит к увеличению скорости сходимости итерационных процессов и уменьшению времени счета: так, например, в данной работе число "нелинейных" неизвестных изменяется от 12 до 48 (одно из разбиений ядра магнита для 12 неизвестных показано на рис. 2), число "пространственных" переменных в области нелинейности может достигать $23 \cdot 10^3$, а 2–3 шагов метода простой итерации по нелинейности достаточно для достижения относительной точности решения 10^{-4} в рабочей зоне магнита.

§ 1. Постановка задачи

Сформулируем математическую постановку задачи относительно двух скалярных потенциалов $U_1(x)$ и $U_2(x)$ [4,5,6] (считаем, что внешние токи по немагнитичной среде Ω_F не протекают); через U_1 и U_2 магнитное поле выражается по формулам:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\nabla U_1(x), & x \in \Omega_F \\ \vec{H}_2 &= \vec{H}_0 - \nabla U_2(x), & x \in \Omega'_V. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь Ω'_v - область вакуума, содержащая бесконечно удаленную точку. Поле \vec{H}_0 создается током плотности \vec{j}_0 , протекающим по обмоткам Ω_a .

Стационарные уравнения Максвелла для магнитоизотропных сред при использовании представления (I) преобразуются в систему уравнений [6]:

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial u_1}{\partial x_i} \right) &= 0, & x \in \Omega_F \\ -\Delta u_2 &= 0, & x \in \Omega'_v. \end{aligned} \quad (2)$$

Система (2) дополняется условиями на границе раздела сред Γ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1}{\partial n_1} + \frac{\partial u_2}{\partial n_2} &= \psi(x), \\ u_1 &= u_2 - \phi(x), \end{aligned} \quad x \in \Gamma \quad (3)$$

и условием на бесконечности

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u_2(x) = 0. \quad (4)$$

В условиях сопряжения (3) через $\frac{\partial u_i}{\partial n_i}$ обозначены комормальные производные, определенные выражением

$$\frac{\partial u_i}{\partial n_i} = \sum_{j=1}^3 \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cos(x_j, n_i), \quad i=1,2,$$

при $x \in \Omega'_v$, $\mu=1$; n_1 и n_2 - внешние нормали на границе раздела сред Γ по отношению к областям Ω_F и Ω'_v .

Функции $\psi(x)$ и $\phi(x)$ определены на Γ и задаются соотношениями:

$$\begin{aligned} \psi(x) &= -(\vec{H}_0, \vec{n}_1) \\ \phi(x) &= \int_{x_0}^x [\vec{H}_0, \vec{n}_1] d\vec{z}, \end{aligned} \quad (5)$$

\vec{z} - вектор касательной к Γ .

Считаем также, что заданная функция $\mu(x)$ обладает всеми необходимыми свойствами для однозначной разрешимости системы (2)-(4) (см. например [3,7]).

§ 2. Метод решения задачи

Для решения задачи (2)-(4) область нелинейности Ω_F погружается во вспомогательную область Ω_E , границе которой Γ_E является поверхностью Ляпунова, геометрически близкой к поверхности параллелепипеда. На этой границе Γ_E условия (4) заменяются приближенным условием - однородным условием Дирихле

$$u_2(x) = 0, \quad x \in \Gamma_E. \quad (6)$$

Область Ω_E выбирается таким образом, что при численном решении (2), (3), (6) относительная погрешность решения в рабочей зоне магнита, определяемая приближенным условием (6), не превышает заданной величины ε (для данной системы бралось $\varepsilon = 10^{-4}$).

С помощью представления функции $u_2 = u_2' + u_2''$ система (2), (3), (6) сводится к следующей нелинейной краевой задаче для определения функции $u = \begin{cases} u_1, & x \in \Omega_F \\ u_2', & x \in \Omega_V \equiv \Omega_E \setminus \bar{\Omega}_F \end{cases}$

$$\begin{aligned} -\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) &= 0, \quad x \in \Omega_E \setminus \Gamma \\ \left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] &= \psi(x) - \frac{\partial u_2''}{\partial n_2}, \quad [u] = 0, \quad x \in \Gamma \\ u(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_E. \end{aligned} \quad (7)$$

$[\cdot]$ обозначает скачок функции, либо ее конормальной производной. Функция u_2'' является решением следующей краевой задачи в области

$$\begin{aligned} \Omega_V &= \Omega_E \setminus \bar{\Omega}_F : \\ -\Delta u_2'' &= 0, \quad x \in \Omega_V \\ u_2'' &= \phi(x), \quad x \in \Gamma \\ u_2'' &= 0, \quad x \in \Gamma_E. \end{aligned} \quad (8)$$

Для решения задачи (7) используется так называемая неполно-нелинейная постановка (IN-постановка) [3] и метод декомпозиции области. Согласно [3] область нелинейности Ω_F разбивается на конечное число подобластей без налегания, $\Omega_F = \bigcup_{i=1}^p \Omega_F^i$, в каждой из которых значение магнитной проницаемости $\mu(x)$ полагается равной постоянной величине μ_i , подлежащей определению и зависящей нелинейно от среднего значения градиента решения в области Ω_F^i .

В работе используется разбиение исходной области нелинейности Ω_F на параллелепипеды. На рис. 2 показано разбиение 1/8 части яра на 12 подобластей, незаштрихованные грани параллелепипедов обозначают поверхности сшивки решений в подобластях. Продолжение этих поверхностей в область Ω_V однозначно определяет разбиение всей области Ω_E на подобласти пересекающимися разрезами:

$$\Omega_E = \left(\bigcup_{i=1}^p \Omega_F^i \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^p \Omega_V^i \right) \cup \gamma,$$

где γ есть объединение обших граней подобластей, на которых заданы условия сопряжения (границе раздела сред Γ является частью γ). На рис. 3 для простоты изображен двумерный случай.

Обозначим $\vec{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_p)$, где μ_i есть значение магнитной проницаемости в подобласти Ω_F^i , $i = 1 \div p$. Тогда задачи в \mathbb{N} -постановке эквивалентны определению неподвижной точки уравнения

$$\vec{\mu} = M(\vec{\mu}) \quad , \quad \vec{\mu} \in R^p, \quad (9)$$

где нелинейный оператор $M(\vec{\mu})$ задается следующей последовательностью задач.

А. По заданному $\vec{\mu}$ определяется решение u задачи:

$$\begin{aligned} -\mu_i \Delta u &= 0 \quad , \quad x \in \Omega_F^i \quad , \quad i = 1 \div p \\ -\Delta u &= 0 \quad , \quad x \in \Omega_V^j \quad , \quad j = 1 \div q \end{aligned} \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = \psi(x) - \frac{\partial u''}{\partial n_2} \quad , \quad x \in \Gamma$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial n} \right] = 0 \quad , \quad x \in \gamma \setminus \Gamma$$

$$[u] = 0 \quad , \quad x \in \gamma$$

$$u = 0 \quad , \quad x \in \Gamma_E.$$

В. По вычисленному u определяется вектор $\vec{\mu}' = M(\vec{\mu})$:

$$\mu'_i = \mu(y_i) \quad ; \quad y_i = \frac{1}{\text{mes} \Omega_F^i} \left(\int_{\Omega_F^i} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}. \quad (11)$$

Численное решение задачи (9) осуществляется методом простой итерации $\vec{\mu}_{n+1} = M(\vec{\mu}_n)$, $n=0, 1, \dots$ на основе конечно-разностной аппроксимации системы (10).

Решение конечно-разностных аналогов систем (8), (10) осуществляется программой CDD3 (Complete Domain Decomposition, трехмерный случай), созданной на основе алгоритма клеточной декомпозиции области, изложенного в работе [2], и предназначенной для решения сеточных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами в областях ступенчатой конфигурации. Так как решение системы (10) является самым трудоемким этапом решения нелинейной задачи (9), кратко остановимся на основных свойствах итерационных методов декомпозиции области из [2] и некоторых вычислительных особенностях программы CDD3, вытекающих из этих свойств.

1. Итерационные методы декомпозиции из [2] относятся к классу итерационных процессов в подпространствах [9], поэтому в них участвуют только неизвестные на общих границах подобластей. В программе CDD3 это дает возможность использовать только $O(h^{-2})$ ячеек машинной памяти, а в ходе итераций по подобластям применять эффективные методы частичного решения задачи в подобласти [9,10,11]. (В программе CDD3 используется метод частичного решения из работы [11]).

2. Скорость сходимости итерационных методов декомпозиции из [2] определяется локальными характеристиками - числом неизвестных N по одному направлению в подобласти, и не зависит от числа подобластей и разрыва коэффициентов эллиптических уравнений, если эти разрывы проходят по границам раздела подобластей. В программе CDD3 это дает возможность для более точного учета нелинейности увеличивать число подобластей при фиксированном значении "пространственных" неизвестных по каждому направлению без существенного увеличения вычислительной работы.

3. Зависимость скорости сходимости от дискретизации задачи определяется как $\sqrt{N} \ln N$. Такая зависимость приводит к тому, что при многосеточной организации вычислений в программе CDD3 число итераций при переходе с сетки на сетку практически остается постоянным. (Это означает, что алгоритм является практически оптимальным по асимптотике числа арифметических действий).

Подводя итоги сказанному в этом параграфе, отметим этапы, из которых состоит численное решение задачи (2), (3), (6):

I. Вычисление поля H_0 , создаваемого токовыми обмотками, и связанных с ним функций $\psi(x)$ и $\Phi(x)$, которые задают условия сопряжения в (3). Обмотка представляет собой симметричную относительно плоскости YOZ систему, часть которой показана на рис. 4. Поле от такой обмотки представляется в виде суперпозиции полей, создаваемых прямолинейными брусками прямоугольного сечения, и полей, которые создаются секторами с угловым размером $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ от осесимметричных катушек. Для этих вычислений использовались формулы из работы [8]. Функции ψ и Φ вычисляются на двумерной поверхности раздела сред один раз до начала численных экспериментов на достаточно мелкой сетке, запоминаются и используются в дальнейшем для определения условий сопряжения в произвольной точке поверхности с помощью линейной интерполяции. Сетка выбирается таким образом, что относительная погрешность значений Φ и ψ , получаемых интерполяцией, не превышает заданного ϵ .

II. Решение задачи (8) в области Ω_V и вычисление $\partial u_1^0 / \partial n_2$ на границе раздела сред Γ . Это осуществляется программой CDD3.

Ш. Решение нелинейной задачи (9), самый трудоемкий этап которой (10) осуществляется также с помощью программы CDD3. Затем, если необходимо, при фиксированной сетке для потенциала U организируются расчеты на последовательности разбиений ярма магнита

$$\vec{r} \in R^{P_1} \rightarrow \vec{r} \in R^{P_2} \rightarrow \vec{r} \in R^{P_3} \rightarrow \dots, \quad P_1 < P_2 < P_3 < \dots$$

(аналог многосеточных методов для более точного учета нелинейности), причем конечное разбиение определяется наименьшей возможной сеточной подобластью в программе CDD3, которая есть $2 \times 2 \times 2$. При использовании таких сеточных подобластей задача в IN -постановке фактически совпадает с традиционными дифференциальными постановками.

§ 3. Результаты моделирования

Расчеты производились на последовательности трех сеток $(12, 14, 14) \rightarrow (24, 28, 28) \rightarrow (48, 56, 56)$ с использованием решения на грубой сетке в качестве начального приближения для более мелкой.

Учет нелинейности велся на трех уровнях:

- (I) магнитная проницаемость μ полагалась равной постоянной величине во всем объеме ярма магнита;
- (II) разбиение ярма на 12 подобластей (рис. 2);
- (III) разбиение ярма на 48 подобластей.

Расчеты проводились для двух токов - проектного номинального тока 850А/виток (проектная величина магнитного поля - 1,2 Тл, расчетная - 1,4 Тл) и тока 725 А/виток, для которого получающаяся в результате расчетов величина магнитной индукции совпадает с проектной - 1,2 Тл.

Итерационный процесс решения задач (8), (10) заканчивался при достижении относительной точности решения 10^{-4} . В методе простой итерации решения (9) было достаточно 2-3 итераций для получения относительной точности решения 10^{-4} в рабочей зоне магнита. Время решения задачи на последней сетке составляет 8 мин (ЕС-1066).

Сходимость решения по сеткам (для тока 850 А/виток) для различных точек в рабочей зоне магнита представлена в табл. 1.

Таблица 1

	$B(0,0,0)$	$B(0,0,20,5)$
1	1,424	1,230
2	1,425	1,279
3	1,425	1,282

Величина магнитного поля для трех уровней учета нелинейности показана в табл. 2 (ток 850 А).

Таблица 2

	$B(0,0,0)$	$B(0,0,20,5)$
(I)	1,429	1,290
(II)	1,425	1,282
(III)	1,425	1,282

Распределение магнитной проницаемости при переходе со второго уровня на третий показано на рис. 5 (справа схематически изображено разбиение на втором уровне - 12 подобластей, слева - на третьем - 48 подобластей).

На рис. 6а,б,в представлены полученные в результате расчетов величины, характеризующие отклонения магнитного поля от однородного. Рис. 6а демонстрирует отклонения на оси магнитной системы, которая характерна тем, что на ней отлична от нуля только одна компонента поля - B_x (отклонения выражены в процентном отношении к величине магнитного поля в центре магнита - $B_0=1,425$ Тл (ток 850 А/виток), $B_0=1,214$ (ток 725 А/виток)). Рис. 6б демонстрирует распределение неоднородности поля $(B_x - B_0)/B_0$ по апертуре магнита в центральном сечении (пунктирной линией обозначена граница рабочей зоны) при $X=0$, рис. 6в - при $Y=0$. Таким образом, получающаяся в результате неоднородность поля в рабочей зоне не превышает 2%, что укладывается в проектные допуски $\pm 2\%$.

Приведем также таблицу, демонстрирующую некоторые проектные характеристики магнитной системы и характеристики, полученные в результате численного моделирования.

	проект	моделирование	
	850	850	725
Ток - Ампер/виток			
Магнитное поле в центре системы (Тл)	1,2	1,425	1,214
Неоднородность м.п. в пределах рабочей зоны (%)	$\pm 2\%$	не превыш. 2%	не превышает 2%
Эффективная длина (см)	55	58	58

В заключение мы выражаем благодарность д.ф.-м.н. Самойлову А.В. и группе д.ф.-м.н. Курелина А.Б. за постановку практической задачи и обсуждение результатов. Авторы благодарны Ю.Л.Обухову за обсуждение задачи на начальном этапе работы.

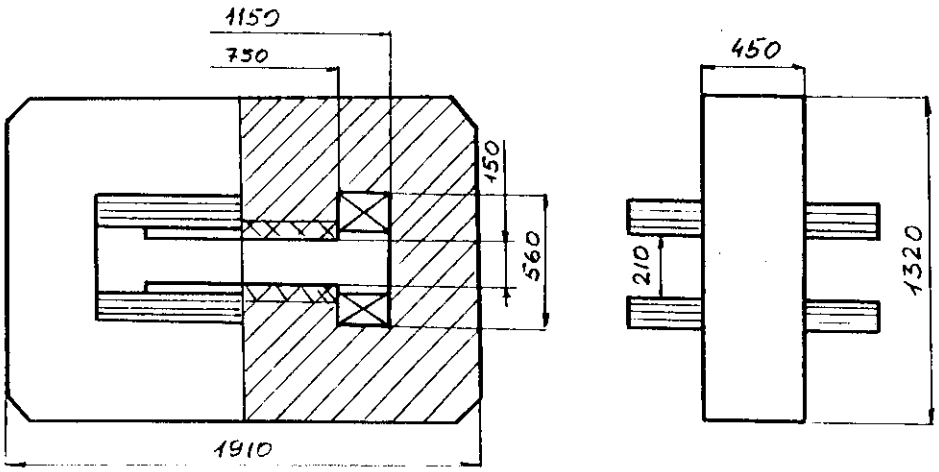


Рис. 1

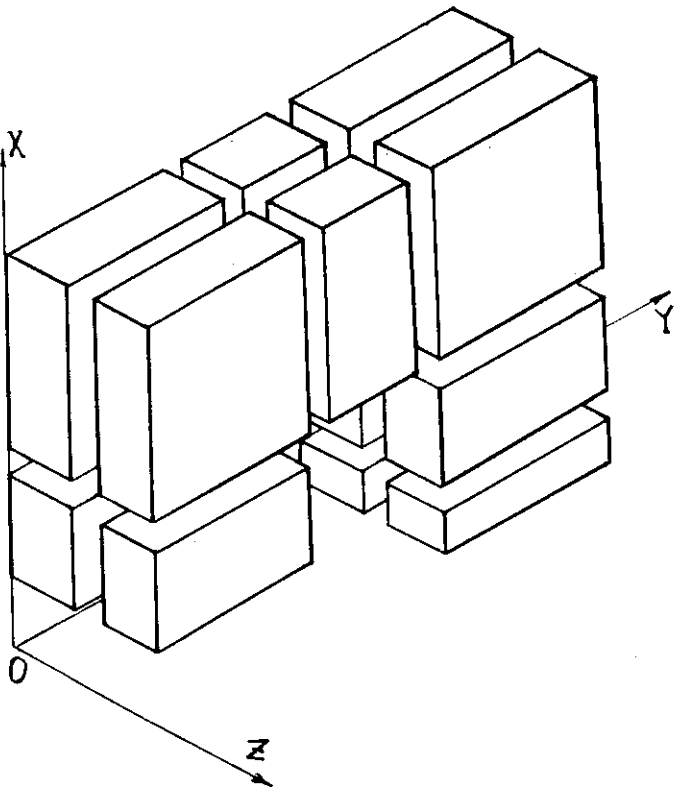


Рис. 2

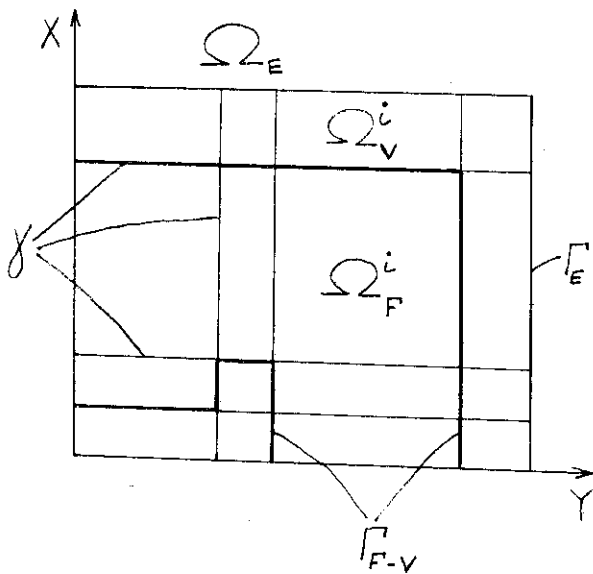


Рис. 3

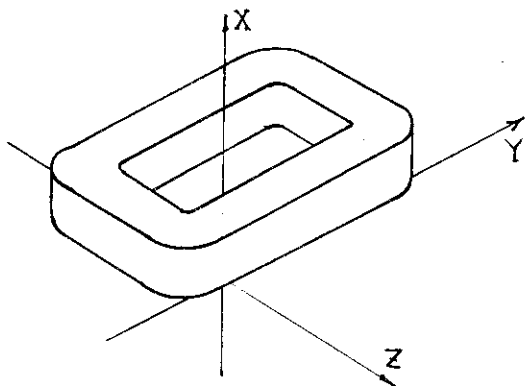


Рис. 4

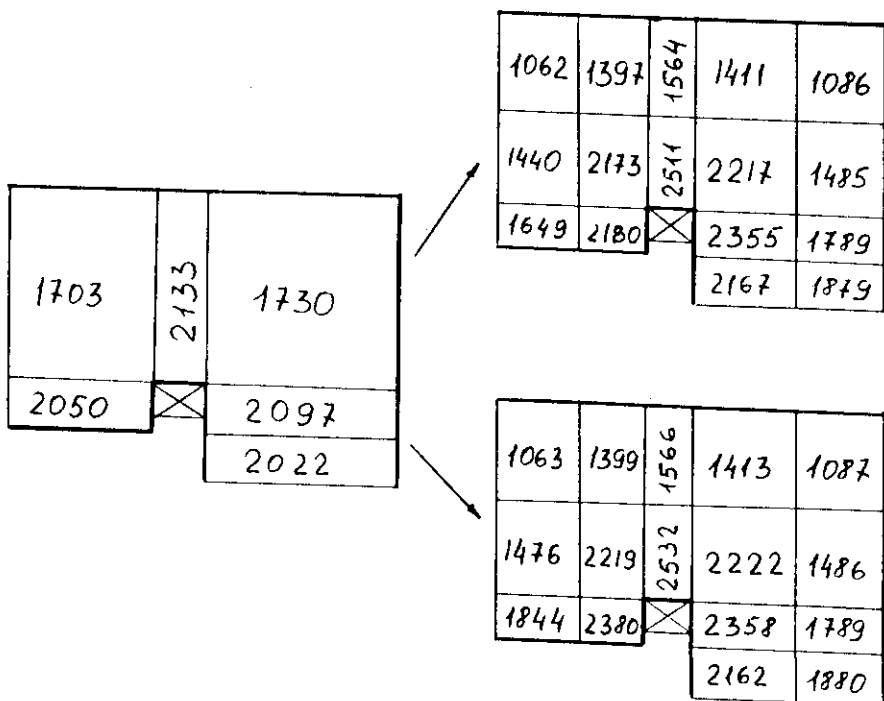
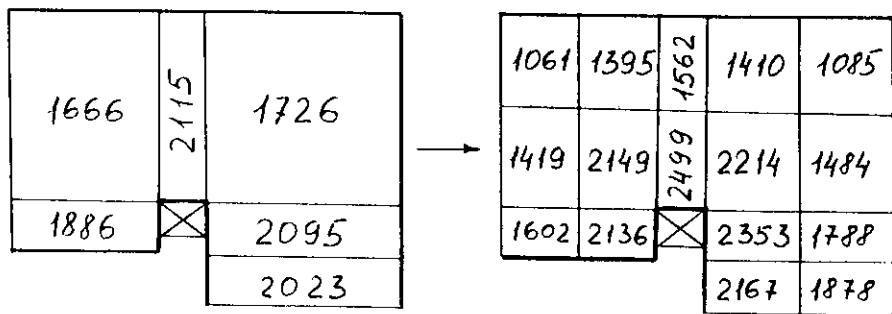
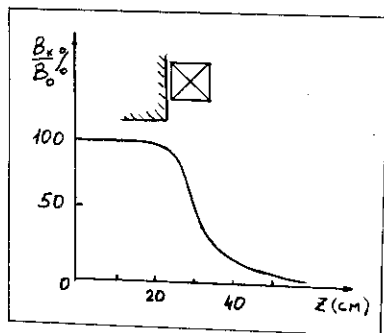
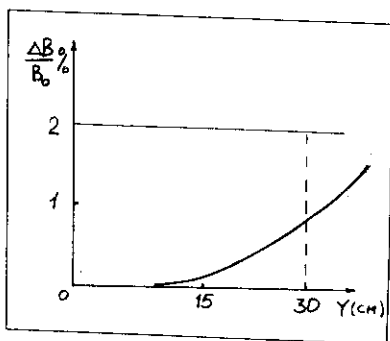


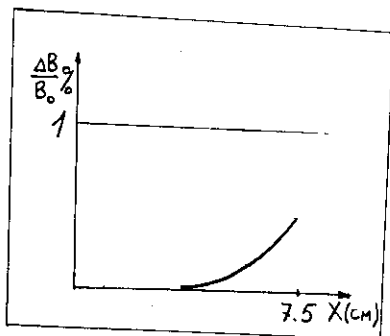
Рис. 5



a



b



b

Рис. 6

Л и т е р а т у р а

1. Губер Ф.Ф. и др.—Пион-ядерные реакции при низких энергиях. Препринт ИИИ АН СССР. П-0452.— Москва, 1986.
2. Zhidkov E.P., Mazurkevich G.E., Khoromsky B.N.—Iterative methods of domain decomposition with cross-points for the solution of discrete elliptic problems.— Preprint JINR, E11-89-174, Dubna, 1989.
3. Хоромский Б.Н.—Краевые задачи магнитостатики в неполно-нелинейной постановке и методы их решения (I,II).— Сообщения ОИЯИ PII-88-480, PII-88-784, Дубна, 1988.
4. Gienkiewicz O.C., Lyness J., Owen D.— Three-dimensional magnetic field determination using a scalar potential. - IEEE Trans., MAG-13, 1977, pp. 1649-1656.
5. Simkin J., Growbridge C.W.— Three-dimensional nonlinear electromagnetic field computations using scalar potentials. - IEE Proc., vol. 127, Pt. B, No 6, 1980, pp 368-374.
6. Дойников Н.И.—Постановка задач численного анализа полей нелинейных магнитных систем.— Обзор ОБ-8, НИИЭФА, Ленинград, 1976.
7. Жидков Е.П., Мазуркевич Г.Е., Хоромский Б.Н.—К теории комбинированных методов в нелинейных задачах магнитостатики.— Сообщение ОИЯИ, PII-87-50I, Дубна, 1987.
8. Feng Z.X.—The treatment of singularities in calculation of magnetic field by using integral method.— IEEE Trans. on Mag., vol. MAG-21, No 6, 1985, pp. 2207-2210.
9. Кузнецов Ю.А.—Вычислительные методы в подпространствах.— В кн.: Вычислительные процессы и системы, 2. М.: Наука, 1985, стр. 266-350.
10. Бахвалов Н.С., Орехов М.Ю.—О быстрых способах решения уравнения Пуассона.— ЖВМ и МФ, 1982, т. 22, № 6, стр. 1386-1392.
11. Khoromskij B.N., Mazurkevich G.E.—One fast solver for discrete Laplace equation on rectangle regions.— Preprint JINR, E11-89-811, Dubna, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
26 февраля 1990 года.