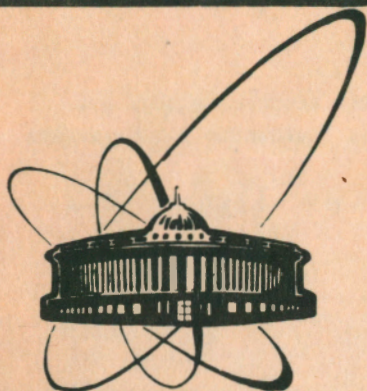


90-11



сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

И 20

P11-90-11

Д.И.Иванова, С.Н.Димова, М.С.Касчиев

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ
ОДНОМЕРНЫХ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ
ГОРЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ СРЕДЫ

1990

Эта работа является продолжением работ^{/1,2/}, где предложен и реализован метод численного решения нелинейной краевой задачи

$$L(\theta) = -\frac{1}{\gamma^{N-1}} (\gamma^{N-1} \theta' \theta')' + \frac{\beta - \sigma - 1}{2} \gamma \theta' + \theta - \theta^\beta = 0, \quad 0 < \gamma \leq l, \quad (1)$$

$$\theta'(0) = 0, \quad \sigma > 0, \beta > 1, N = 1, 2, 3, \quad (2)$$

$$\theta(l) = 0 \quad \text{при} \quad \beta \leq \sigma + 1, \quad (3)$$

$$\theta'(l) + p\theta(l)/l = 0, \quad p = \frac{2}{\beta - \sigma - 1} \quad \text{при} \quad \sigma + 1 < \beta < (\sigma + 1) \frac{N+2}{(N-2)+}. \quad (4)$$

Использовался непрерывный аналог метода Ньютона (НАМН) в сочетании с методом конечных элементов (МКЭ). При аппроксимации по МКЭ использовались квадратичные лагранжевы элементы. Численно была показана сверхсходимость метода в узлах разбиения, достаточно далеких от сингулярных точек решения — там порядок сходимости четвертый, вместо стандартного третьего. Однако вблизи сингулярных точек $\gamma = \gamma_0$, где $\theta(\gamma_0) = 0$, $\theta'(\gamma_0)$ разрывная, а уравнение вырождается, наблюдались заметные осцилляции решения около нуля. Так как мы ищем неотрицательные решения, было естественным использовать линейные элементы — в этом случае базисные функции неотрицательные. Ниже приведены результаты численного исследования точности метода при использовании линейных элементов, разных способов численного интегрирования и одной модификации алгоритма в сферически-симметричном случае ($N=3$). Кроме того, приведены новые результаты исследования поведения решений задачи (1)–(4) при $\beta \rightarrow \sigma + 1 + 0$.

1. Предварительные сведения

Задача (1)–(4) возникает при исследовании неограниченных автомодельных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения теплопроводности с источником:

$$u_t = \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} u^\sigma u_r)_r + u^\beta, \quad 0 < r < \infty, \quad t > 0.$$

Пространственно-временная структура неограниченных решений $u(t, r)$ определяется решениями $\theta(\gamma)$ автомодельной задачи (1)–(4). Поэтому функции $\theta(\gamma)$ называются собственными функциями (СФ) горения нелинейной диссипативной среды, описываемой уравнением (5)^{/3,4/}. При $\beta = \sigma + 1$ говорят о S -режиме горения среды, при $\beta < \sigma + 1$ — о HS -режиме, при $\beta > \sigma + 1$ — о LS -режиме.

Мы не будем перечислять многочисленные известные результаты, которые приведены, использованы и цитированы в^{/1,2/}. Остановимся только на двух нерешенных проблемах, которые обсуждаются ниже:

- число различных решений при $\sigma+1 < \beta < (\sigma+1)(N+2)/(N-2)+$,
- структура и поведение СФ с четными номерами $\theta_{2i}(\xi)$ при

$$\beta \rightarrow \sigma+1+0.$$

На основе линейного анализа^{/5,6/} и некоторых численных результатов в работах^{/5,6,7,8/} было высказано предположение, что число различных решений задачи (1), (2), (4) при $\sigma+1 < \beta < (\sigma+1)(N+2)/(N-2)+$ и при всех $N \geq 1$ равно $M+1$, где

$$M = -[-(\beta-1)/(\beta-\sigma-1)] - 1.$$

До сих пор доказано^{/9,10/} только, что при $N=1$ имеется не менее M различных решений. При этом под сомнение ставится существование СФ с номером $M+1$. Гипотеза, выдвинутая в^{/2/}, о вырождении при $\sigma+1 < \beta < \beta_0(\sigma, N)$ СФ с нечетными номерами $\theta_{2i+1}^{(N)}(\xi)$ в первую СФ $\theta_1^{(N)}(\xi)$, $N=2,3$, ставит под сомнение и существование СФ $\theta_3^{(N)}$, $\theta_5^{(N)}$ и т.д., для таких значений σ и β . Здесь мы поставили себе цель проверить численно существование $M+1$ -вой СФ для небольших значений M ($M=1,2,\dots,10$).

В работе^{/2/} при $N=2,3$ численно были получены СФ, которые аннулируются в окрестности центра симметрии:

$$\theta_{2i}(\xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq \xi_{2i}^*(\sigma, \beta, N), \quad \theta_{2i}^{\sigma} \theta_{2i}'(\xi_{2i}^*) = 0, \quad (5)$$

$$\theta_{2i}(\xi) > 0 \quad \text{при} \quad \xi > \xi_{2i}^* > 0.$$

С.П.Курдюмовым был поставлен вопрос: можно ли сказать что-нибудь о соотношении радиусов ξ^* "пустот" около центра симметрии? Чтобы ответить на этот вопрос, мы исследовали разности

$$d_i = d_i(\sigma, \beta, N) = \xi_{2i}^* - \xi_{2(i+1)}^*, \quad i=1,2,\dots$$

для различных значений σ , β и $N=2,3$.

Отметим, что существование счетного множества решений, среди которых могут быть функции со структурой (5), было доказано качественными методами^{/14/} для более общего уравнения при $N=3$.

При разработке численного метода мы будем использовать альтернативную форму записи уравнения (1):

$$\tilde{L}(\theta) \equiv -(\xi^{\sigma} \theta^{\sigma} \theta')' - \gamma(N-2)\theta^{\sigma} \theta' + m \xi^{1+\sigma} \theta' + \xi^{\sigma} \theta(1-\theta^{\beta-1}) = 0 \quad (I')$$

где $\gamma=0$ при $N=1$, $\gamma=1$ при $N=2,3$, $m = \frac{\beta-\sigma-1}{2} = \frac{1}{\rho}$.

Аналогичная форма записи радиально-симметричного линейного уравнения

была использована в^{/II/} для построения вычислительной схемы с оптимальным порядком точности при $N > 2$. Для метода Галеркина на основе записи

$$-(x^{N-1}u')' + x^{N-1}qu = x^{N-1}f, \quad 0 < x < 1,$$

с использованием непрерывных кусочно-полиномиальных функций (степени $\tau-1$ на каждом элементе) в^{/I2/} была получена следующая оценка ошибки приближенного решения u_h

$$\|u_h - u\|_{L_\infty} \leq C \left(\ln \frac{1}{h}\right)^{\bar{\tau}} h^\tau \|u^{(\tau)}\|_{L_\infty},$$

где $\bar{\tau} = 1$ при $\tau = 2$ и $\bar{\tau} = 0$ при $\tau > 2$.

Для метода Галеркина на основе записи

$$-(xu')' - (N-2)u' + xqu = xf, \quad 0 < x < 1,$$

при $N > 2$ в^{/II/} была получена оценка с оптимальным порядком сходимости и при $\tau = 2$:

$$\|u_h - u\|_{L_\infty} \leq Ch^\tau \|u^{(\tau)}\|_{L_\infty}. \quad (6)$$

2. Численный метод

В работе^{/I/} был изложен подробно метод решения задачи (I)-(4) при использовании квадратичных конечных элементов. Здесь мы повторим основные моменты применительно к альтернативной формулировке (I'), (2), (3) и (I'), (2), (4) и при использовании линейных элементов.

2.1. Непрерывный аналог метода Ньютона

Стационарным задачам (I'), (2), (3) и (I'), (2), (4) соответствует эволюционная задача

$$\tilde{L}'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial t} = -\tilde{L}(\theta), \quad (7)$$

$$\theta(\xi, 0) = \theta_0(\xi). \quad (8)$$

Здесь $\theta_0(\xi)$ - заданная функция, удовлетворяющая граничным условиям (2), (3) для $1 < \beta < \sigma + 1$, и (2), (4) для $\beta > \sigma + 1$. Как известно^{/I3/}, при некоторых условиях на оператор $\tilde{L}(\theta)$ выполняется соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(\xi, t) = \theta^*(\xi),$$

где $\theta(\xi, t)$ - решение задачи (7), (8), а $\theta^*(\xi)$ - решение упомянутых выше задач.

Положим $v = \partial\theta/\partial t$. Метод Эйлера, примененный к задаче (7), (8), дает итерационную схему

$$\tilde{L}'(\theta_k)v_k = -\tilde{L}(\theta_k), \quad (9)$$

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \tau_k v_k, \quad 0 < \tau_k \leq 1, \quad k=0, 1, \dots \quad (10)$$

$$\theta_0 = \theta_0(\xi) \quad (11)$$

$$\theta_k = \theta_k(\xi) = \theta(\xi, t_k), \quad v_k = v_k(\xi) = v(\xi, t_k).$$

В нашем случае уравнение (9) принимает вид (для простоты обозначений здесь и далее индекс k опущен):

$$\begin{aligned} & -(\xi^\sigma \theta^\sigma v')' - \rho(N-2)\theta^\sigma \theta'^{\sigma-1} v' - (\xi^\sigma \theta^{\sigma-1} v')' - \\ & - \rho(N-2)\theta^\sigma v' + m\xi^{1+\rho} v' + \xi^\rho(1-\rho\theta^{\rho-1})v = \\ & = -[-(\xi^\rho \theta^\sigma \theta')' - \rho(N-2)\theta^\sigma \theta' + m\xi^{1+\rho} \theta' + \xi^\rho(1-\theta^{\rho-1})\theta]. \end{aligned} \quad (12)$$

Итерационные поправки $v(\xi)$ удовлетворяют однородным граничным условиям

$$v'(0) = 0, \quad v(l) = 0 \quad \text{при} \quad 1 < \rho \leq \sigma+1, \quad (13)$$

$$v'(0) = 0, \quad v'(l) + \rho v(l)/l = 0 \quad \text{при} \quad \rho > \sigma+1. \quad (14)$$

2.2. Слабая форма задачи

дискретизация по МКЭ проводится на основе слабой формы задач (12), (13) и (12), (14):

Найти функцию $v(\xi) \in \dot{H}^1(0, l)$, удовлетворяющую тождеству

$$(\tilde{L}'(\theta)v, w) = -(\tilde{L}(\theta), w), \quad \forall w \in \dot{H}_\alpha^1(0, l) \quad (15)$$

и граничным условиям (13) или (14) соответственно. Здесь $\theta(\xi)$ - заданная функция, такая, что

$$\theta \in \mathcal{D} = \{\theta(\xi) : \theta, d\theta^{\sigma+1}/d\xi \in L^2(0, l)\},$$

$$\dot{H}_\alpha^1(0, l) = \{w : w, \xi^{1/2} w' \in L^2(0, l), (1-\alpha)w(l) = 0\}.$$

Значение $\alpha = 0$ отвечает условию (13), а $\alpha = 1$ - условию (14).

Для задач (12), (13) и (12), (14) тождество (15) имеет вид.

$$\begin{aligned}
& \int_0^e \{ \xi^p a(\theta) v' w' + [\xi^p q_1(\theta) - m \xi^{1+p} + p(N-2)a(\theta)] v w' + \\
& + [\xi^p q_2(\theta) - (1+p)m \xi^p] v w \} d\xi + p(N-2)a(\theta) v w \Big|_{\xi=0} + \\
& + \alpha [m \xi^{1+p} + (p(1+\sigma)\xi^{p-1} - p(N-2)a(\theta))] v w \Big|_{\xi=e} = \\
& = - \int_0^e \{ \xi^p a(\theta) \theta' w' + [-m \xi^{1+p} + p(N-2)a(\theta)] \theta w' + \\
& + [\xi^p q_3(\theta) - (1+p)m \xi^p + p(N-2)q_1(\theta)] \theta w \} d\xi - \\
& - p(N-2)a(\theta) \theta w \Big|_{\xi=0} - \alpha [m \xi^{1+p} - p(N-2) - p \xi^{p-1}] a(\theta) \theta w \Big|_{\xi=e} \quad (I6)
\end{aligned}$$

Функции a, q_1, q_2, q_3 определяются формулами

$$\begin{aligned}
a(\theta) &= \theta^\sigma, \quad q_1(\theta) = \sigma \theta^{\sigma-1} \theta', \\
q_2(\theta) &= 1 - p \theta^{p-1}, \quad q_3(\theta) = 1 - \theta^{p-1}.
\end{aligned} \quad (I7)$$

2.3. Метод конечных элементов

Пусть $\bar{w}_h = \{0 = \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_n = e, \xi_{i+1} - \xi_i \leq h\}$ - разбиение отрезка $[0, e]$ на элементы $e_i = [\xi_i, \xi_{i+1}]$. Мы ищем приближенное решение в конечномерном пространстве $S_{\alpha, h}$ непрерывных функций, линейных на каждом элементе e_i :

$$S_{\alpha, h} = \{x(\xi) \in C[0, e]; x|_{[\xi_i, \xi_{i+1}]} \in P_1, (1-\alpha)x(e) = 0\}.$$

Пусть $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ - базис $S_{\alpha, h}$: $\varphi_i(\xi_j) = \delta_{ij}$, а $I_h w$ - интерполант функции w по базису:

$$I_h: C[0, e] \rightarrow S_{\alpha, h}, \quad (I_h w)(\xi_i) = w(\xi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Тогда

$$\|I_h w - w\|_{L^2(0, e)} + h \|\nabla I_h w - \nabla w\|_{L^2(0, e)} \leq C h^2 \|w\|_{H^2(0, e)} \quad (I8)$$

$$\|I_h w - w\|_{L^\infty(0, e)} \leq C h^2 \|w\|_{W_\infty^2(0, e)}.$$

Разложим функции θ, v, w по базису $\{\varphi_i\}$:

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i \varphi_i, \quad v = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i, \quad w = \sum_{i=1}^n w_i \varphi_i, \quad (I9)$$

где $\theta^T = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$, $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, $w^T = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ — векторы значений соответствующих функций в узлах разбиения \bar{W}_h .

Подставляя (I9) в (I6), получаем линейную систему сеточных уравнений для итерационных поправок V :

$$A(\theta)V = -B(\theta)\theta. \quad (20)$$

Матрицы A и B — ленточные несимметричные. Мы не будем выписывать здесь элементы матриц A и B . Отметим только, что для нелинейных коэффициентов a, q_1, q_2, q_3 использована стандартная аппроксимация на каждом элементе e_i :

$$\tilde{a}(\theta) = \left(\sum_{j=1}^2 \theta_j^{(i)} \varphi_j(s) \right)^{\sigma}, \quad \tilde{q}_1 = \sigma \left(\sum_{j=1}^2 \theta_j^{(i)} \varphi_j(s) \right)^{\sigma-1} \left(\sum_{j=1}^2 \theta_j^{(i)} \varphi_j'(s) \right)$$

и т.д., где φ_j , $j=1,2$ — функции формы канонического элемента $e = [^{-1}, 1]$: $\varphi_1(s) = (1-s)/2$, $\varphi_2(s) = (1+s)/2$.

Мы не будем также останавливаться на реализации итерационного процесса (9)–(10) и на выборе начальных приближений (II) — все это проводится так, как в [1]. Вычислительные схемы, полученные на основе уравнений (I) и (I'), далее будем называть первой и второй вычислительными схемами соответственно. Отметим, что при $N=1,2$ они совпадают.

3. Численные эксперименты и результаты

Целью численных экспериментов было:

- исследование точности первой и второй вычислительных схем при использовании линейных элементов и различных квадратурных формул;
- численная проверка существования M+I-ой СФ;
- ответить на вопрос: что можно сказать о расстояниях

$$d_i = \{z_i^* - z_{i+1}^*\} \quad \text{при заданном } \sigma \text{ и } \beta \rightarrow \sigma+1+0.$$

3.1. Исследование точности метода

Сравнение численного решения с точным при $N=1$, $\beta=\sigma+1$ и анализ результатов на последовательности вложенных сеток указывает на оптимальный порядок точности $\tau=2$ (см. (6)) метода в той части области, где решение имеет необходимую гладкость.

$$\beta = \sigma + 1 = 3, \quad N = 1, \quad e(\xi) = \theta_h(\xi) - \theta(\xi) \quad \text{Таблица I}$$

h	$\xi = 0$	τ	$\xi = 0.8$	τ	$\xi = 1.6$	τ
0.2000	$0.1364640 \cdot 10^{-2}$		$-0.3391154 \cdot 10^{-3}$		$-0.4732817 \cdot 10^{-2}$	
		2.00		2.06		2.01
0.1000	$0.3404991 \cdot 10^{-3}$		$-0.8160177 \cdot 10^{-4}$		$-0.1176381 \cdot 10^{-2}$	
		2.00		2.01		2.00
0.0500	$0.8485059 \cdot 10^{-4}$		$-0.2028075 \cdot 10^{-4}$		$-0.2932895 \cdot 10^{-3}$	
		2.01		1.99		2.00
0.0250	$0.2106125 \cdot 10^{-4}$		$-0.5089638 \cdot 10^{-5}$		$-0.1562641 \cdot 10^{-3}$	
		2.03		1.98		2.01
0.0125	$0.5148038 \cdot 10^{-5}$		$-0.1290238 \cdot 10^{-5}$		$-0.1820332 \cdot 10^{-4}$	

h	$\xi = 2.4$	τ	$\xi = 2.7$	τ	$\xi = 2.8$	τ
0.2000	$-0.8693318 \cdot 10^{-2}$				$0.6767782 \cdot 10^{-2}$	
		1.86				
0.1000	$-0.2398412 \cdot 10^{-2}$		$0.7802232 \cdot 10^{-2}$		$0.5512370 \cdot 10^{-3}$	
		1.96		1.70		
0.0500	$-0.6165970 \cdot 10^{-3}$		$0.2406839 \cdot 10^{-2}$		$0.1642554 \cdot 10^{-6}$	
		1.98		2.55		
0.0250	$-0.1562641 \cdot 10^{-3}$		$0.4121691 \cdot 10^{-5}$		0.0	
		1.96		4.03		
0.0125	$-0.4018414 \cdot 10^{-4}$		$0.2517811 \cdot 10^{-4}$		0.0	

В таблице I приведены значения погрешности $e(\xi) = \theta_h(\xi) - \theta(\xi)$, $\xi \in \bar{\omega}_h$ для \mathcal{S} -режима при $N=1$, $\beta = \sigma + 1 = 3$ в разных точках пяти вложенных разбиений с шагами $h = 0.2$; 0.1 ; 0.05 ; 0.025 ; 0.0125 . Отметим, что в этом случае $\xi_0 \sim 2.7207$ и что в этой точке производная $\theta'(\xi)$ имеет разрыв. Тем не менее, как видно из табл. I, вблизи этой точки точность достаточно высокая. За этой точкой (где $\theta(\xi) \equiv 0$) приближенное решение $\theta_h(\xi)$ не имеет осцилляций, или они на порядок меньше, по сравнению со случаем квадратичных элементов.

Таблица 2 содержит значения численного решения для \mathcal{S} -режима при $N=2$, $\beta = \sigma + 1 = 3$ на трех вложенных сетках. В точке $\xi = 0$ порядок точности ниже ($\tau \sim 1.8$), а в остальных точках $\tau \sim 2$.

$$\beta = \sigma + 1 = 3, \quad N = 2 \quad \theta_h(\xi)$$

Таблица 2.

h	$\xi = 0$	τ	$\xi = 0,8$	τ	$\xi = 1,6$	τ	$\xi = 2,4$	τ	$\xi = 2,8$	τ
0.20	1.468814	1.78	1.341528	1.98	0.9958248	1.93	0.4938616	1.99	0.2130406	2.69
0.10	1.464611		1.340540		0.9954718		0.4935832		0.2125566	
0.05	1.463390		1.340289		0.9953793		0.4935129		0.2124848	

$$\beta = \sigma + 1 = 3, \quad N = 3 \quad \theta_h(\xi)$$

Таблица 3

h	$\xi = 0.0$	τ	$\xi = 0.8$	τ	$\xi = 1.6$	τ	$\xi = 2.4$	τ	$\xi = 2.8$	τ
I схема	0.40	1.747684	1.68	1.605931	1.98	1.261843	2.04	0.7624175	2.33	0.4792797
	0.20	1.726220		1.599599		1.260792		0.7634072		0.4603580
	0.10	1.719496		1.597994		1.260536		0.7636043		0.4810750
	0.05	1.717476		1.597584		1.260468		0.7636569		0.4811441
II схема	0.40	1.721136	2.10	1.602726	2.08	1.267529	2.02	0.7725607	1.93	0.4902303
	0.20	1.717725		1.598714		1.262206		0.7659756		0.4836629
	0.10	1.716929		1.597768		1.260889		0.7642477		0.4817792
	0.05	1.716725		1.597527		1.260556		0.7638178		0.4813203

Таблица 4

$$\sigma = 2, \quad \beta = 3.2 \quad \theta_{1,h}(\xi)$$

N	h	$\xi=0.0$	$\xi=0.8$	$\xi=1.2$	$\xi=2.8$	$\xi=3.2$
I	0.4					
	0.2	2.12	2.11	2.10	1.88	1.31
	0.1					
	0.20					
	0.10	2.01	2.02	2.02	1.98	1.81
	0.05					
	h	$\xi=0.0$	$\xi=1.2$	$\xi=1.6$	$\xi=3.2$	$\xi=3.6$
2	0.4					
	0.2	1.73	1.85	1.61	2.29	1.93
	0.1					
	0.20					
	0.10	1.78	1.95	1.87	2.04	2.00
	0.05					
	h	$\xi=0.0$	$\xi=1.6$	$\xi=2.0$	$\xi=3.6$	$\xi=4.0$
3	0.4					
	0.2	1.65	1.88	2.01	2.16	1.92
	0.1					
	I сх. 0.20					
	0.10	1.74	1.96	2.02	2.03	1.99
	0.05					
3	0.4					
	0.2	1.96	1.98	1.98	2.82	1.89
	0.1					
	II сх. 0.20					
	0.10	1.97	1.99	1.99	2.19	2.00
	0.05					

В таблице 3 приведены значения СФ S -режима при $N=3$, $\beta=\sigma+1=3$, вычисленные по первой и по второй схеме. Порядок точности первой схемы ниже в точке $\xi=0$ и в близких к ней - $\tau \sim 1.7$, а для второй схемы - в тех же точках $\tau \sim 2$.

Мы не приводим численных результатов для HS -режима ($\beta < \sigma+1$), потому что они аналогичны результатам для S -режима. И здесь осцил-

Таблица 5

		$\sigma=2, \quad \beta=3.2$		$\theta_{2,h}(\xi)$			
N	h	$\xi=0.0$	$\xi=0.8$	$\xi=2.0$	$\xi=3.2$	$\xi=5.2$	$\xi=5.6$
1	0.4						
	0.2	2.10	1.99	2.05	2.11	1.95	1.97
	0.1						
	0.20						
	0.10	2.03	1.99	2.02	2.03	1.99	1.88
	0.05						
		$\xi=0.4$	$\xi=0.8$	$\xi=2.0$	$\xi=3.2$	$\xi=4.4$	$\xi=6.8$
2	0.4						
	0.2	2.32	1.93	1.94	1.95	1.96	1.98
	0.1						
	0.20						
	0.10	1.89	1.99	1.99	1.99	1.99	2.00
	0.05						
		$\xi=1.8$	$\xi=2.0$	$\xi=2.8$	$\xi=4.0$	$\xi=5.2$	$\xi=8.0$
3	0.4						
	0.2		1.96	1.92	1.93	1.94	1.90
	0.1						
	0.20						
	0.10	1.84	1.96	2.03	1.97	2.00	2.04
	0.05						

ляции решения справа от τ_0 , где $\theta'(\tau_0)$ - разрывная, на несколько порядков меньше, чем при использовании квадратичных элементов.

В таблице 4 приведены порядки точности для первой СФ $\theta_{1,h}(\xi)$ ΔS -режима ($\sigma=2$, $\beta=3.2$) при $N=1,2,3$. При $N=3$ приведены порядки точности для первой и второй схем.

Таблица 5 содержит порядки точности для второй СФ $\theta_{2,h}(\xi)$ при тех же значениях σ и β . Отметим, что при $N=2,3$ СФ $\theta_2(\xi)$ аннулируется в интервале $0 \leq \xi \leq \xi_2^*$, где $\xi_2^* \sim 0.35$ при $N=2$ и $\xi_2^* \sim 1.7$ при $N=3$. Тем не менее порядок точности в точках разбиения, близких к ξ_2^* , достаточно хороший.

Все приведенные результаты получены численным интегрированием по двухточечной формуле Гаусса для $N=2,3$ и по формуле трапеции для $N=1$.

Влияние различных квадратурных формул на точность результатов можно систематизировать так.

Повышение точности численного интегрирования (использование формулы Симпсона или квадратурных формул Гаусса с двумя (62) или с тремя (63) узлами не меняет порядка точности метода. Все же мы заметили следующее. Сравнение с точным решением при $N=1$, $\beta = \sigma+1$ показывает, что при использовании 62 ошибка в точках сетки, слева от T_0 и близких к ней, в 3-4 раза меньше, чем при использовании формулы трапеций. Наоборот, справа от T_0 осцилляции решения около нуля отсутствуют или на порядок меньше при использовании формулы трапеции, по сравнению с использованием 62.

3.2. M+I- и собственная функция

Для выяснения вопроса о существовании M+I- и СФ были проведены вычисления для $M+I=2,3,\dots,11$. При этом для каждого M подбирались две пары значений β и σ , для которых отношение $(\beta-1)/(\beta-\sigma-1)$ было целым и нецелым числом соответственно. Во всех случаях мы получили M+I- и СФ за 20-50 итераций при критерии окончания итерационного процесса $\delta = 10^{-6}$ (см. /1/). Все же этот вопрос остается открытым.

3.3. О структуре и поведении СФ $\theta_{2i}(\xi)$

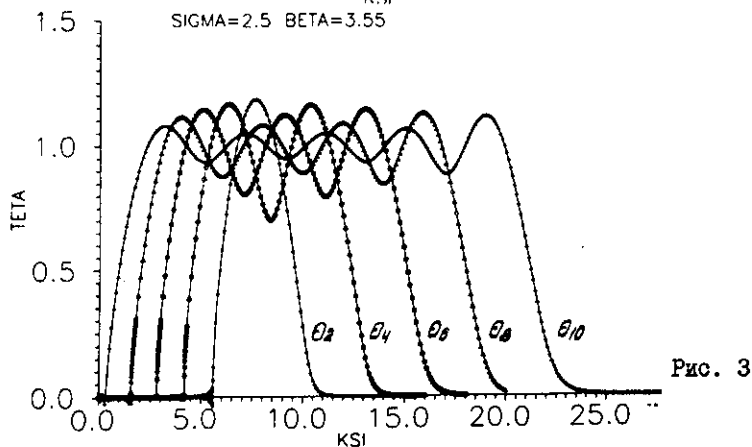
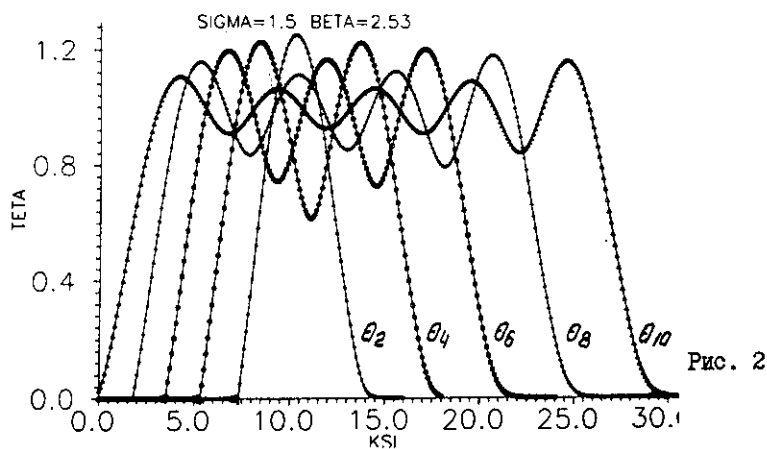
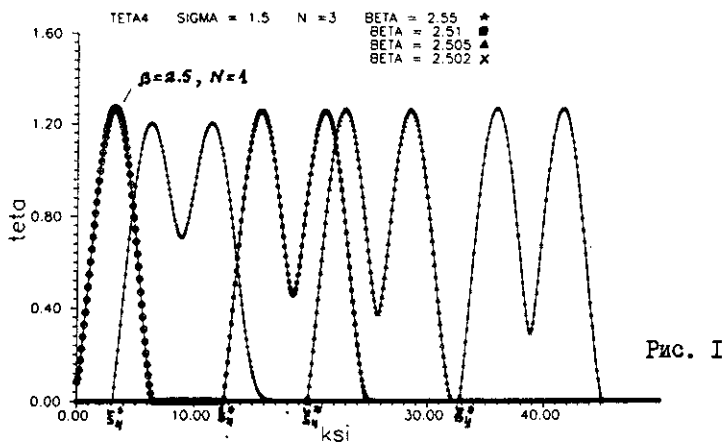
Для исследования структуры и поведения СФ с четными номерами были проведены следующие эксперименты.

Рис. 1 иллюстрирует утверждение в /2/: при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ и $N=2,3$ локальные максимумы СФ $\theta_4(\xi)$ ($\sigma=1.5$; $\beta=2.55$; 2.51; 2.505; 2.502, $N=3$) растут и стремятся к максимуму СФ S-режима при том же σ и $N=1$, локальный минимум падает и, СФ θ_4 , "уходя на бесконечность", стремится к СФ S-режима при $N=1$, состоящей из двух элементарных решений (см. /1,2/).

На рис. 2 показаны СФ $\theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_8, \theta_{10}$ для $\sigma=1.5$; $\beta=2.53$, на рис. 3 - СФ с теми же номерами для $\sigma=2.5$; $\beta=3.55$, а на рис. 4 - СФ $\theta_2, \theta_4, \theta_6, \theta_8, \theta_{10}, \theta_{12}, \theta_{14}$ для $\sigma=2.5$; $\beta=3.53$. Во всех случаях $N=3$.

В таблице 6 для $N=3$ и различных σ и β приведены число собственных функций и расстояния $d_i = d_i(\sigma, \beta, N) = \xi_{2i}^* - \xi_{2(i+1)}^*$, $i=1,2,\dots$. На основании этих результатов можно выдвинуть гипотезу: при $\beta \rightarrow \sigma+1+0$ расстояния d_i стремятся к некоторым величинам $d = d(\sigma)$:

$$d_i(\sigma, \beta, N) \rightarrow d(\sigma), \quad \beta \rightarrow \sigma+1+0 \quad (21)$$



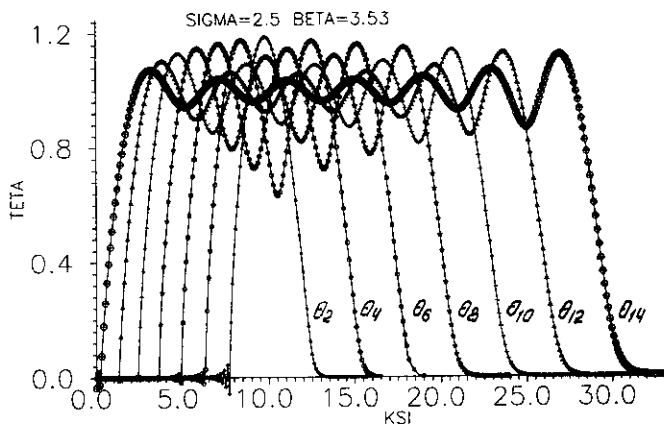


Рис. 4

Таблица 6

σ	β	μ	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	$\frac{2\sqrt{\sigma+1}}{\sigma}$
2.5	3.59	28	1.4	1.4					
	3.55	51	1.4	1.4	1.3	1.3			
	3.53	84	1.5	1.4	1.3	1.3	1.0	1.1	1.49
2.0	3.125	17	1.7						
	3.(1)	19	1.7						
	3.08	26	1.6						
	3.05	41	1.7	1.6	1.6				
	3.0(3)	61	1.7						
	3.0(28)	71	1.7						1.73
1.55	2.6	32	1.9	1.8					
	2.581	51	2.0	1.8	1.7				2.06
1.50	2.53	51	2.0	1.9	1.7				2.11

Похоже, что $d(\sigma) = 2\sqrt{\sigma+1}/\sigma = \sqrt{5}/\pi$, но это, как и гипотеза (21), нуждается в доказательстве.

4. Заключение

Для решения вырождающейся нелинейной краевой задачи (1)-(4) построены и численно исследованы две вычислительные схемы. Они получены исходя из двух альтернативных форм записи уравнения (1) с исполь-

возникшем непрерывного аналога методе Рунге и линейным конечным элементами. Для одной из них методом Рунге уточнен второй порядок точности вычисления в сингулярной точке $\gamma = 0$ при $N=3$.

Из со слов численного эксперимента высказана гипотеза, уточняющая структуру и поведение решений задачи при $N=2,3$ и $\beta \rightarrow \sigma+1+0$.

Авторы выражают глубокую благодарность чл.-корр. С.П.Курдюмову, М.М.Адьютову и Лепину Л.А. за полезные обсуждения.

Литература

1. Димов С.Н., Касчиев М.С., Курдюмов С.П. Численный анализ одномерных собственных функций горения нелинейной среды. Численный метод и эксперименты. РИ-88-473, Дубна, 1988. Некоторые предельные случаи. РИ-88-831, Дубна, 1988.
2. Димов С.Н., Касчиев М.С., Курдюмов С.П. Численный анализ собственных функций горения нелинейной среды в радиально-симметричном случае. ЖВМ, т. 29, № II, 1989, с. 1688-1704.
3. Курдюмов С.П. Собственные функции горения нелинейной среды и конструктивные законы построения ее организации. - В кн.: Современные проблемы матем. физики и вычислительной математики. М.: Наука, 1983, с. 217-243.
4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.
5. Адьютов М.М. Автомодельные обостряющиеся тепловые структуры в среде с распределенными параметрами. ДУ, 1986, т. 22, № II, с. 1934-1944.
6. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Потепов А.Б. Исследование многомерной архитектуры СФ нелинейной среды. Препринт ИИМ АН СССР, М., 1982, № 75.
7. Курдюмов С.П., Куркина Е.С., Мелинецкий Г.Г. Диссипативные структуры в средах с распределенными параметрами. Препринт ИИМ АН СССР, М., 1979, № 16.
8. Курдюмов С.П. и др. Диссипативные структуры в нелинейной неоднородной горячей среде. ДАН СССР, 1980, т. 251, № 3, с. 587-591.
9. Адьютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Исследование автомодельных тепловых структур в нелинейной среде. Препринт ИИМ АН СССР, М., 1982, № 108.
10. Адьютов М.М., Клоков Ю.А., Михайлов А.П. Автомодельные тепловые структуры с сокращающейся полушириной. ДУ, 1983, т. 19, № 7, с. 1107-1114.

- II. Eriksson K., Thomee V. Galerkin Methods for Singular Boundary Value Problems in One Space Dimension. Mathematics of Computation, vol. 42, N 166, (84), pp. 345-367.
- I2. D.Jespersen, Ritz-Galerkin methods for singular boundary value problems. SIAM J. Numer. Anal., v. 15, 1978, pp. 13-36.
- I3. Лидков Е.П., Мокеренко Г.И., Пузынин И.В. Непрерывный аналог метода Ньютона в нелинейных задачах физики. ЭЧАН, 1973, т. 4, в. I, с. 123-158.
- I4. Лепин Л.А. Счетный спектр собственных функций нелинейного уравнения теплопроводности с распределенными параметрами. ДУ, 1988, т. 24, № 7, с. 1226-1234.

Рукопись поступила в издательский отдел
9 января 1990 года.