

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



8982

ЭКЗ. ЧИТ. ЗАЛА

P11 - 8982

В.Ц.Банчев, С.Б.Ворожцов, Е.П.Жидков

ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА,
ОПИСЫВАЮЩИХ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ
КРИВОЛИНЕЙНЫХ ШИММ

1975

P11 - 8982

В.Ц.Банчев, С.Б.Ворожцов, Е.П.Жидков

ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА,
ОПИСЫВАЮЩИХ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ
КРИВОЛИНЕЙНЫХ ШИММ

ОИИ
БИБЛИОТЕКА

Постановка задачи

Одной из наиболее сложных задач при создании ускорителей циклотронного типа, в которых используются магнитные поля с пространственной вариацией, является формирование требуемого закона изменения магнитного поля. Это обусловлено сложной конфигурацией поля и жесткими допусками на точность его выполнения. Для ускорителей этого типа необходимый закон изменения магнитного поля в medianной плоскости $x=0$ в цилиндрической системе координат r, φ, z с началом отсчета в центре зазора электромагнита можно представить следующим образом (см. напр. [1]):

$$H_z(r, \varphi, z=0) = H(r) + H_N(r) \cos[\alpha(r) - N\varphi],$$

где $H(r)$ — среднее магнитное поле, $H_N(r)$ и $\alpha(r)$ — амплитуда и фаза основной гармоники поля, N — периодичность структуры магнитного поля. Один из методов формирования магнитного поля указанного вида, разработанный в ЛЯП ОИЯИ, базируется на использовании криволинейных шимм [1, 2]. Для создания вариации поля с заданной периодичностью используются N пар криволинейных шимм, расположенных симметрично относительно medianной плоскости $x=0$ и сдвинутых относительно друг друга на угол $\theta = \frac{2\pi}{N}$. В предположении равномерного намагничивания шимм вдоль оси x ($M_x = M(r), M_z = M_y = 0$) создаваемое магнитное поле $H(r)$, амплитуда $H_N(r)$ и фаза $\alpha(r)$ основной гармоники поля в medianной плоскости $x=0$ описываются следующими уравнениями [1, 2]:

$$H(r) = \frac{2N}{\pi r^{3/2}} \int_{R_H}^{R_K} \frac{M(r')}{\sqrt{r'}} [\beta_K(r') - \beta_H(r')] [h_2(r') Q'_{N-1/2}(x_2) - h_1(r') Q'_{N-1/2}(x_1)] dr', \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_N(r) \\ B_N(r) \end{array} \right\} = \frac{4}{\pi r^{3/2}} \int_{R_H}^{R_K} \frac{M(r')}{\sqrt{r'}} [h_2(r') Q'_{N-1/2}(x_2) - h_1(r') Q'_{N-1/2}(x_1)] \cdot \quad (2)$$

$$\cdot \left\{ \begin{array}{l} -\sin N[\beta_H(r') + \varphi_0] + \sin N[\beta_K(r') + \varphi_0] \\ \cos N[\beta_H(r') + \varphi_0] - \cos N[\beta_K(r') + \varphi_0] \end{array} \right\} dr', \quad (3)$$

$$H_N(z) = \sqrt{A_N^2(z) + B_N^2(z)}, \quad (4)$$

$$\alpha(z) = \arctg \frac{B_N(z)}{A_N(z)}, \quad (5)$$

где $M(z')$ — намагниченность шиммы (Э), z — радиус наблюдения (см), z' — радиус источников (см), $z = h_1(z')$ и $z = h_2(z')$ — поверхности, ограничивающие шимму по вертикали (см), R_H, R_K — радиальные границы шиммы (см), $Q'_{N-1/2}$ ($N=0,1,2,\dots$) — производная сферической функции Лежандра 2-го рода от аргумента $\chi_i = \frac{z^2 + h_i^2(z') + (z')^2}{2zz'}$, $i=1,2$, φ_0 — постоянный сдвиг отсчета азимута.

В настоящей работе предлагается пакет подпрограмм для численного решения следующих двух задач. Пусть на отрезке $a \leq z \leq b$ заданы функции $H(z), A_N(z)$ и $B_N(z)$ (или согласно (4), (5) — $H(z), H_N(z)$ и $\alpha(z)$) либо их экспериментально измеренные значения в отдельных точках этого отрезка.

Требуется:

(А) Найти на основе одного из уравнений (1), (2), (3) функцию $M(z')$ для $z' \in [R_H, R_K]$ при заданных функциях $h_1(z'), h_2(z'), \beta_H(z'), \beta_K(z')$, или, другими словами, найти намагниченность при известных размерах криволинейной шиммы по заданному среднему магнитному полю, используя уравнение (1), либо по заданным амплитуде и фазе основной гармоники поля, используя уравнение (2) или (3).

(Б) Найти такие функции $h_1(z'), h_2(z'), \beta_H(z')$ и $\beta_K(z')$, $z' \in [R_H, R_K]$, чтобы при известной намагниченности шиммы $M(z')$ среднее магнитное поле $H(z)$, амплитуда $H_N(z)$ и фаза $\alpha(z)$ основной гармоники поля (или, что то же самое, $H(z), A_N(z), B_N(z)$), вычисленные при помощи формул (1), (2), (3), отличались от требуемых на отрезке $[a, b]$ не больше, чем на заданную величину, т.е. чтобы выполнялись неравенства

$$\sup_{z \in [a, b]} |H(z)_{\text{расч.}} - H(z)_{\text{треб.}}| \leq \varepsilon_1,$$

$$\sup_{z \in [a, b]} |A_N(z)_{\text{расч.}} - A_N(z)_{\text{треб.}}| \leq \varepsilon_2,$$

$$\sup_{z \in [a, b]} |B_N(z)_{\text{расч.}} - B_N(z)_{\text{треб.}}| \leq \varepsilon_3,$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 > 0$.

Метод решения задач (А) и (Б)

Как видно из предыдущего, задача (А) сводится к решению линейного интегрального уравнения первого рода, а задача (Б) — к решению системы нелинейных интегральных уравнений первого рода. Известно, что такие задачи являются некорректно поставленными^{3, 4/}, что затрудняет их численное решение. Отметим некоторые особенности задач (А) и (Б). Задача (А) относится к классу так называемых обратных задач. Основной трудностью при численном решении таких задач, в силу неустойчивости их решения к малым изменениям исходных данных, является выполнение требования нахождения такого приближенного решения по заданным экспериментальным данным, которое мало бы отличалось от истинного решения, соответствующего точным исходным данным (в предположении, что такое решение существует и единственно). Задача (Б) является задачей синтеза, т.е. относится к классу задач проектирования оптимальных систем и конструкций. Некорректность этих задач, кроме неустойчивости их решения, состоит в том, что они могут не иметь решения, либо иметь различные решения. Кроме того, не всякое решение практически реализуемо.

Предложенный в настоящей работе алгоритм решения задач (А) и (Б) основывается на методе квазирешения^{3, 4/}, для численной реализации которого мы используем метод решения интегральных уравнений с помощью рядов Фурье-Чебышева^{5, 6/}, что дает определенные преимущества.

Перед тем как приступить к изложению алгоритма, мы приведем некоторые необходимые сведения из теории рядов Фурье-Чебышева (подробное изложение теории рядов Фурье по полиномам Чебышева имеется, например, в^{5, 6/}).

Всякая непрерывная функция $f(x)$, удовлетворяющая на отрезке

$[a, b]$ условию Дини-Липшица, либо имеющая ограниченную вариацию, разлагается при $a \leq x \leq b$ в равномерно сходящийся ряд вида

$$f(x) = \frac{1}{2} A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k T_k^{[a,b]}(x), \quad (6)$$

где $T_n^{[a,b]}(x) = T_n\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)$, $T_n(z) = \cos n \arccos z$

- полином Чебышева, причем коэффициенты A_n вычисляются по формулам

$$A_n = \frac{4}{\pi(b-a)} \int_a^b \frac{f(x) T_n^{[a,b]}(x)}{\sqrt{1 - \left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right)^2}} dx, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (7)$$

Частные суммы $S_n(x)$ ряда (6) удовлетворяют неравенству

$$|S_n(x) - f(x)| \leq (3 + \ln n) E_n[f] \quad (n \geq 1), \quad (8)$$

где $E_n[f]$ - величина наилучшего чебышевского приближения функции $f(x)$, заданной в промежутке $[a, b]$ полиномами степени не выше n . Если $f(x)$ обладает внутри отрезка $[a, b]$ производной $(n+1)$ -го порядка, которая удовлетворяет неравенству

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M \quad (a \leq x \leq b),$$

то

$$E_n[f] \leq \frac{2M}{(n+1)!} \left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1} \quad (9)$$

Из (8) и (9) следует, что для достаточно гладкой функции $f(x)$ приближение к $f(x)$, доставляемое частной суммой ряда (6), близко к наилучшему. Большая или меньшая регулярность $f(x)$ приводит также к большей или меньшей скорости стремления к нулю последовательности $\{A_k\}$. Основой для ориентировочных оценок зависящей от n величины $E_n[f]$ могут служить неравенства

$$\sqrt{\frac{1}{2} (A_{n+1}^2 + A_{n+2}^2 + \dots)} \leq E_n[f] \leq |A_{n+1}| + |A_{n+2}| + \dots$$

$$E_n[f] \geq |A_{n+1}| + |A_{2(n+1)}| + |A_{3(n+1)}| + \dots$$

при конкретном учете скорости убывания подпоследовательности $\{A_{k_\nu}\}$ ($k_\nu > n$) модулей отличных от нуля коэффициентов ряда (6) для рассматриваемой $f(x)$. При их достаточно быстром убывании оказывается в грубом приближении оправданной даже оценка $E_n[f] \approx |A_{k_\nu}|$, где A_{k_ν} - первый отличный от нуля коэффициент с индексом $k_\nu > n$ (надо иметь в виду, что скорость убывания последовательности $\{A_k\}$ зависит также от длины h отрезка $[a, b]$, причем при увеличении h она уменьшается).

Вычисление коэффициентов A_n в (6) по формулам (7) является

трудной задачей, поэтому обычно вместо отрезка ряда (6) для приближения функции $f(x)$ используется полином, получаемый интерполированием значений $f(x)$ в определенных точках с помощью многочленов Чебышева. Рассмотрим самый распространенный способ построения такого полинома, который обозначим через $P_n(x)$. Имеем

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n B_k T_k\left(\frac{2x-b-a}{b-a}\right), \quad (10)$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N f(x_j) \cos j \frac{k\pi}{N}, \quad k=0, 1, \dots, N; \quad N \geq n, \quad (11)$$

$$x_j = \frac{b-a}{2} \cos j \frac{\pi}{N} + \frac{b+a}{2}, \quad (12)$$

где добавление двух штрихов к знаку суммы указывает на то, что первое и последнее слагаемые должны быть умножены на $\frac{1}{2}$ (в случае $N \neq n$ в (10) только первое слагаемое должно быть умножено на $\frac{1}{2}$). Полином $P_n(x)$ в точках x_j принимает значения $f(x_j)$. Используя (6), (10), (11) и свойство ортогональности полиномов Чебышева, можно получить следующее соотношение между коэффициентами A_k из (7) и B_k из (11):

$$B_k = A_k + (A_{2N-k} + A_{2N+k}) + (A_{4N-k} + A_{4N+k}) + \dots$$

для всех k . Следовательно, если частная сумма $S_N(x)$ ряда (6) доставляет хорошее приближение к $f(x)$ на $[a, b]$, так что коэффициентами A_k для $k > N$ можно пренебречь, то коэффициенты B_k мало отличаются от соответствующих A_k (см. также [7, с.101]). Для полинома $P_n(x)$ имеем оценку

$$|f(x) - P_n(x)| \leq 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |A_k|, \quad (13)$$

т.е. ошибка при приближении функции $f(x)$ с помощью полинома $P_n(x)$ не превышает больше чем в два раза ошибку приближения $f(x)$ при помощи $S_n(x)$.

Так как при решении задачи (A) приходится решать вспомогательную задачу приближения функции $f(x)$, заданной только своими значениями в отдельных точках, которые не совпадают с точками (12), то для приближенного построения полинома $P_n(x)$ из (10) в таком случае мы будем использовать следующую модификацию второго алгоритма Ремеза для определения полиномов наилучшего приближения (изложение этого алгоритма с соответствующими доказательствами и оценками дано в [7]).

Пусть заданы значения функции $f(x)$ в ℓ точках отрезка $[a, b]$ и требуется найти (приближенно) полином наилучшего приближения степени n ($n \leq \ell - 2$) на $[a, b]$. Для этого из этих ℓ точек выбираются произвольные $n + 2$ точки и для них вычисляется полином степени n , $P_n^1(x)$, который минимизирует максимальную ошибку ε в этих точках. После этого находятся значения этого полинома в остальных $\ell - (n + 2)$ точках. Если максимальная ошибка в остальных точках не превышает ε , то $P_n^1(x)$ — искомый полином. В противном случае точка, в которой ошибка принимает свое наибольшее значение, добавляется к $n + 2$ точкам, а одна из $(n + 2)$ точек опускается. Вычисляется соответствующий полином $P_n^2(x)$. Процесс продолжается до тех пор, пока ошибка не принимает своего максимального значения на выбранных $(n + 2)$ точках. Найденный таким образом полином можно записать в виде (10) с помощью известного обратного выражения степенной функции через полиномы Чебышева:

$$x^m = \frac{1}{2^{m-1}} [T_m(x) + C_m^1 T_{m-2}(x) + C_m^2 T_{m-4}(x) + \dots], \quad x \in [-1, 1].$$

Теперь приступим к изложению алгоритма решения задач (А) и (Б). Будем предполагать, что функции $M(\tau)$, $h_1(\tau)$, $h_2(\tau)$, $\beta_n(\tau)$, $\beta_k(\tau)$ являются кусочно-непрерывными для $\tau \in [R_n, R_k]$ и, кроме того, что их непрерывные куски достаточное число раз дифференцируемы (на практике это условие обычно выполняется). Тогда функции $H(\tau)$, $A_N(\tau)$ и $B_N(\tau)$ в (1), (2), (3) являются достаточно гладкими функциями, так что для них полином $P_n(x)$ из (10) близок к полиному наилучшего приближения. Это позволяет описать $H(\tau)$, $A_N(\tau)$ и $B_N(\tau)$ с помощью малого числа коэффициентов Фурье-Чебышева в пределах заданной точности, что существенно облегчает решение задач (А) и (Б).

Пусть значения функций $H(\tau)$, $A_N(\tau)$ и $B_N(\tau)$ заданы в некоторой совокупности точек отрезка $[a, b]$ с ошибками, не превышающими ε_1 , ε_2 и ε_3 соответственно. Разобьем отрезок $[a, b]$ на интервалы таким образом, чтобы в каждом интервале $H(\tau)$, $A_N(\tau)$ и $B_N(\tau)$ можно было представить с заданной точностью полиномом $P_n(x)$ вида (10) с $n \leq 10$ (это ограничение связано с тем, что при увеличении n чувствительность второго алгоритма Ремеза к погрешностям в значениях функций сильно возрастает^{7/7}). Промежуток $[R_n, R_k]$, на котором будем искать функции $M(\tau)$, $h_1(\tau)$, $h_2(\tau)$, $\beta_n(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$, тоже

разобьем на интервалы, но уже с таким расчетом, чтобы в каждом интервале эти функции были гладкими. Такое разбиение делается единственно из-за конструктивных соображений. При решении задачи (Б) мы рекомендуем по возможности не делать такого разбиения, или, по крайней мере, разбивать отрезок $[R_n, R_k]$ на меньшее число интервалов, что дает возможность описать $h_1(\tau)$, $h_2(\tau)$, $\beta_n(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ с помощью меньшего числа коэффициентов Фурье-Чебышева.

Функции $M(\tau)$ в задаче (А) и $h_1(\tau)$, $h_2(\tau)$, $\beta_n(\tau)$ и $\beta_k(\tau)$ в задаче (Б) в каждом интервале отрезка $[R_n, R_k]$ будем искать в виде полиномов типа (10) с неизвестными коэффициентами. При этом, так как, исходя из физических соображений, можно ожидать, что $M(\tau)$ является гладкой функцией везде в $[R_n, R_k]$ и к тому же медленно меняется, функцию $M(\tau)$ можно искать в виде полинома сразу на всем отрезке $[R_n, R_k]$, независимо от его разбиения. Подставляя соответствующие полиномы с неизвестными коэффициентами для искомых функций в уравнения (1), (2), (3) (в случае задачи (А) — только в одно из этих уравнений) и разлагая интегралы в правых частях (1), (2), (3) как функции параметра τ в каждом интервале промежутка $[a, b]$ в ряды Фурье-Чебышева по формулам (10), (11), мы получаем, приравнявая соответствующие коэффициенты в разложениях интегралов и левых частей в (1), (2), (3), систему уравнений (линейную в случае задачи (А) и нелинейную в случае задачи (Б)) для определения неизвестных коэффициентов. Очевидно, число неизвестных и число уравнений будет непосредственно зависеть от точности задания $H(\tau)$, $A_N(\tau)$ и $B_N(\tau)$ и от требуемой точности решения задачи. Рекомендуется начинать с малого числа неизвестных (обычно меньше, чем число уравнений), постепенно увеличивая его, если это будет необходимо. При этом число уравнений не должно превышать общее число коэффициентов полиномов (10), необходимых для приближения функций $H(\tau)$, $A_N(\tau)$ и $B_N(\tau)$ в $[a, b]$ с точностью, задаваемой экспериментальными измерениями. Все коэффициенты, абсолютная величина которых порядка точности измерения магнитного поля, не должны участвовать в составлении уравнений, поскольку они обычно будут только искажать решение^{3,4,6/}.

Сделаем следующее замечание. На практике задачи (А) и (Б) необходимо решать совместно, при этом сначала обычно будет решаться задача (А) для нахождения намагниченности шиммы с заданной конфигу-

рацией, а потом найденная намагниченность будет использована для нахождения новой конфигурации этой шиммы при помощи решения задачи (Б). В таком случае для задачи (Б) рекомендуется использовать в качестве полиномов, представляющих приближенно функции $H(\nu)$, $A_N(\nu)$ и $B_N(\nu)$, многочлены, получаемые с помощью разложения в ряды Фурье-Чебышева интегралов в (1), (2), (3), где $M(\nu')$ - найденная в задаче (А) намагниченность, а $h_1(\nu')$, $h_2(\nu')$, $\beta_N(\nu')$ и $\beta_K(\nu')$ описывают старую конфигурацию шиммы. Таким образом, дается возможность снять то ограничение на разбиение промежутка $[a, \ell]$, которое было обусловлено применением второго алгоритма Ремеза, а также иногда удается получить более быстро сходящиеся ряды для $H(\nu)$, $A_N(\nu)$ и $B_N(\nu)$.

Краткое описание подпрограмм

Все подпрограммы написаны на ФОРТРАНе.

Подпрограмма DAT вычисляет коэффициенты полинома (10) для приближенного представления функций $H(\nu)$, $A_N(\nu)$ и $B_N(\nu)$ в интервалах отрезка $[a, \ell]$. В случае явного задания этих функций используется формула (II). В случае, когда известны только их значения в отдельных точках $[a, \ell]$, это достигается с помощью модификации второго алгоритма Ремеза, описанной выше. Кроме того, в этом случае для проверки правильности полученных результатов приближенные значения коэффициентов полиномов (10) находятся также следующим образом: заданные значения $H(\nu)$, $A_N(\nu)$, $B_N(\nu)$ аппроксимируются сплайнами третьего порядка, после чего коэффициенты в (10) вычисляются по формулам (II).

Подпрограмма MAC, используя результаты, полученные подпрограммой DAT, составляет и решает систему линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов в представлении функции $M(\nu)$ с помощью полинома вида (10). Эта система составляется на основе одного из уравнений (1), (2), (3) и решается авторегуляризованным итерационным процессом ARP-F (или ARP)^{9/} для линейного случая.

Подпрограмма SNECK вычисляет интегралы в (1), (2), (3) с заданной точностью. Кроме того, она находит коэффициенты разложений (10), (II) этих интегралов как функций координаты ν в интервалах отрезка $[a, \ell]$ и вычисляет значения соответствующих полиномов (10).

Подпрограмма INT, используя результаты, полученные подпрограммой DAT или подпрограммой SNECK, составляет и решает систему нелинейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов в представлениях функций $h_1(\nu)$, $h_2(\nu)$, $\beta_N(\nu)$ и $\beta_K(\nu)$ с помощью полиномов вида (10). Неизвестными могут быть и параметры R_N и R_K . Однако эту возможность рекомендуется использовать только в том случае, когда намагниченность в предполагаемых областях изменения R_N и R_K практически не меняется. Нелинейная система составляется на основе всех трех уравнений (1), (2), (3) и решается авторегуляризованным итерационным процессом ARP-F (или ARP)^{9/}.

Численные эксперименты

С помощью подпрограммы SNECK были вычислены значения функций $H(\nu)$, $A_4(\nu)$, $B_4(\nu)$ (рис.3) для криволинейной шиммы, заданной сплошной линией на рис.1, при следующей намагниченности (рис.2):

$$M(\nu) = \frac{3270}{2} - 130 T_1 \left(\frac{2\nu - R_K - R_N}{R_K - R_N} \right) + 130 T_2 \left(\frac{2\nu - R_K - R_N}{R_K - R_N} \right),$$

где $R_N = 38$ см, $R_K = 54$ см (выбор конфигурации и намагниченности шиммы был обусловлен стремлением приблизить решаемую модельную задачу к эксперименту). Эти значения были использованы в качестве исходных данных для решения задачи (А). Были решены следующие два варианта задачи (А). В первом варианте значения $H(\nu)$, $A_4(\nu)$ и $B_4(\nu)$ были заданы с точностью $5 \cdot 10^{-4}$ Э через 0.5 см в промежутке $[a, \ell]$ $a = 37$ см, $\ell = 55$ см. Во втором варианте значения $H(\nu)$, $A_4(\nu)$ и $B_4(\nu)$ были заданы с точностью 1 Э через 1 см в том же промежутке $[a, \ell]$. В обоих вариантах промежутки $[R_N, R_K]$ был разбит на пять интервалов $[38, 46]$, $[46, 50]$, $[50, 52]$, $[52, 53]$ и $[53, 54]$, а отрезок $[a, \ell]$ - на два интервала $[37, 46]$ и $[46, 55]$, в каждом из которых значения функций $H(\nu)$, $A_4(\nu)$, $B_4(\nu)$ были аппроксимированы полиномами вида (10) седьмой степени с помощью подпрограммы DAT при использовании второго алгоритма Ремеза. Первые четыре коэффициента этих полиномов были использованы в качестве правых частей системы линейных уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов представления функции $M(\nu)$ в виде многочлена (10) на всем отрезке $[R_N, R_K]$, т.е. число m уравнений линейной системы, составляемой на основе одного из уравнений (1), (2) или (3), равнялось 8. Число коэффициентов Фурье

-Чебышева, описывающих функцию $M(z)$, или, другими словами, число неизвестных n , менялось от $n=1$ до $n=4$. Самые хорошие результаты в обоих вариантах были получены при $n=3$ (что естественно ожидать, имея в виду (I4)). Значения функции $M(z)$, описываемой формулой (I4), были найдены с точностью 0.05 Э в первом варианте и с точностью 15 Э-во втором. При этом значения $M(z)$, полученные на основе отдельных уравнений (1), (2) или (3), отличались между собой не больше чем на 0.1 Э в первом варианте и не больше чем на 20 Э-во втором. При $n=6$ во втором варианте полученное решение уже довольно сильно отличалось от точного (I4) (в некоторых точках вблизи концов отрезка $[R_H, R_K]$ эта разница была порядка 300 Э, хотя внутри этого отрезка она была существенно меньше).

Для проверки подпрограммы INT с ее помощью была найдена конфигурация шиммы с гладкими функциями $h_1(z)$, $h_2(z)$, $\beta_H(z)$, $\beta_K(z)$ и с радиальными границами $R_H=38$ см, $R_K=54$ см, функции $H(z)$, $A_4(z)$ и $B_4(z)$ которой отличались от соответствующих функций (рис.3) шиммы, заданной сплошной линией на рис.1 (при том же законе изменения намагниченности (I4)), не больше чем на 0.02 Э в $[a, b]$. Это было сделано в три этапа. На первом этапе в качестве начального приближения была взята шимма с размерами $h_1(z)=4.5$ см, $h_2(z)=8$ см, $\beta_H(z)=0$ рад, $\beta_K(z)=\frac{\pi}{2}$ рад. В качестве правых частей нелинейной системы уравнений брались первые 5 коэффициентов в чебышевских разложениях на всем отрезке $[a, b]$ функций $H(z)$, $A_4(z)$ и $B_4(z)$ шиммы, заданной сплошной линией на рис.1 (эти коэффициенты были найдены предварительно с помощью подпрограммы СНЕСК), т.е. число уравнений $m=15$. При этом функцию $h_1(z)$ мы искали в виде полинома (IO) пятой степени, $h_2(z)$ - в виде полинома (IO) четвертой степени, $\beta_H(z)$ и $\beta_K(z)$ - в виде полиномов (IO) первой степени, т.е. число неизвестных $n = m = 15$. С помощью итерационного процесса ARP-F¹⁹ было сделано 100 итераций. Полученные результаты были использованы в качестве начальных приближений на следующем этапе, когда уже в качестве правых частей нелинейной системы мы брали по 12 коэффициентов из чебышевских разложений $H(z)$ и $B_4(z)$ и 11 коэффициентов из разложения $A_4(z)$ ($m=35$), а $h_1(z)$ искали в виде полинома (IO) восьмой степени и $h_2(z)$ - в виде полинома (IO) шестой степени ($n=20$). На этом этапе было сделано 140 итераций. На последнем этапе было увеличено только число неизвестных ($h_1(z)$ описывалась полиномом четырнадцатой степени, а

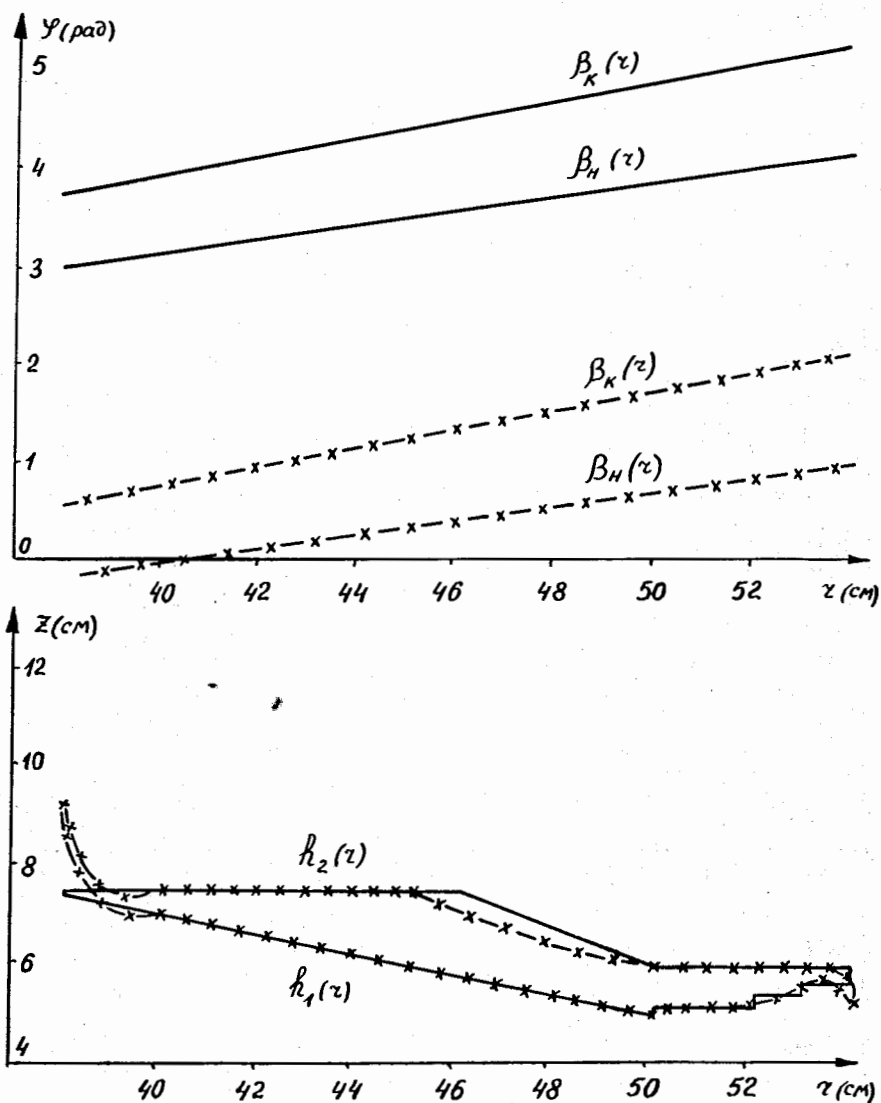
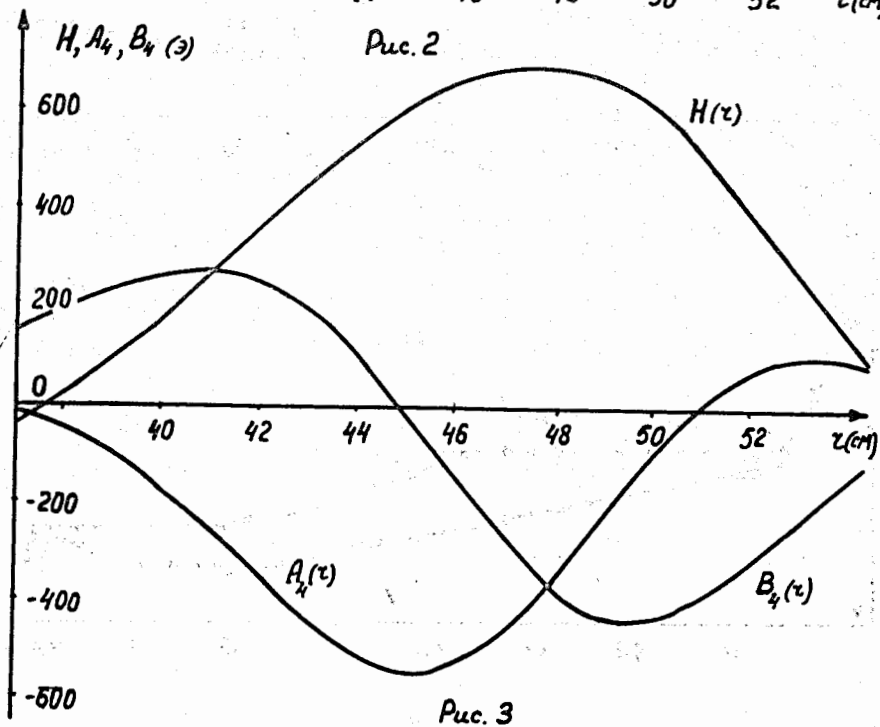
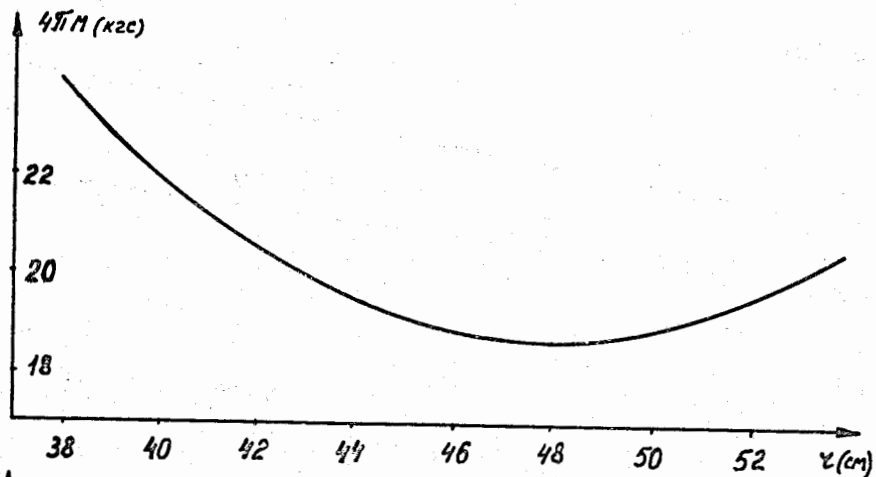


Рис.1



$h_2(z)$ — полиномом десятой степени), т.е. $n=30$, и было сделано еще 30 итераций. Окончательный результат приведен на рис. I (пунктиром). То, что найденная шимма сдвинута по координате φ на π радиан в сравнении с исходной шиммой, объясняется выбором начального приближения и инвариантностью функций $H(z)$, $A_N(z)$ и $B_N(z)$ относительно сдвига начала отсчета азимута на величину $\frac{2k\pi}{N}$, $k = 1, 2, \dots$. Отметим, что поведение найденных функций $h_1(z)$ и $h_2(z)$ на концах промежутка $[R_n, R_k]$ обязано специфике решаемой задачи (Б) (функции $h_1(z)$ и $h_2(z)$ шиммы, заданной сплошной линией на рис. I, — кусочно-непрерывные). Это приводит к необходимости использовать сравнительно большое число членов рядов Фурье-Чебышева функций $h_1(z)$, $h_2(z)$ (порядка 15), что в свою очередь, в силу некорректности задачи (Б), приводит к заданному пунктиром на рис. I поведению $h_1(z)$ и $h_2(z)$. В таком случае можно поступить двумя способами: либо продолжить итерационный процесс решения задачи (Б) для получения меньшей невязки, что приводит к лишней трате машинного времени, если уже достигнута удовлетворительная точность, либо заменить более подходящими неудобные с конструктивной точки зрения концы вычисленной шиммы, имея в виду, что их вклад в магнитное поле шиммы мал.

Заключение

Проведенные численные эксперименты показали, что с помощью алгоритма, заложенного в предлагаемом пакете подпрограмм, можно эффективно решать обратные задачи нахождения намагниченности и размеров криволинейной шиммы по заданному магнитному полю (задача (А) и (Б)). При анализе полученных результатов, однако, нужно иметь в виду, что точность решений определяется тем, насколько хорошо выполняется предположение $M_z = M(z)$, $M_\varphi = M_\varphi = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Н.Дмитриевский и др. Препринт ОИЯИ, I43I, Дубна, 1963.
2. Ю.Г.Аленицкий и др. Сообщение ОИЯИ, P9-5246, Дубна, 1970.
3. А.Н.Тихонов, В.Я.Арсенин. Методы решения некорректных задач. Наука, М., 1974.
4. В.А.Морозов. Линейные и нелинейные некорректные задачи. Итоги науки и техники. Математический анализ, т.II, Изд-во ВНИИТМ, М., 1973.
5. L.Fox, I.B.Parker. Chebyshev polynomials in numerical analysis . 1968.
6. К.Ланцош. Практические методы прикладного анализа. Физматгиз, М., 1968.
7. Е.Я.Ремез. Основы численных методов чебышевского приближения. Наукова думка, Киев, 1969.
8. S.Masaoki, K.Takeishi . Numer. Math., 1973, v.21, №5, 373-380.
9. Л.Александров. Сообщение ОИЯИ, P5-7259, Дубна, 1973.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 июня 1975 года.