

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



8/ix-75

Б-30

P11 - 8981

Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

3241/2-75

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
МАКСВЕЛЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ
С ДВИЖУЩИМСЯ РАЗРЫВОМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

1975

P11 - 8981

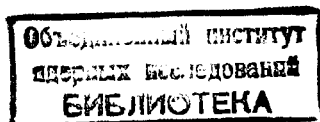
Н.С.Бахвалов,¹ В.С.Бондаренко,² Е.П.Жидков,
С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ
МАКСВЕЛЛА В НЕОДНОРОДНОЙ ОБЛАСТИ
С ДВИЖУЩИМСЯ РАЗРЫВОМ В ПРАВОЙ ЧАСТИ

Направлено в ЖВММО

¹ Московский государственный университет

² Ереванский государственный университет



S u m m a r y

A numerical solution is given for a problem about the excitation of a closed inhomogeneous structure by a dense moving electron bunch. The corresponding group of the Maxwell equations is solved by the finite-difference method. The method is simple and economical when realizing on computer as compared to the known methods that use the Fourier-series expansion. The main difficulty is to overcome the instability phenomena.

A rather stable method of counting has been found in the process of numerical experiments, carried out on the basis of theoretical results.

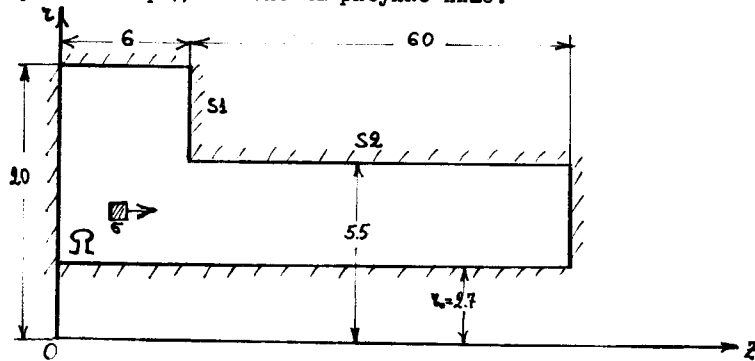
Расчет электромагнитных полей, возбуждаемых движением плотных сгустков или пучков электронов в неоднородных структурах, представляет большой интерес для коллективных методов ускорения^{/1/}. Ускоряясь, релятивистский сгусток тратит часть своей энергии на излучение сторонних зарядов, возбуждаемое его электрическим полем при пролете мимо пространственных неоднородностей. Важно знать распределение поля вдоль потока электронов и уметь оценивать потери энергии на излучение^{/1/}.

Ниже обсуждается расчет возбуждения неоднородной структуры, основанный на методике, отличной от использованной ранее (см., например, /2-4/). Соответствующая группа уравнений Максвелла с разрывным пространственным распределением плотности тока (компактный сгусток электронов в виде тора прямоугольного сечения) решается непосредственно методом конечных разностей^{/5 - 8/} без каких-либо аналитических разложений. Динамика полной карты поля (≈ 9000 точек в сечении структуры и 600 шагов по времени) считается на СДС-6200 за 2 часа 40 минут. Это время соизмеримо с временем, которое при использовании "метода виртуальных фотонов", расходуется на обсчет 5-6 точек.

Основные трудности связаны с устранением наблюдаемых при счете явлений неустойчивости. Устойчивый метод счета был найден в процессе

численных экспериментов, поставленных на основе полученных в теории результатов. Порядок изложения таков. Сначала дается математическая постановка задачи. Далее приводятся расчетные формулы. Затем обсуждаются вопросы устойчивости.

Сечение рассматриваемой неоднородной структуры с переходным участком представлено на рисунке ниже:



Через S_1 , S_2 обозначены соответственно вертикальные и горизонтальные участки границы Ω области Ω : $\Omega = S_1 \cup S_2$, σ - сечение сгустка электронов. В области Ω решается следующая краевая задача:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{r} \frac{\partial rw}{\partial r} - \mathcal{F}(r, z, \xi) \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r} \end{cases} \quad (I)$$

$$u(r, z, 0) = u_0(r, z), \quad v(r, z, 0) = v_0(r, z), \quad w(r, z, 0) = 0$$

$$u|_{S_1} = \frac{\partial v}{\partial z}|_{S_1} = \frac{\partial w}{\partial z}|_{S_1} = v|_{S_2} = \frac{\partial u}{\partial r}|_{S_2} = \frac{\partial rw}{\partial r}|_{S_2} = 0.$$

Здесь $u = E_r$, $v = E_z$, $w = H_\varphi$, $\xi = c \cdot t$, $0 \leq \xi \leq \xi_0$,

$$\mathcal{F}(r, z, \xi) = \begin{cases} \frac{4\pi\rho\xi}{\sqrt{B^2 + \xi^2}}, & (r, z) \in \sigma, \\ 0, & (r, z) \in \Omega \setminus \sigma. \end{cases}$$

Сгусток электронов (центр σ) движется по закону:

$$z(\xi) = \sqrt{B^2 + \xi^2} - B + q_0, \quad r(\xi) = r(0), \quad \xi \geq 0.$$

B - постоянная, параметр ускорения; q_0 - начальное положение сгустка. Начальные значения поля определяются из решения потенциальной электростатической задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} = f(r, z), & \Phi|_{\Omega} = 0, \\ f(r, z) = \begin{cases} 4\pi\rho, & (r, z) \in \sigma, \\ 0, & (r, z) \in \Omega \setminus \sigma, \end{cases} \end{cases} \quad (2)$$

$$u_0(r, z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad v_0(r, z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

$$u_0|_{S_1} = \frac{\partial v_0}{\partial z}|_{S_1} = v_0|_{S_2} = \frac{\partial u_0}{\partial r}|_{S_2} = 0.$$

Решение (I) удовлетворяет энергетическому соотношению:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\iint_{\Omega} (u^2 + v^2 + w^2) r dr dz \Big|_{\xi} - \iint_{\Omega} (u_0^2 + v_0^2) r dr dz \right) = \\ & = - \int_0^{\xi} \iint_{\Omega} \mathcal{F} v r dr dz d\xi'. \end{aligned} \quad (3)$$

Левую часть (3) обозначим через I_λ , правую - через I_μ . Потери энергии на излучение при прохождении мимо пространственной неоднородности оцениваются сравнением значений I_μ для Ω и узкого длинного прямоугольника.

Переходим к описанию численного алгоритма. В области Ω строим квадратную сетку $\bar{\Omega} : \bar{\Omega} = \{\tau_i, z_j\}$, $\tau_i = \tau_0 + (i-1)h$, $z_j = (j-1)h$,

$$(i, j) \in \{1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq L_1\} \cup \{M_1+1 \leq i \leq M_2, 1 \leq j \leq L_1\}.$$

На $\bar{\Omega}$ (2) аппроксимируется разностной краевой задачей:

$$\frac{\Phi_{i+1,j} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i-1,j}}{h^2} + \frac{\Phi_{i,j+1} - 2\Phi_{i,j} + \Phi_{i,j-1}}{h^2} + \frac{1}{\tau_0 + (i-1)h} \frac{\Phi_{i+1,j} - \Phi_{i-1,j}}{2h} = -f_{i,j}, \quad \Phi_{i,j} \Big|_{\bar{\Omega}} = 0. \quad (4)$$

Дискретная краевая задача (4) решается методом простых итераций:

$$\Phi_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4} \left(\Phi_{i+1,j}^k + \Phi_{i-1,j}^k + \Phi_{i,j+1}^k + \Phi_{i,j-1}^k + h^2 \left(\frac{1}{\tau_0 + (i-1)h} \frac{\Phi_{i+1,j}^k - \Phi_{i-1,j}^k}{2h} + f_{i,j} \right) \right), \quad \Phi_{i,j}^0 = 0, \quad \Phi_{i,j}^k \Big|_{\bar{\Omega}} = 0.$$

Процесс итераций считается законченным, если выполняется одно из двух условий:

$$\max_{\bar{\Omega}} |\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k| \leq \varepsilon_1, \quad \max_{\bar{\Omega}} \frac{|\Phi_{i,j}^{k+1} - \Phi_{i,j}^k|}{|\Phi_{i,j}^{k+1}| + |\Phi_{i,j}^k|} \leq \varepsilon_2.$$

Сходимость процесса итераций исследовалась на квадрате со стороной 2.8, равной минимальному линейному размеру Ω . Численные эксперименты показали, что для корректного счета необходимо иметь $h \approx 0.01$. Но решение (4) на Ω с таким мелким шагом практически невозможно. Дальнейшие численные эксперименты на квадрате показали, что для решения (4) может быть применен метод прогноза¹⁹⁾: проводится счет с двумя "крупными" шагами h_1, h_2 , для "малого" h значения Φ находятся линейной экстраполяцией. Метод прогноза позволил решить (4),

при этом время счета в 700 раз меньше времени, которое потребовалось бы для "прямого" решения (4) с "малым" шагом h .

Начальные данные u_0, v_0 во внутренних точках $\bar{\Omega}$ считаются по формулам:

$$u_{i,j}^0 = \frac{1}{2h} (\Phi_{i-1,j+1} + \Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j-1} - \Phi_{i,j}),$$

$$v_{i,j}^0 = \frac{1}{2h} (\Phi_{i-1,j-1} + \Phi_{i,j-1} - \Phi_{i-1,j} - \Phi_{i,j}).$$

Здесь

$$u_{i,j}^0 = u_0(\tau_0 + (i-1.5)h, (j-1.5)h),$$

$$v_{i,j}^0 = v_0(\tau_0 + (i-1.5)h, (j-1.5)h),$$

то есть это значения u_0, v_0 в центрах ячеек $\bar{\Omega}$. В счете динамической задачи участвуют значения u, v, w в "фиктивных" точках, расположенных в центрах ячеек квадратной сетки, прилегающих к границе Ω извне. Значения u_0, v_0 в этих точках находятся из аппроксимации граничных условий. Соответствующие формулы, общие для $\xi=0$ и $\xi>0$, будут приведены ниже. Через $u_{i,j}^n, v_{i,j}^n, w_{i,j}^n$ обозначаются значения u, v, w на n -м слое ($\xi = n \cdot \tau$) в "фиктивных точках", расположенных в центрах ячеек построенной выше квадратной сетки. Через $u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, v_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, w_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ ниже обозначены значения u, v, w при $\xi = (n+0.5)h$ в узлах $\bar{\Omega}$.

Динамическая задача (I) считается следующим образом, на полупространствах счет ведется по схеме Лакса

$$u_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i+1,j+1}^n) - \frac{d}{4} (w_{i,j-1}^n - w_{i,j}^n + w_{i+1,j+1}^n - w_{i+1,j}^n)$$

$$v_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (v_{ij}^{\sim} + v_{i+1, j}^{\sim} + v_{i, j+1}^{\sim} + v_{i+1, j+1}^{\sim}) + \frac{d}{4} \frac{1}{\tau_0 + i h - k}$$

$$\cdot \left((\tau_0 + i h - \frac{h}{2}) (w_{i+1, j+1}^{\sim} + w_{i+1, j}^{\sim}) - (\tau_0 + i h - \frac{3h}{2}) (w_{ij+1}^{\sim} + w_{ij}^{\sim}) \right) - \frac{\pi}{2} \mathcal{F}_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$w_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} (w_{ij}^{\sim} + w_{i+1, j}^{\sim} + w_{i, j+1}^{\sim} + w_{i+1, j+1}^{\sim}) -$$

$$- \frac{d}{4} (u_{ij+1}^{\sim} - u_{ij}^{\sim} + u_{i+1, j+1}^{\sim} - u_{i+1, j}^{\sim} - v_{i+1, j}^{\sim} + v_{ij}^{\sim} - v_{i+1, j+1}^{\sim} + v_{ij+1}^{\sim})$$

$$(i, j) \in \{1 \leq i \leq M_1, 1 \leq j \leq L_1\} \cup \{M_1+1 \leq i \leq M_2, 1 \leq j \leq L_1\}$$

τ - шаг по ξ , h - шаг по τ , ε , $d = \frac{\pi}{h}$. После того как сосчитан "полуцелый" слой, $\xi = (n+0.5)\tau$, считаются внутренние точки $(n+1)$ -го слоя по явному кресту:

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^{\sim} - \frac{d}{2} (w_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i \pm \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + w_{i - \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - w_{i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}})$$

$$v_{ij}^{n+1} = v_{ij}^{\sim} + \frac{d}{2} \frac{1}{\tau_0 + (i-1.5)h} \left\{ (\tau_0 + (i-1)h) (w_{i+1, j+1}^{n+\frac{1}{2}} + w_{i+1, j-1}^{n+\frac{1}{2}}) - \right. \\ \left. - (\tau_0 + (i-2)h) (w_{i-1, j+1}^{n+\frac{1}{2}} + w_{i-1, j-1}^{n+\frac{1}{2}}) \right\} - \tau \cdot \mathcal{F}_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$$

$$w_{ij}^{n+1} = w_{ij}^{\sim} - \frac{d}{2} (u_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i \pm \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + u_{i - \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_{i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) +$$

$$+ \frac{d}{2} (v_{i \pm \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i - \frac{1}{2}, j \pm \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i \pm \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - v_{i - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}),$$

$$(i, j) \in \{2 \leq i \leq M_1, 2 \leq j \leq L_1\} \cup \{M_1+1 \leq i \leq M_2, 2 \leq j \leq L_1\}$$

Значения u , v , w в приграничных "фиктивных" точках для всех $\xi = n\tau$, $\xi \geq 0$ считаются по формулам:

$$u_{i,1}^{\sim} = -u_{i,2}^{\sim}, v_{i,1}^{\sim} = v_{i,2}^{\sim}, w_{i,1}^{\sim} = w_{i,2}^{\sim}, \quad 2 \leq i \leq M_2$$

$$u_{M_2+1, j}^{\sim} = d_1 \cdot u_{M_2, j}^{\sim}, v_{M_2+1, j}^{\sim} = -v_{M_2, j}^{\sim}, w_{M_2+1, j}^{\sim} = d_1 \cdot w_{M_2, j}^{\sim}, \quad 2 \leq j \leq L_1$$

$$u_{i, L_1+1}^{\sim} = -u_{i, L_1}^{\sim}, v_{i, L_1+1}^{\sim} = v_{i, L_1}^{\sim}, w_{i, L_1+1}^{\sim} = w_{i, L_1}^{\sim}, \quad M_1+1 \leq i \leq M_2$$

$$u_{M_1+1, j}^{\sim} = d_2 \cdot u_{M_1, j}^{\sim}, v_{M_1+1, j}^{\sim} = -v_{M_1, j}^{\sim}, w_{M_1+1, j}^{\sim} = d_2 \cdot w_{M_1, j}^{\sim}, \quad L_1+2 \leq j \leq L_2$$

$$u_{i, L_2+1}^{\sim} = -u_{i, L_2}^{\sim}, v_{i, L_2+1}^{\sim} = v_{i, L_2}^{\sim}, w_{i, L_2+1}^{\sim} = w_{i, L_2}^{\sim}, \quad 2 \leq i \leq M_2$$

$$u_{i, j}^{\sim} = d_3 \cdot u_{2, j}^{\sim}, v_{i, j}^{\sim} = -v_{2, j}^{\sim}, w_{i, j}^{\sim} = d_3 \cdot w_{2, j}^{\sim}, \quad 2 \leq j \leq L_2$$

Остается сосчитать угловые точки:

$$u_{M_2+1, 1}^{\sim} = -u_{M_2+1, 2}^{\sim}; v_{M_2+1, 1}^{\sim} = v_{M_2+1, 2}^{\sim}; w_{M_2+1, 1}^{\sim} = w_{M_2+1, 2}^{\sim}$$

$$u_{M_2+1, L_1+1}^{\sim} = d_1 \cdot u_{M_2, L_1+1}^{\sim}; v_{M_2+1, L_1+1}^{\sim} = -v_{M_2, L_1+1}^{\sim}; w_{M_2+1, L_1+1}^{\sim} = d_1 \cdot w_{M_2, L_1+1}^{\sim}$$

$$u_{M_1+1, L_2+1}^{\sim} = d_2 \cdot u_{M_1, L_2+1}^{\sim}; v_{M_1+1, L_2+1}^{\sim} = -v_{M_1, L_2+1}^{\sim}; w_{M_1+1, L_2+1}^{\sim} = d_2 \cdot w_{M_1, L_2+1}^{\sim}$$

$$u_{i, L_2+1}^{\sim} = -u_{i, L_2}^{\sim}; v_{i, L_2+1}^{\sim} = v_{i, L_2}^{\sim}; w_{i, L_2+1}^{\sim} = w_{i, L_2}^{\sim}$$

$$u_{i, 1}^{\sim} = -u_{i, 2}^{\sim}; v_{i, 1}^{\sim} = v_{i, 2}^{\sim}; w_{i, 1}^{\sim} = w_{i, 2}^{\sim}$$

В формулах выше $d_1 = \frac{2\tau_1 - h}{2\tau_1 + h}$, $d_2 = \frac{2\tau_2 - h}{2\tau_2 + h}$, $d_3 = \frac{2\tau_3 - h}{2\tau_3 + h}$, τ_1, τ_2, τ_3 - расстояние от оси z соответственно до нижней, средней и верхней стенок Ω . Дискретный аналог соотношения (3) имеет вид:

$$h^2 \sum_{\bar{\Omega}} (u_{ij}^{n+1} + v_{ij}^{n+1} + w_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n - v_{ij}^n - w_{ij}^n) \tau_i = -\tau h^2 \sum_{n=1}^N \sum_{\bar{\Omega}} F_{ij}^n \cdot v_{ij}^n \cdot \tau_i + R,$$

$$\tilde{I}_\Lambda = \tilde{I}_n + R, \quad \xi = n\tau, \quad \xi = N\tau.$$

Хорошее согласование \tilde{I}_Λ и \tilde{I}_n было основным критерием правильности численного решения. Предварительно счет проводился на области $\tilde{\Omega}$: по z длина $\tilde{\Omega}$ равна одной четверти длины Ω . На такой области при $h=0.56$, $\tau=0.28$ были получены устойчивые значения u, v, w . Энергетическое соотношение выполнялось достаточно хорошо при более мелком τ : при $\tau=0.004375$ $\tilde{I}_\Lambda = 0.9476 \cdot 10^8$, $\tilde{I}_n = 0.1576 \cdot 10^9$. Однако при переходе к Ω появились сильные осцилляции и $\tilde{I}_n \approx 20 \cdot \tilde{I}_\Lambda$. Численные эксперименты показывали, что необходимо уменьшать шаги сетки. При уменьшении шагов сетки в два раза время счета возросло в 8 раз, осцилляции ослабли, но \tilde{I}_Λ и \tilde{I}_n продолжали разниться в 10 раз. При этом неустойчиво считается правый интеграл, зависящий от значений v на малой движущейся площадке σ . v над площадкой меняет знак, и для корректного счета \tilde{I}_n на σ необходимо иметь мелкую сетку. Дальнейшее уменьшение шагов сетки по всей области вывело бы задачу за рамки реальных возможностей ЭВМ СДС-6200. Так возникла необходимость создания локальной мелкой движущейся сетки в окрестности σ . Параметры сетки были выбраны в процессе численных экспериментов на модельной задаче, о которой речь пойдет ниже. В пользу возможности введения локальной мелкой сетки

говорили численные эксперименты, показывавшие, что все неустойчивые явления наблюдаются в малой окрестности σ . Далее численные эксперименты показывали, что все неустойчивые явления возникают после того, как σ попадает в "узкую" часть Ω . Локальная мелкая сетка $\tilde{\Omega}^*$ с $h^* = 0.056 = \frac{h}{5}$ покрывает окрестность σ , ограниченную сверху и снизу границей Ω ; по z $\tilde{\Omega}^*$ имеет ширину $18 \cdot h$. Узлы мелкой сетки получаются простым делением ячеек крупной сетки. В момент подключения мелкой сетки недостающие значения u, v, w в узлах $\tilde{\Omega}^*$ получаются линейной интерполяцией по узлам крупной сетки. При переходе от $\xi = n\tau$ к $\xi = (n+1)\tau$ над $\tilde{\Omega}^*$ считается пять слоев с $\tau^* = \frac{h^*}{5}$. При этом слева и справа размеры $\tilde{\Omega}^*$ уменьшаются ровно на h с каждой стороны. Если за рассматриваемый интервал времени центр σ перешел из одной ячейки крупной сетки в другую, мелкая сетка сдвигается на h вправо в направлении оси z относительно ее расположения на плоскости в момент $\xi = n\tau$. Недостающие два ряда справа получаются линейной интерполяцией по узлам крупной сетки. Если же в рассматриваемый интервал τ центр σ перемещался внутри какой-то ячейки крупной сетки, не пересекая ее границ, то линейной интерполяцией дополняются недостающие левое и правое "крылья" $\tilde{\Omega}^*$. Введение мелкой сетки существенно усложнило структуру программы, время счета увеличилось в 4 раза. Но на таком пути удалось получить хорошее согласование \tilde{I}_Λ и \tilde{I}_n .

Мелкая сетка содержит 4632 точки, 100 из которых приходится на σ . Мелкая сетка движется с площадкой так, что расположение σ

относительно мелкой сетки не меняется. После введения мелкой сетки время счета увеличилось в 4 раза. Если бы счет велся с шагами h^* , τ^* на всей Ω , время счета увеличилось бы в 125 раз. Для основной физической модели ($B=35$) энергетическое соотношение после подключения мелкой метки стало выполняться с двумя знаками: при $\xi = \xi_n$

$$\tilde{I}_A = 0.126 \cdot 10^9, \quad \tilde{I}_n = 0.125 \cdot 10^9.$$

Таким образом, относительно счета с равномерной сеткой результат улучшился на 3 порядка. Сравнение значений \tilde{I}_n для Ω и узкого длинного прямоугольника (2,8x66) показывает ^{/10/}, что в рассматриваемой модели при заданных параметрах движения сгустка потери энергии на излучение при прохождении неоднородности невелики.

Переходим к обсуждению модельных задач, с помощью которых был найден устойчивый метод счета. Прежде всего с помощью обычного метода Фурье ^{/7/} была установлена устойчивость задачи Коши для аппроксимации по схеме Лакса с пересчетом по кресту системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{w}{\tau} \\ \frac{\partial w}{\partial \xi} = -\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \tau} \end{cases} \quad \xi \geq 0, \quad -\infty < \tau, z < \infty.$$

Было получено условие на отношение шагов сетки $\alpha = \frac{\tau}{h} \leq 1$. Основные расчеты проводились с $\alpha = 1/2$. При счете с $\alpha = 1$ наблюдалась неустойчивость.

Далее исследовалась устойчивость модельной краевой задачи. Рассматривалась разностная аппроксимация краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x}, & 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = f(x), & u(1, t) = 0. \end{cases}$$

Область $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ покрывается прямоугольной сеткой с шагами τ , h . Во внутренних узлах используется аппроксимация по схеме Лакса с пересчетом по явному кресту. На правой границе используется заданное граничное условие $u_N^k = -u_{N-1}^k$, на левой границе используется неявная аппроксимация $u_t = u_x$ по такому набору точек $\cdot \cdot \cdot$:

$$u_1^{k+1} = \left(1 - \frac{\alpha}{2}(3-\alpha)\right)u_1^k + \alpha(2-\alpha)u_2^k - \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)u_3^k, \quad \alpha = \frac{\tau}{h} \leq 1.$$

Чтобы исследовать устойчивость краевой задачи, строим краевые матрицы ^{/11-12/}:

$$K_1(z) = \frac{\alpha^2(z_2 - 1)^2}{2} + \alpha \frac{4z_2 - z_2^2 - 3}{2} + 1 - \alpha$$

$$K_4(z) = z_2(1 + z_1^2),$$

z_1, z_2 - собственные значения резольвентной матрицы.

При $|z| > 1$ $K_1 \neq 0$, $K_4 \neq 0$. Тогда согласно основной теореме ^{/12/} устойчивы левая и правая полубесконечные краевые задачи. Учитывая результаты ^{/13/}, получаем устойчивость краевой задачи с двумя границами.

Наконец, рассматривалась такая модельная задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} + f(x, t), \quad t \geq 0, \quad 0 \leq x \leq X$$

$$u(X, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0$$

$$f(x, t) = \begin{cases} 1, & x_0 + t \leq x \leq x_0 + t + \sigma \\ 0, & 0 \leq x \leq x_0 + t, \quad x_0 + t + \sigma < x \leq X. \end{cases}$$

Здесь $X = 66$ (длина Ω по x), $\sigma = 0,56$ (сторона движущейся площадки в исходной задаче). Для рассматриваемой модельной задачи может быть выписано в явном виде решение и в "энергетическом" соотношении могут быть точно сосчитаны \tilde{I}_h и \tilde{I}_h . При счете по схеме Лакса с пересчетом по явному кресту с h , равным крупному шагу основного счета, \tilde{I}_h и \tilde{I}_h согласуются плохо: так, при $t = 36,54$ $\tilde{I}_h = 3,5$, $\tilde{I}_h = 4,6$. При уменьшении шагов в 5 раз энергетическое соотношение удовлетворяется с хорошей точностью. Так были выбраны шаги мелкой сетки в основном счете.

Таким образом, метод конечных разностей позволил решить важную инженерно-физическую задачу /14/. Метод удобен и экономичен в реализации на ЭВМ по сравнению с известными методами, использующими Фурье-разложения.

ЛИТЕРАТУРА

1. И.Н.Иванов и др. ЭЧАЯ I, вып.2., 1971, 393-440.
2. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский. УФН, 88, 209 (1966).
3. Б.М.Болотовский, Г.В.Воскресенский. УФН, 94, 377 (1968).
4. В.Гайтлер. "Квантовая теория излучения", ИЛ, 1956.
5. С.К.Годунов, В.С.Рябенский. "Разностные схемы", "Наука", М., 1973.
6. А.А.Самарский, А.В.Гулин. "Устойчивость разностных схем", "Наука", М., 1973.
7. И.С.Березин, Н.П.Жидков. "Методы вычислений", П.ФМ, М., 1962.
8. Н.С.Бахвалов. "Численные методы", "Наука", 1973.
9. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.И.Сердюкова. "Программирование и численные методы решения физических задач", ОИЯИ, ДЮ-7707, Дубна, 1974.
10. В.Л.Гинзбург. УФН, 98, вып.3, 509 (1969).
11. С.И.Сердюкова, ДАН СССР, т.200, № 1, 39 (1971).
12. С.И.Сердюкова. ДАН СССР, т.208, № 1, 52 (1973).
13. С.И.Сердюкова. "Об устойчивости разностных краевых задач с наклонными характеристиками постоянного знака", (ЖВМ и МФ), ОИЯИ, Р5-7592, Дубна, (1973).
14. Н.С.Бахвалов, В.С.Бондаренко, Е.П.Жидков, С.Б.Рубин, С.И.Сердюкова. "Применение метода сеток к расчету полей возбуждения неоднородной идеально проводящей структуры движущимся сгустком электронов", ОИЯИ, Р9-8643, Дубна, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 июня 1975 года.