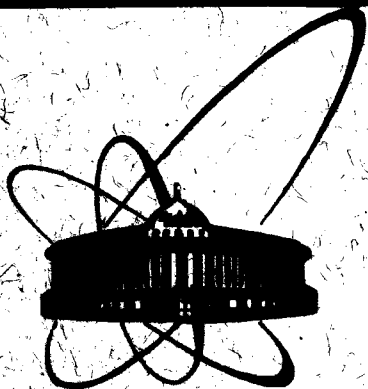


89-771



**СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

A 62

P11-89-771

И.В.Амирханов, Т.П.Пузынина

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ
КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ
В РАМКАХ R-МАТРИЧНОГО ПОДХОДА
И БАРГМАНОВСКОГО ФОРМАЛИЗМА**

1989

Введение

При исследовании многих задач квантовой механики приходится решать две группы задач — прямые и обратные. Прямая задача состоит в нахождении волновой функции как решения уравнения Шредингера при заданном потенциале взаимодействия. Обратная задача — определение самих потенциалов по спектральной функции $\rho(\lambda)$ уравнения Шредингера. В различных подходах к обратной задаче в качестве спектральной функции $\rho(\lambda)$ используются различные данные, извлекаемые из эксперимента. Например, в качестве $\rho(\lambda)$ можно использовать фазы рассеяния $\delta(k)$ при $0 \leq k < \infty$, собственные значения E_n и нормировочные константы N_n (можно использовать $S(k)$ — матрицу, $R(k)$ — матрицу и т.д.).

Математическая постановка обратной задачи была дана в известных работах И.М.Гельфанда и Г.М.Левитана^{/1/}, М.Г.Крейна^{/2/}, В.А.Марченко^{/3/} и др. (подробный список литературы см. в обзорах^{/4/} и монографиях^{/5-7/}).

В последние годы появилось много работ^{/6,7/}, рассматривающих приближенные методы решения обратной задачи.

В работах^{/8/} предложен приближенный метод решения обратной задачи с помощью прямой, где в качестве исходного уравнения (для решения прямой задачи) рассматриваются фазовые уравнения^{/9/}. Этот метод был развит и применен^{/10/} к решению обратной задачи для релятивистских уравнений квазипотенциального подхода^{/11/}.

В работах^{/12/} развивается приближенный метод решения обратной задачи, предложенный М.Г.Крейном^{/2/}.

В работе^{/13/} задача восстановления потенциала сводится к решению задачи Коши нелинейного уравнения для амплитудной функции, а в работе^{/14/} к решению системы нелинейных интегродифференциальных уравнений.

С помощью аппарата обратной задачи рассеяния можно, используя точные решения уравнения Шредингера для специальных потенциалов (потенциалы баргмановского типа), приближенно восстановить потенциал из экспериментальных данных. Подобные расчеты проводились для многих ядерных систем ($\pi\pi$, NN , $N\alpha$, $\alpha\alpha$, N -ядра, и т.д. см. обзор^{/15/}).

Вид потенциала зависит от поведения фазы рассеяния $\delta(k)$ при $k \rightarrow \infty$, что из эксперимента определить невозможно. Поэтому восстановление взаимодействия между частицами методом обратной задачи, как и

методом подбора потенциала (прямая задача) не является однозначным. Для уменьшения неоднозначности нужно учитывать дополнительные экспериментальные данные, которые получаются в задаче трех и более тел. В этом случае можно от уравнения Шредингера перейти к системе уравнений. Для системы уравнений обратная задача развивалась в работах [16] (см. также [6,7]), где получены матричные обобщения потенциалов Баргмана ($V_{\alpha\beta}(\Gamma)$). Интерес к многоканальным баргмановским потенциалам усиливается в связи с тем фактом, что они дают точное решение системы связанных уравнений. Это, в свою очередь, полезно использовать в качестве тестовых примеров при разработке различных приближенных методов решения системы уравнений (т.е. при решении прямой задачи).

Данная работа является продолжением работ [17], где в основном обсуждалась физическая постановка. Здесь мы обсуждаем математическую постановку и алгоритмы решения прямой и обратной задач.

1. Прямая задача для системы уравнений

При изучении различных физических задач квантовой механики приходится решать различные системы уравнений. Для примера рассмотрим систему уравнений, которая получается при решении одномерной задачи трех тел, когда две частицы (например, (1+2)) взаимодействуют с потенциалом

$$V_{12}(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < b \\ \infty & \rho \geq b. \end{cases}$$

Тогда от уравнения Шредингера для трех тел можно перейти к системе уравнений

$$\chi_n''(R) + k_n^2 \chi_n(R) - \sum_{m=1}^{\infty} W_{nm}(R) \chi_m(R) = 0, \quad (I.1)$$

где

$$k_n^2 = 2(E - \epsilon_n),$$

$$\epsilon_n = \frac{n^2 \pi^2}{2b^2},$$

$$W_{nm}(R) = \int_0^b \Phi_n(\rho) [V_{13}(R, \rho) + V_{23}(R, \rho)] \Phi_m(\rho) d\rho, \quad (I.2)$$

$$\Phi_n(\rho) = \frac{2}{b} \sin \frac{n\pi\rho}{b} - \text{решение задачи двух тел для подсистемы (1+2).}$$

При решении конкретных физических задач (прямая задача) в системе (I.1) оставляют конечное число уравнений ($n=1, 2, \dots, N$) и из физических соображений ставят граничные условия при $R=0$ и $R \rightarrow \infty$.

Для обратной задачи необходимо решение следующей прямой задачи:

$$\chi_n''(R) + k_n^2 \chi_n(R) - \sum_{m=1}^N W_{nm}(R) \chi_m(R) = 0, \quad (I.3)$$

$$\chi_n(0) = \chi_n(a) = 0 \quad R \in [0, a], \quad n=1, 2, \dots, N, \quad (I.4)$$

с условием ортонормировки

$$\sum_{n=1}^N \int_0^a \chi_n(k_n^\nu R) \chi_n(k_n^\mu R) dR = \delta_{\nu\mu}, \quad (I.5)$$

$$\delta_{\nu\mu} = \begin{cases} 1, & \text{при } \mu = \nu \\ 0, & \text{при } \mu \neq \nu. \end{cases}$$

В результате решения краевой задачи (I.3)-(I.4) при выполнении условия (I.5) получаем

$$\left. \begin{aligned} E^\nu \\ [\chi_n^\nu(R)]' \Big|_{R=a} = \Gamma_n^\nu \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \nu = 1, 2, 3, \dots, \\ n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (I.6)$$

Множество $\{E^\nu, \Gamma_n^\nu\}$ есть экспериментальные данные (т.е. спектральная функция) для обратной задачи.

2. Обратная задача для системы уравнений

Полное решение обратной задачи для трех тел в рамках системы (I.3) состоит из двух этапов.

I. Восстановление потенциалов $W_{nm}(R)$ по экспериментальным данным, в нашем случае по $\{E^\nu, \Gamma_n^\nu\}$.

II. По найденным $W_{nm}(R)$ можно восстановить двухчастичные взаимодействия (V_{13}, V_{23}).

Сравнивая эти потенциалы с потенциалами, которые получаются при решении обратной задачи в рамках двух тел, можно делать определенные заключения о многочастичных силах, о коллективных взаимодействиях между частицами и т.д.

В данной работе мы рассматриваем только I этап решения обратной задачи.

Пусть известен \dot{W}_{nm} ($n, m=1, 2, \dots, N$) и нужно решить обратную задачу по отношению к этому опорному потенциалу. Тогда основные

Формулы обратной задачи для системы уравнений (I.3) примут вид^{6,7/}

$$K_{nm}(R, R') + Q_{nm}(R, R') + \sum_{\ell=1}^N \int_R^a K_{n\ell}(R, R'') Q_{\ell m}(R'', R') dR'' \quad (2.1)$$

$$Q_{nm}(R, R') = \sum_{\nu=1}^M [\Psi_n^\nu(R) \Psi_m^\nu(R') - \dot{\Psi}_n^\nu(R) \dot{\Psi}_m^\nu(R')] \quad (2.2)$$

$$W_{nm}(R) = -2 \frac{\alpha}{\alpha R} K_{nm}(R, R) + \dot{W} + \ddot{W} \quad (2.3)$$

Явный вид \dot{W} приведен в приложении.

Здесь $\Psi_n^\nu(R)$ - решения краевой задачи (I.3)-(I.4) с

$$W_{nm}(R) = \dot{W}_{nm}(R) \quad (n, m = 1, 2, \dots, N).$$

Функции $\Psi_n^\nu(R)$ есть решения задачи Коши

$$\Psi_n^\nu(a) = 0,$$

$$[\Psi_n^\nu(a)]' = \Gamma_n^\nu$$

для системы (I.3) при заданных \dot{W}_{nm} , причем $\{E^\nu, \Gamma_n^\nu\}$ - известные экспериментальные данные.

Подставляя (2.2) в (2.1), имеем

$$K_{nm}(R, R') = \sum_{\nu=1}^M \left\{ \Psi_n^\nu(R) \Psi_m^\nu(R') - \dot{\Psi}_n^\nu(R) \dot{\Psi}_m^\nu(R') \right\} \quad (2.4)$$

Функции Ψ_n^ν и $\dot{\Psi}_n^\nu$ являются решениями системы уравнений

$$\sum_{\nu=1}^M \left[(\delta_{\nu n} + D_{nn}^{\nu\nu'}(R)) \Psi_n^{\nu'}(R) + D_{n0}^{\nu\nu'}(R) \dot{\Psi}_n^{\nu'}(R) \right] = \Psi_n^\nu(R), \quad n=1, 2, \dots, N \quad (2.5)$$

$$\sum_{\nu=1}^M \left[D_{10}^{\nu\nu'}(R) \Psi_n^{\nu'}(R) + (\delta_{\nu\nu'} + D_{00}^{\nu\nu'}(R)) \dot{\Psi}_n^{\nu'}(R) \right] = \dot{\Psi}_n^\nu(R), \quad \nu=1, 2, \dots, M,$$

где

$$D_{nn}^{\nu\nu'} = \sum_{\ell=1}^N \int_R^a dR \cdot \Psi_\ell^\nu(R) \Psi_\ell^{\nu'}(R),$$

$$D_{n0}^{\nu\nu'} = - \sum_{\ell=1}^N \int_R^a dR \Psi_\ell^\nu(R) \dot{\Psi}_\ell^{\nu'}(R), \quad (2.6)$$

$$D_{01}^{\nu\nu'} = \sum_{\ell=1}^N \int_R^a dR \dot{\Psi}_\ell^\nu(R) \Psi_\ell^{\nu'}(R),$$

$$D_{00}^{\nu\nu'} = - \sum_{\ell=1}^N \int_R^a dR \dot{\Psi}_\ell^\nu(R) \dot{\Psi}_\ell^{\nu'}(R).$$

Решая систему алгебраических уравнений (2.5) для каждого фиксированного значения R , находим $\{\Psi_n^\nu(R)\}$ и $\{\dot{\Psi}_n^\nu(R)\}$. Подставляя эти функции в (2.4), находим $K_{nm}(R, R')$. Окончательно, используя (2.3), находим $W_{nm}(R)$.

3. Комплексы программ V и S

Созданы два комплекса программ:

V - для решения прямой задачи и S - обратной. Каждый из них может работать как самостоятельно, так и во взаимодействии друг с другом. Основой комплекса V является комплекс SLIPS2^{18/}. Решения $\{E^\nu, \chi_n^\nu, \Gamma_n^\nu\}$ прямой задачи могут быть записаны на диск (ленту) и служить в качестве входных экспериментальных данных в комплексе S.

$$V \rightarrow S.$$

Функции $\{\dot{\Psi}_n^\nu\}$ из комплекса S, являющиеся решениями системы (2.5), также записываются на диск или другое внешнее запоминающее устройство и при желании пользователя могут служить начальными приближениями для собственных функций $\{\tilde{\chi}_n^\nu\}$ в комплексе V. Восстановленные потенциалы W_{nm} также записываются и могут использоваться в V.

$$S \rightarrow V.$$

В качестве начальных приближений к собственным функциям $\{\tilde{\chi}_n^\nu\}$ в V можно также использовать предыдущие решения $\{\tilde{\chi}_n^{\nu-1}\}$, если они уже найдены, или какие-нибудь простые функции типа синусоид, удовлетворяющих граничным условиям (I.4).

В качестве начального приближения к собственному значению можно брать $E^{\nu 0} = \min_{R \in [0, a]} (E_1 + \frac{1}{2} W_{11}(R), E_2 + \frac{1}{2} W_{22}(R))$,

$$E^{\nu 0} = E^{\nu-1} + \Delta E, \quad \nu > 1,$$

ΔE - небольшой сдвиг, $\sim 10^{-1} - 10^{-2}$, дающий нам уверенность, что некоторые значения (решения) не будут пропущены. В режиме модифицированного процесса (MOD=2)^{18/} сходимость будет к ближайшему к $E^{\nu 0}$ собственному значению E^ν . После вычисления заданного количества решений в комплексе V они упорядочиваются таким образом, чтобы последовательность E^ν была неубывающей и выполнялось условие $\chi_1^{\nu'}(0) > 0$.

Численное дифференцирование в формулах (I.6) и (2.3) осуществляется по разностным формулам порядка $O(h^2)$, как и ньютоновские итерационные схемы. Здесь h - шаг дискретной сетки, M - число ее узлов

$$\omega_h = \{x_i = (i-1)h, \quad i = \overline{1, M}; \quad h = a / (M-1)\}.$$

4. Численные эксперименты

Результаты численных экспериментов для одноканальной задачи приведены в работах [17].

В этой работе мы даем некоторую информацию, полученную при решении двухканальной задачи.

Для простоты рассмотрим случай $\dot{W}_{nm} = 0$ ($n, m = 1, 2, \dots, N$). Тогда

$$\frac{\dot{W}}{W} = \lambda \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & & & \\ & \varepsilon_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon_N \end{pmatrix}.$$

С таким потенциалом краевая задача (I.3)-(I.4) и задача Коши имеют точное решение

$$\dot{\Psi}_n^{\nu} = \frac{\Gamma_n^{\nu}}{k_n^{\nu}} \sin k_n^{\nu} (R-a), \quad (4.1)$$

$$\Psi_n^{\nu} = \frac{\Gamma_n^{\nu}}{k_n^{\nu}} \sin k_n^{\nu} (R-a),$$

где

$$k_n^{\nu} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} k_n^{\circ \nu}, \quad (k_n^{\circ \nu})^2 = 2(E^{\circ \nu} - \varepsilon_n),$$

$$E^{\circ \nu} = \frac{\nu^2}{8} + \varepsilon_n.$$

Заметим, что интегралы в (2.6) вычисляются аналитически.

В таблице I приведены величины E^{ν} , $\tilde{\Gamma}_n^{\nu} = \Gamma_n^{\nu} / K_n^{\nu}$ для прямой задачи V с нулевыми потенциалами $W_{ij} \equiv 0$, $i, j = 1, 2$. Они получены с использованием дискретной сетки ω_h с числом узлов

$M = 315$, $h = 2\pi/314 \approx 0,01$, что обеспечивает 3-4 верных знака после запятой для первых 15-20 решений. В этой таблице приведены также значения \dot{E}^{ν} , $\dot{\Gamma}_n^{\nu}$ для свободных решений. Следует обратить внимание на строки для $\nu=5$ и $\nu=6$ в этой таблице. Видно, что $\tilde{\Gamma}_n^5$ соответствуют $\tilde{\Gamma}_n^6$, а $\tilde{\Gamma}_n^6$ соответствуют $\tilde{\Gamma}_n^5$, т.е. при вырожденном собственном значении последовательность собственных функций из прямой задачи может не соответствовать последовательности свободных решений.

Если в обратной задаче S в качестве экспериментальных данных $\{E^{\nu}, \Gamma_n^{\nu}\}$ взять свободные решения $\{\dot{E}^{\nu}, \dot{\Gamma}_n^{\nu}\}$, то получаются потенциалы $W_{11} \approx 10^{-15} - 10^{-16}$, $W_{12} \equiv W_{21} \equiv 0$, $W_{22} \approx 10^{-15} - 10^{-16}$.

Таблица I

| ν | E^{ν} | $\tilde{\Gamma}_1^{\nu}$ | $\tilde{\Gamma}_2^{\nu}$ | \dot{E}^{ν} | $\dot{\Gamma}_1^{\nu}$ | $\dot{\Gamma}_2^{\nu}$ |
|-------|-----------|--------------------------|--------------------------|-----------------|------------------------|------------------------|
| 1 | 0,6250 | -0,56419 | $-0,1 \cdot 10^{-9}$ | 0,6250 | 0,56419 | 0 |
| 2 | 1,0000 | 0,56420 | $-0,5 \cdot 10^{-8}$ | 1,0000 | 0,56419 | 0 |
| 3 | 1,6249 | -0,56421 | $0,4 \cdot 10^{-5}$ | 1,6250 | 0,56419 | 0 |
| 4 | 2,1250 | $0,9 \cdot 10^{-8}$ | 0,56420 | 2,1250 | 0 | 0,56419 |
| 5 | 2,49973 | 0,56420 | $0,8 \cdot 10^{-4}$ | 2,5000 | 0 | 0,56419 |
| 6 | 2,49998 | $-0,9 \cdot 10^{-4}$ | 0,56425 | 2,5000 | 0,56419 | 0 |
| 7 | 3,1249 | $0,5 \cdot 10^{-5}$ | 0,56421 | 3,1250 | 0 | 0,56419 |
| 8 | 3,6244 | -0,56425 | $-0,9 \cdot 10^{-5}$ | 3,6250 | 0,56419 | 0 |
| 9 | 3,9997 | $-0,8 \cdot 10^{-5}$ | 0,56423 | 4,0000 | 0 | 0,56419 |
| 10 | 4,9987 | 0,56427 | $-0,4 \cdot 10^{-4}$ | 5,0000 | 0,56419 | 0 |
| 11 | 5,1244 | $0,4 \cdot 10^{-4}$ | 0,56425 | 5,1250 | 0 | 0,56419 |
| 12 | 6,4987 | $-0,1 \cdot 10^{-4}$ | 0,56427 | 6,5000 | 0 | 0,56419 |
| 13 | 6,6225 | -0,56430 | $-0,1 \cdot 10^{-4}$ | 6,6250 | 0,56419 | 0 |
| 14 | 8,1225 | $-0,9 \cdot 10^{-6}$ | 0,56430 | 8,1250 | 0 | 0,56419 |
| 15 | 8,4957 | 0,56434 | $0,1 \cdot 10^{-5}$ | 8,5000 | 0,56419 | 0 |
| 16 | 9,9957 | $0,1 \cdot 10^{-5}$ | -0,56434 | 10,0000 | 0 | 0,56419 |
| 17 | 10,6182 | -0,56437 | $-0,3 \cdot 10^{-5}$ | 10,6250 | 0,56419 | 0 |
| 18 | 12,1182 | $-0,2 \cdot 10^{-5}$ | 0,56437 | 12,1250 | 0 | 0,56419 |
| 19 | 12,9896 | 0,56441 | $0,3 \cdot 10^{-5}$ | 13,0000 | 0,56419 | 0 |
| 20 | 14,4896 | $0,3 \cdot 10^{-5}$ | -0,56441 | 14,5000 | 0 | 0,56419 |

В программе S у некоторых нормировок $\tilde{\Gamma}_i^{\nu}$ меняется знак на противоположный, чтобы выполнялось условие $\tilde{\Gamma}_i^{\nu} \dot{\Gamma}_i^{\nu} \geq 0$.

Если использовать экспериментальные данные из таблицы I, то наблюдается постепенный уход с ростом ν от нулевых значений W_{ij} . При $\nu=5$ происходит резкий скачок (на 4-5 порядков) в изменении

W_{ij} , что можно объяснить описанным выше несоответствием последовательностей экспериментальных и свободных решений. В таблице 2 приведены значения $W_{ij}(0)$ для значений $\nu = 1, 2, 4, 5, 6, 12$ и 18 величин из таблицы I.

В таблице 3 приведены результаты эксперимента при $\tilde{f}_n^5 \leftrightarrow \tilde{f}_n^6$, т.е. когда имеется соответствие между числом нулей экспериментальных и свободных волновых функций. При $\nu=5$ нет никакого скачка. При $\nu=18$ результаты в таблицах 2 и 3 совпадают, т.е. с увеличением количества экспериментальных точек пропадает сильное влияние описанного выше несоответствия решений. При решении прямой задачи с восстановленными потенциалами и начальными приближениями $E^{\nu 0} = \tilde{E}^{\nu}$ и $X_n^{\nu 0} = \varphi_n^{\nu}$ мы убеждаемся в том, что спектральные характеристики $\{E^{\nu}, \Gamma_n^{\nu}\}$ сохраняются, что подтверждает неоднозначность получения потенциалов в обратной задаче.

Таблица 2

| ν | W_{11} | $W_{12} \equiv W_{21}$ | W_{22} |
|-------|---------------------|------------------------|-----------------------|
| 1 | $0,8 \cdot 10^{-5}$ | $-0,6 \cdot 10^{-10}$ | $-0,5 \cdot 10^{-24}$ |
| 2 | $0,1 \cdot 10^{-3}$ | $0,3 \cdot 10^{-8}$ | $-0,2 \cdot 10^{-20}$ |
| 4 | $0,1 \cdot 10^{-2}$ | 0 | $0,1 \cdot 10^{-9}$ |
| 5 | $0,1 \cdot 10^{-2}$ | -4,1 | $-0,3 \cdot 10^5$ |
| 6 | $0,3 \cdot 10^{-2}$ | $0,4 \cdot 10^{-5}$ | $0,1 \cdot 10^{-3}$ |
| 12 | $0,2 \cdot 10^{-1}$ | $0,5 \cdot 10^{-4}$ | $0,2 \cdot 10^{-1}$ |
| 18 | 0,129 | 10^{-3} | 0,129 |

Таблица 3

$\tilde{f}_n^5 \rightarrow \tilde{f}_n^6, \tilde{f}_n^6 \rightarrow \tilde{f}_n^5$

| ν | W_{11} | $W_{12} \equiv W_{21}$ | W_{22} |
|-------|---------------------|------------------------|---------------------|
| 5 | $0,8 \cdot 10^{-3}$ | $0,5 \cdot 10^{-5}$ | $0,1 \cdot 10^{-3}$ |
| 18 | 0,129 | 10^{-3} | 0,129 |

Приложение

Вводя следующие векторные и матричные обозначения:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_N \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} \bar{W}_{11} & \bar{W}_{12} & \dots & \bar{W}_{1N} \\ \bar{W}_{21} & \bar{W}_{22} & \dots & \bar{W}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \bar{W}_{N1} & \bar{W}_{N2} & \dots & \bar{W}_{NN} \end{pmatrix},$$

где $\bar{W}_{nm} = W_{nm} + \delta_{nm} 2 \varepsilon_m$, $\hat{E} = 2 E \cdot I$,

I - единичная квадратная матрица порядка N , краевую задачу (I.3)-(I.4) перепишем так:

$$X'' + \hat{E} X - W X = 0, \quad (\text{П.1})$$

$$X(0) = X(a) = 0. \quad (\text{П.2})$$

Пусть для заданного потенциала $\hat{W}_{nm}(n, m=1, 2, \dots, N)$ нашли $\{\hat{E}^{\nu}, \hat{X}^{\nu}, \nu=1, 2, \dots, M\}$ - решения краевой задачи (П.1)-(П.2) при выполнении условия нормировки (I.5). Кроме этого для системы (П.1) нашли $\{\hat{E}^{\nu}, X^{\nu}, \nu=1, 2, \dots, M\}$ - решения задачи Коши $X^{\nu}(a) = 0$, $(X^{\nu}(a))' = \Gamma^{\nu}$, причем $\{\hat{E}^{\nu}, \Gamma^{\nu}\}$ - известные экспериментальные данные.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\Psi} = \begin{pmatrix} (\hat{X}^T)^1 \\ (\hat{X}^T)^2 \\ \vdots \\ (\hat{X}^T)^M \end{pmatrix}; \quad \Psi = \begin{pmatrix} (X^T)^1 \\ (X^T)^2 \\ \vdots \\ (X^T)^M \end{pmatrix}; \quad \hat{\Psi}^T = (\hat{X}^1 \hat{X}^2 \dots \hat{X}^M);$$

$$\Psi^T = (X^1 \cdot X^2 \dots X^M);$$

$$\hat{E} = \begin{pmatrix} \hat{E}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{E}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{E}^M \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} \hat{E}^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{E}^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{E}^M \end{pmatrix}.$$

Литература

Матричные функции

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi \\ \dot{\Psi} \end{pmatrix}; \quad \Psi^T = (\Psi^T \ \dot{\Psi}^T); \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

удовлетворяют уравнению

$$\Psi'' + \varepsilon \Psi - \Psi W^T = 0 \tag{П.3}$$

$$(\Psi^T)'' + \Psi^T \varepsilon - W \Psi^T = 0.$$

Теперь основные формулы обратной задачи (2.1)-(2.6) перепишем в матричных обозначениях

$$K(R, R') = - \left[Q(R, R') + \int_R^{\infty} K(R, R'') Q(R'', R') dR'' \right], \tag{П.4}$$

$$Q(R, R') = \Psi^T(R) \hat{I} \Psi(R'), \tag{П.5}$$

где

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}.$$

Подставляя (П.5) в (П.4), получим

$$K(R, R') = - \Psi^T(R) \hat{I} \Psi(R'). \tag{П.6}$$

Здесь $\varphi^T(R)$ - удовлетворяет матричному уравнению

$$\varphi^T(R) \mathcal{D}(R) = \Psi^T(R), \tag{П.7}$$

где

$$\mathcal{D}(R) = \left[\hat{I}^2 + \hat{I} \int_R^{\infty} \Psi(R') \Psi^T(R') dR' \right]. \tag{П.8}$$

Матричный потенциал вычисляется по следующим формулам:

$$W = -2 \frac{d}{dR} K(R, R) + \overset{\circ}{W} + \overset{\circ}{\dot{W}}, \tag{П.9}$$

где

$$\frac{d}{dR} K(R, R) = - \left[(\Psi^T)' \mathcal{D}^{-1} \hat{I} \Psi + K \cdot K + \varphi^T \hat{I} \Psi' \right], \tag{П.10}$$

$$\overset{\circ}{W} = \hat{I} \cdot \int_R^{\infty} \left[\Psi W^T \Psi^T - \Psi W \Psi^T \right] dR' \cdot \mathcal{D}^{-1}. \tag{П.11}$$

Заметим, что если $W^T = W$, то $\overset{\circ}{W} = 0$. Кроме того, компонента φ^T является решением краевой задачи (П.1)-(П.2).

1. Гельфанд И.М., Левитан Б.М.-Изв. АН, сер. матем., 15, № 4(1951).
2. Крейн М.Г.-ДАН СССР, 105, № 3 (1955).
3. Марченко В.А.-ДАН СССР, 104, № 5(1955).
4. Фаддеев Л.Д.-УМН, 1959, т.14, вып.4(88), с.57-83.
Современные проблемы математики.Т.3, М.: Изд-во ВИШТИ, 1974, с.43-180.
5. Агранович Э.С., Марченко В.А.-Обратная задача теории рассеяния. Харьков, изд-во ХГУ, 1960.
6. Шадан К., Сабатье П.-Обратные задачи в квантовой теории рассеяния. М.: Изд-во Мир, 1980.
7. Захарьев Б.Н., Сузько А.А.-Потенциалы и квантовое рассеяние. Прямая и обратная задачи. М.: Энергоатомиздат, 1985.
8. Визнер Я., Жидков Е.П., Лелек В.-ОИЯИ, Р5-3895, Дубна, 1968.
Христов Е.Х. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. ОИЯИ, П1-81-414, Дубна, 1981.
9. Бабилов В.В.-Метод фазовых функций в квантовой механике. М.:Наука, 1976.
10. Амирханов И.В., Гречко В.Е., Дементьев Р.Н.-ОИЯИ, Р4-7109, Дубна, 1973.
11. Кадышевский В.Г., Мир-Касимов Р.М., Скачков Н.Б.-ЭЧАМ, том 2, вып.3, Атомиздат, Москва, 1971.
12. Егикян Р.С., Жидков Е.П.-ОИЯИ, 5-85-366; Р5-85-858, Дубна, 1985.
13. Абрамов Д.И.-ДАН СССР, 1988, т.298, № 3, с.585.
14. Grazyna Staszewska-J.Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. 22(1989) 913-929.
15. Захарьев Б.Н. и др.-ЭЧАЯ, 1982, 13, 1284.
16. Cox J.R.-J.Math. Phys. 1964,v.5, 1066, Ann Phys. , 1966, v.39, 216.
17. Amirkhanov I.V. et al. In:Proc. Conf. "Schroedinger Operator . Standart and Nonstandart" Dubna, 1988. Singapore: World Scientific, 1989, p.353.; Communic. JINR - 1989, B4-89-312, Dubna.
18. Пузынина Т.П.-ОИЯИ, Р11-89-728, Дубна, 1989.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 ноября 1989 года.