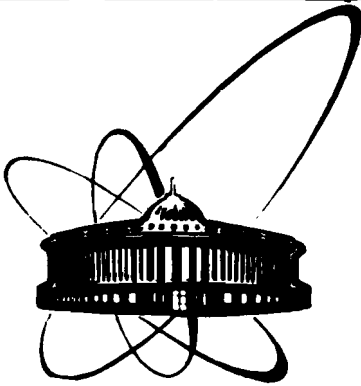


89-703



**ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА**

К 144

P11-89-703

Г.С.Казача, Я.Д.Маджарова, С.И.Сердюкова

**ОДНОЭЛЕКТРОННЫЕ СОЛИТОНЫ
В ДВУМЕРНЫХ ТУННЕЛЬНЫХ СТРУКТУРАХ**

Направлено в "Журнал вычислительной математики
и математической физики"

1989

ный характер. Но в двумерном случае гистерезис не так ярко выражен.

1. Введение

В работе [1] теоретически исследованы процессы коррелированного одноэлектронного туннелирования в одномерных системах туннельных переходов малой площади при низких температурах. В предлагаемой работе исследуются двумерные структуры из туннельных переходов малой площади при низких температурах. Вероятность отдельного акта туннелирования зависит от изменения свободной энергии системы [1], которая, в свою очередь, зависит от распределения потенциалов. В предлагаемой работе получены явные формулы решения системы разностных уравнений, описывающих распределение потенциалов в узлах двумерной туннельной структуры. С помощью этих формул доказано, что изменение свободной энергии при туннелировании равно изменению потенциалов в узлах, между которыми происходит обмен электронами. Аналитически найдены форма и свободная энергия одиночного солитона в двумерной туннельной структуре, а также пороговое значение внешнего поля, начиная с которого солитоны входят в структуру. Численно с применением метода Монте-Карло [1] промоделированы статические состояния в двумерной туннельной структуре. Вычислена зависимость удельной плотности солитонов от внешнего поля. Эта зависимость имеет вид "чертовой лестницы". Ширина ступеней отличается от ступеней в одномерном случае. В двумерном случае все процессы оглажены. Зависимость плотности статической решетки от внешнего поля имеет гистерезис-

2. Распределение потенциалов в двумерной туннельной структуре

Рассматривается двумерная система туннельных переходов, в которых может происходить одноэлектронное туннелирование. Эквивалентная схема этой системы представлена на рис. 1: слева подключен источник напряжения U_- , справа - источник напряжения U_+ ; φ_{ij} - потенциалы узлов (\cdot), $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq m$, $\varphi_{0j} = U_-$, $\varphi_{N+1j} = U_+$; Q_{ij} - заряды на "горизонтальных" конденсаторах (||) емкости C , $1 \leq i \leq N+1$, $1 \leq j \leq m$; \tilde{Q}_{ij} - заряды на "вертикальных" конденсаторах (=) емкости C , $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq m-1$; Q'_{ij} - на "нижних" конденсаторах емкости C_0 , $1 \leq i \leq N$, $1 \leq j \leq m$.

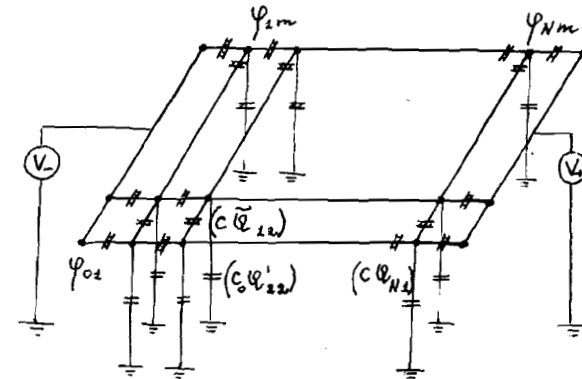


Рис. 1

Всего в системе $(N+1)m + N(m-1)$ туннельных переходов. Одноэлектронное туннелирование может происходить с вероятностью в единицу времени

$$\Gamma = \frac{W}{R e^2} \frac{E}{(E - E^{-1})}, \quad E = \exp\left(\frac{W}{\lambda kT}\right).$$

Здесь T - температура, k - постоянная Больцмана, R - сопротивление туннельных переходов, e - заряд электрона. Предполагается, что емкость C и туннельная проводимость G достаточно малы:

$$C \approx \frac{e^2}{2T}, \quad G \ll \frac{2e^2}{\pi\hbar},$$

\hbar - постоянная Планка. При таких условиях применимо^{/2/} "марковское" приближение, в котором вероятность отдельного акта туннелирования в единицу времени определяется величиной

$$W = F - F'$$

Через F обозначена свободная энергия системы до туннелирования, через F' - после туннелирования. Свободная энергия туннельной структуры, представленной на рис.1, равна

$$F = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N+1} \frac{a_{ij}^2}{2C} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \frac{\tilde{a}_{ij}^2}{2G} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m-1} \frac{\tilde{\tilde{a}}_{ij}^2}{2C} + \sum_{j=1}^m c (v_- (\varphi_{1j} - v_-) - v_+ (v_+ - \varphi_{Nj})) - e (v_- m_- + v_+ m_+), \quad (1)$$

$m_+ (m_-)$ - число электронов, протуннелировавших в систему через крайние правые (левые) переходы. Ниже будет доказана простая формула для $F - F'$, которая используется при численном моделировании. Если электрон туннелирует в "горизонтальном направлении" (из (i_0, j_0) в (i_0+1, j_0) или из (i_0+1, j_0) в (i_0, j_0)), то

$$F - F' = \pm \frac{e}{2} (\varphi_{i_0 j_0} + \varphi'_{i_0 j_0} - \varphi_{i_0+1 j_0} - \varphi'_{i_0+1 j_0}) \quad (2)$$

соответственно. Если же электрон туннелирует в "вертикальном направлении" (из (i_0, j_0) в (i_0, j_0+1) или из (i_0, j_0+1) в (i_0, j_0)), то

$$F - F' = \pm \frac{e}{2} (\varphi_{i_0 j_0} + \varphi'_{i_0 j_0} - \varphi_{i_0 j_0+1} - \varphi'_{i_0 j_0+1}) \quad (3)$$

соответственно. Из законов электростатики следуют соотношения

$$\begin{aligned} a_{ij} - a_{i+1j} + \tilde{a}_{ij-1} - \tilde{a}_{ij} + a'_{ij} &= e n_{ij}, \\ 1 \leq i \leq N, \quad 2 \leq j \leq m-1; \\ a_{im} - a_{i+1m} + \tilde{a}_{im-1} + a'_{im} &= e n_{im}, \\ a_{i1} - a_{i+11} - \tilde{a}_{i1} + a'_{i1} &= e n_{i1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Через n_{ij} обозначено число электронов в узле (i, j) . Заряды и потенциалы связаны соотношениями

$$\begin{aligned} a'_{ij} &= C \varphi_{ij}, \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq m; \\ a_{ij} &= C (\varphi_{ij} - \varphi_{i-1j}), \quad 1 \leq i \leq N+1, \quad 1 \leq j \leq m; \\ \tilde{a}_{ij} &= C (\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij}), \quad 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq m-1. \end{aligned} \quad (5)$$

При этом

$$\varphi_{0j} = v_-, \quad \varphi_{N+1j} = v_+, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Подставив эти соотношения в (4), получим систему, описывающую распределение потенциалов φ_{ij} в узлах двумерной туннельной структуры:

$$\begin{aligned} -C(\varphi_{i-1j} + \varphi_{i+1j} + \varphi_{ij-1} + \varphi_{ij+1}) + (4C + C_0)\varphi_{ij} &= en_{ij} \\ -C(\varphi_{i-11} + \varphi_{i+11} + \varphi_{i2}) + (3C + C_0)\varphi_{i1} &= en_{i1} \\ -C(\varphi_{i-1m} + \varphi_{i+1m} + \varphi_{im-1}) + (3C + C_0)\varphi_{im} &= en_{im}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 2 \leq j \leq m-1;$$

$$\varphi_{0j} = v_-, \quad \varphi_{N+1j} = v_+, \quad 1 \leq j \leq m.$$

После замены $\varphi_{ij} = \frac{e}{C} X_{ij}$, $v_- = \frac{e}{C} v^-$, $v_+ = \frac{e}{C} v^+$ получаем

$$\begin{aligned} X_{i-1j} + X_{i+1j} + X_{ij-1} + X_{ij+1} - (4 + \alpha)X_{ij} &= -n_{ij}, \\ X_{i-11} + X_{i+11} + X_{i2} - (3 + \alpha)X_{i1} &= -n_{i1}, \\ X_{i-1m} + X_{i+1m} + X_{im-1} - (3 + \alpha)X_{im} &= -n_{im}, \end{aligned} \quad (7)$$

$$1 \leq i \leq N, \quad 2 \leq j \leq m-1;$$

$$X_{0j} = v^-, \quad X_{N+1j} = v^+, \quad 1 \leq j \leq m.$$

Распределение потенциалов в одномерной туннельной структуре удовлетворяет /1/:

$$\begin{aligned} X_{i-1} - (2 + \alpha)X_i + X_{i+1} &= -n_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ X_0 = v^-, \quad X_{N+1} &= v^+. \end{aligned} \quad (8)$$

Простой подстановкой можно убедиться, что решение (8) имеет вид

$$\begin{aligned} X_i = \frac{x}{1-x^2} \left\{ \sum_{f=1}^N x^{|i-f|} n_f - \frac{1}{1-x^{2N+2}} \left[x^{N+1+i} \sum_{f=1}^N (x^{f-N-1} - \right. \right. \\ \left. \left. - x^{N+1-f}) n_f + x^{2N+2-i} \sum_{f=1}^N (x^{-f} - x^f) n_f \right] \right\} + \\ + \frac{1}{(1-x^{2N+2})} \left[v^- (x^i - x^{2N+2-i}) + v^+ (x^{N+1-i} - x^{N+1+i}) \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$1 \leq i \leq N,$$

$$x = 1 + \frac{\alpha}{2} - \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}} < 1.$$

Решение (7) можно свести к решению одномерных задач вида (8).

Запишем (7) в матричном виде:

$$\begin{aligned} \bar{X}_{i-1} - A \bar{X}_i + \bar{X}_{i+1} &= -n_i, \quad 1 \leq i \leq N, \\ \bar{X}_0 &= v^-(1, \dots, 1)^*, \quad \bar{X}_{N+1} = v^+(1, \dots, 1)^*. \end{aligned} \quad (10)$$

Через A обозначена матрица

$$A = \begin{pmatrix} 3 + \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 4 + \alpha & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 3 + \alpha \end{pmatrix} = (4 + \alpha)E + B,$$

Матрица B имеет m вещественных собственных значений

$$-2 \cos \frac{\pi(l-1)}{m}, \quad l=1, 2, \dots, m,$$

которым отвечает ортонормированный базис собственных векторов

$$\bar{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{m}} (1, \dots, 1)^*$$

$$\bar{e}_l = \sqrt{\frac{2}{m}} \left(\cos \frac{1}{2} \frac{\pi l(l-1)}{m}, \dots, \cos \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi l(l-1)}{m} \right)^*$$

$$l=2, \dots, m.$$

Преобразование подобия $T = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_m)^*$ приводит B к диагональному виду $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$, $\lambda_l = 2 + d + 4 \sin^2 \frac{\pi l(l-1)}{2m}$,

$$T = \sqrt{\frac{2}{m}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & & \dots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos \frac{\pi l}{2m} & & \dots & \cos \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi l}{m} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \cos \frac{\pi(m-1)}{2m} & \dots & \cos \left(m - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi(m-1)}{m} \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = T^*$$

После замены $\bar{Y}_i = T \bar{X}_i$ система (10) преобразуется к виду

$$\bar{Y}_{i-1} - \Lambda \bar{Y}_i + \bar{Y}_{i+1} = -T \bar{H}_i, \quad 1 \leq i \leq N,$$

$$\bar{Y}_0 = (\sqrt{m} V^*, 0, \dots, 0)^*, \quad \bar{Y}_{N+1} = (\sqrt{m} V^*, 0, \dots, 0)^*.$$

Для каждой компоненты решение может быть выписано согласно (9) со своим \mathcal{X} . Для l -й компоненты \mathcal{L} в представлении \mathcal{X} заменяется на $\mathcal{L}_l = d + 4 \sin^2 \frac{\pi l(l-1)}{2m}$. Сделав обратную замену $\bar{X}_i = T^{-1} \bar{Y}_i$, получаем решение системы (7):

$$\begin{aligned} X_{ij} = & \frac{1}{m} \frac{x_1}{1-x_1^2} \sum_{s=1}^m \left\{ \sum_{f=1}^N x_1^{|i-f|} n_{fs} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{1-x_1^{2N+2}} \left[x_1^{N+1+i} \sum_{f=1}^N (x_1^{f-N-1} - x_1^{N+1-f}) n_{fs} + x_1^{2N+2-i} \sum_{f=1}^N (x_1^{-f} - x_1^f) n_{fs} \right] \right\} + \\ & + \frac{1}{1-x_1^{2N+2}} \left[x_1^i (x_1 - x_1^{2N+2-i}) + x_1^{N+1-i} (x_1^{N+1+i} - x_1^i) \right] + \\ & + \frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \left(\cos \left(j - \frac{1}{2}\right) \frac{(k-1)\pi}{m} \right) \frac{x_k}{1-x_k^2} \sum_{s=1}^m \cos \left(s - \frac{1}{2}\right) \frac{(k-1)\pi}{m} \cdot \\ & \cdot \left\{ \sum_{f=1}^N x_k^{|i-f|} n_{fs} - \frac{1}{1-x_k^{2N+2}} \left[x_k^{N+1+i} \sum_{f=1}^N (x_k^{f-N-1} - x_k^{N+1-f}) n_{fs} + \right. \right. \\ & \left. \left. + x_k^{2N+2-i} \sum_{f=1}^N (x_k^{-f} - x_k^f) n_{fs} \right] \right\}, \\ & 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

3. Изменение энергии при одноэлектронном туннелировании

Свободная энергия F туннельной структуры может быть задана формулой

$$\begin{aligned} F = & \frac{e^2}{C} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m n_{ij} X_{ij} + \right. \\ & \left. \frac{1}{2} \sum_{j=1}^m \left[x_j^- (x_{1j} - x_j^-) - x_j^+ (x_j^+ - x_{Nj}) \right] - \sigma_m^- - x_m^+ \right\} \quad (12) \end{aligned}$$

Покажем, что (I) и (I2) могут быть преобразованы к одному и тому же виду. Подставив в (I) соотношение (5) и выполнив элементарные преобразования, получим

$$\begin{aligned}
 F &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m \left(2c + \frac{c_0}{2}\right) \varphi_{ij}^2 - c \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^{N+1} \varphi_{ij} \varphi_{i-1j} - \\
 &- c \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m-1} \varphi_{ij} \varphi_{ij+1} + \frac{c}{2} \sum_{j=1}^m (\varphi_{N+1j}^2 + \varphi_{0j}^2) - \\
 &- \frac{c}{2} \sum_{i=1}^N (\varphi_{i1}^2 + \varphi_{im}^2) + c \sum_{j=1}^m (v_- (\varphi_{1j} - v_-) - v_+ (v_+ - \varphi_{mj})) \quad (I3) \\
 &- e (v_- m_- + v_+ m_+).
 \end{aligned}$$

К такому же виду преобразуем (I2). Из (7) следует

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m n_{ij} X_{ij} &= \sum_{i=1}^N \left\{ \left[\sum_{j=2}^{m-1} (4+\alpha) X_{ij}^2 - X_{ij} (X_{i-1j} + \right. \right. \\
 &+ X_{i+1j} + X_{ij-1} + X_{ij+1}) \left. \right] + (3+\alpha) X_{i1}^2 - X_{i1} (X_{i-11} + \\
 &+ X_{i+11} + X_{i2}) + (3+\alpha) X_{im}^2 - X_{im} (X_{i-1m} + X_{i+1m} + \\
 &+ X_{im-1}) \left. \right\} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (4+\alpha) X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (X_{ij} X_{i-1j} + \\
 &+ X_{ij} X_{i+1j}) - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m-1} X_{ij} X_{ij+1} - \sum_{i=1}^N (X_{i1}^2 + X_{im}^2) =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (4+\alpha) X_{ij}^2 - 2 \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^m X_{ij} X_{i-1j} + \\
 &+ \sum_{j=1}^m (X_{N+1j} X_{Nj} + X_{0j} X_{1j}) - 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m-1} X_{ij} X_{ij+1} - \\
 &- \sum_{i=1}^N (X_{i1}^2 + X_{im}^2).
 \end{aligned}$$

После подстановки в (I2) имеем

$$\begin{aligned}
 F &= \frac{e^2}{c} \left\{ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m (4+\alpha) X_{ij}^2 - \sum_{i=1}^{N+1} \sum_{j=1}^m X_{ij} X_{i-1j} - \right. \\
 &- \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{m-1} X_{ij} X_{ij+1} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (X_{i1}^2 + X_{im}^2) + \\
 &+ \sum_{j=1}^m \left[v_- X_{1j} + v_+ X_{mj} - \frac{1}{2} (v_-^2 + v_+^2) \right] - \\
 &\left. - v_- m_- - v_+ m_+ \right\}.
 \end{aligned}$$

Для установления полного тождества с (I3) достаточно сделать обратную замену $X_{ij} = \frac{c}{e} \varphi_{ij}$, $v_- = \frac{c}{e} v_-$, $v_+ = \frac{c}{e} v_+$. Формула (I2) доказана. Используя (II), (I2), проверим справедливость (2), (3). Пусть электрон протуннелировал из (i_0, j_0) в (i_0+1, j_0) . Проверка (2) эквивалентна проверке

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^m (v^- \Delta X_{1j} + v^+ \Delta X_{mj}) = X_{i_0+1, j_0} - X_{i_0, j_0}. \quad (I4)$$

Здесь и далее n_{ij} — распределение электронов в узлах системы до туннелирования, $\Delta X_{ij} = X_{ij} - X_{ij}$. Из (II) после ряда элементарных преобразований получаем

$$\Delta X_{ij} = -\frac{1}{m} \frac{(x_1^{i_0-i+1} + x_1^{2N-i_0-i+2})(1-x_1^{2i})}{(1+x_1)(1-x_1^{2N+2})} -$$

$$-\frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \frac{(x_k^{i_0-i+1} + x_k^{2N-i_0-i+2})(1-x_k^{2i})}{(1+x_k)(1-x_k^{2N+2})},$$

$$\Delta X_{ij} = \frac{1}{m} \frac{(x_1^{i_0+i+1} + x_1^{i-i_0})(1-x_1^{2N+2-2i})}{(1+x_1)(1-x_1^{2N+2})} +$$

$$+\frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \frac{(x_k^{i_0+i+1} + x_k^{i-i_0})(1-x_k^{2N+2-2i})}{(1+x_k)(1-x_k^{2N+2})},$$

$$X_{i_0+1, j_0} - X_{i_0, j_0} = -\frac{1}{m} \frac{x_1}{1+x_1} \sum_{j=1}^{i_0} \left\{ \sum_{f=1}^{i_0-j} x_1^{i_0-f} n_{fj} - \right.$$

$$\left. - \sum_{f=i_0+1}^N x_1^{f-i_0-1} n_{fs} - \frac{1}{1-x_1^{2N+2}} \left[x_1^{N+i_0+1} \sum_{f=1}^N (x_1^{f-N-1} - x_1^{N+1-f}) n_{fs} - \right. \right.$$

$$\left. - x_1^{2N+2-i_0-1} \sum_{f=1}^N (x_1^{-f} - x_1^f) n_{fs} \right\} -$$

$$-\frac{1-x_1}{1-x_1^{2N+2}} \left[v^- (x_1^{i_0} + x_1^{2N+1-i_0}) - v^+ (x_1^{N-i_0} + x_1^{N+1+i_0}) \right] -$$

$$-\frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \left(\cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \right) \frac{x_k}{1+x_k} \sum_{s=1}^m \cos(s-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \cdot$$

$$\cdot \left\{ \sum_{f=1}^{i_0} x_k^{i_0-f} n_{fs} - \sum_{f=i_0+1}^N x_k^{f-i_0-1} n_{fs} - \frac{1}{1-x_k^{2N+2}} \left[x_k^{N+i_0+1} \cdot \right. \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{f=1}^N (x_k^{f-N-1} - x_k^{N+1-f}) n_{fs} - x_k^{2N+2-i_0-1} \sum_{f=1}^N (x_k^{-f} - x_k^f) n_{fs} \right\} \Bigg\}.$$

Остается сравнить коэффициенты при n_{ij} , v^- и v^+ в левой и правой частях (I4). Заметим, что при $2 \leq k \leq m$

$$\sum_{j=1}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} = 0.$$

Если электрон туннелировал из (i_0+1, j_0) в (i_0, j_0) , то проверка (2) сводится к проверке

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^m (v^- \Delta X_{1j} + v^+ \Delta X_{mj}) = X_{i_0, j_0} - X_{i_0+1, j_0}.$$

По сравнению с (I4) сменился знак в правой части. Но сменилось направление движения — новые ΔX_{ij} отличаются от старых ΔX_{ij} знаком. Если электрон туннелирует из (i_0, j_0) в (i_0, j_0+1) , то проверка (3) эквивалентна проверке

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m n_{ij} \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^m (v^- \Delta X_{1j} + v^+ \Delta X_{mj}) = X_{i_0, j_0+1} - X_{i_0, j_0}. \quad (I5)$$

В этом случае

$$\Delta X_{ij} = \frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \left[\cos(j_0+\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} - \right.$$

$$\left. - \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \right] \frac{x_k^{1-i+i_0} (1-x_k^{2N-2i_0+2})(1-x_k^{2i})}{(1-x_k)(1-x_k^{2N+2})},$$

$$\Delta X_{ij} = \frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \left[\cos(j_0+\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} - \right. \\ \left. - \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \right] \frac{x_k^{i-i_0+1} (1-x_k^{2N+2}) (1-x_k^{2i_0})}{(1-x_k^2)(1-x_k^{2N+2})},$$

$$X_{i_0 j_0+1} - X_{i_0 j_0} = \frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \left(\cos(j_0+\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} - \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \right) \cdot \\ \cdot \frac{x_k}{1-x_k^2} \sum_{s=1}^m \left(\cos(s-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \left[\sum_{f=1}^N x_k^{i_0-f} n_{fs} - \frac{1}{1-x_k^{2N+2}} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(x_k^{N+1+i_0} \sum_{f=1}^N (x_k^{f-N-1} - x_k^{N+1-f}) n_{fs} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + x_k^{2N+2-i_0} \sum_{f=1}^N (x_k^{-f} - x_k^f) n_{fs} \right) \right] \right).$$

При переходе электрона из (i_0, j_0+1) в (i_0, j_0) обе части (I5) просто меняют знак. Если электрон протуннелировал в систему через крайний левый переход, то проверка

$$F - F' = e \left(v^- - \frac{1}{2} (\varphi_{N j_0} + \varphi'_{N j_0}) \right)$$

сводится к проверке соотношения

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^m n_{ij} \Delta X_{ij} + \sum_{j=1}^m (v^- \Delta X_{1j} + v^+ \Delta X_{Nj}) = X_{1j_0}. \quad (I6)$$

Из (II) следует, что в рассматриваемом случае

$$\Delta X_{ij} = \frac{1}{m} \frac{x_1^i - x_1^{2N+2-i}}{1-x_1^{2N+2}} + \frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \cdot \\ \cdot \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \frac{(x_k^i - x_k^{2N+2-i})}{1-x_k^{2N+2}},$$

$$\sum_{j=1}^m \Delta X_{1j} = \frac{x_1(1-x_1^{2N})}{1-x_1^{2N+2}}, \quad \sum_{j=1}^m \Delta X_{Nj} = \frac{x_1(x_1^{N-1} - x_1^{N+1})}{1-x_1^{2N+2}}.$$

Остается сравнить левую часть (I6) с X_{1j_0} (с формулой (II) при $i=1, j=j_0$).

Если электрон протуннелировал в систему через крайний правый переход, то справедливость

$$F - F' = e \left(v^+ - \frac{1}{2} (\varphi_{N j_0} + \varphi'_{N j_0}) \right)$$

доказывается аналогично предыдущему.

4. Одноэлектронные солитоны

В протяженной ($N \gg 1$) двумерной структуре существуют уединенные решения

$$X_{ij} = \frac{1}{m} \frac{x_1}{1-x_1^2} x_1^{|i-i_0|} + \frac{2}{m} \sum_{k=2}^m \cos(j-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \cdot \\ \cdot \cos(j_0-\frac{1}{2}) \frac{(k-1)\pi}{m} \frac{x_k}{1-x_k^2} x_k^{|i-i_0|} + O(x_1^{N/4}).$$

Такое решение получается из (I2) при условии, что в туннельной структуре есть один электрон, расположенный в узле (i_0, j_0) и $|i_0 - \frac{N}{2}| < \frac{N}{4}$. На рис. 2,3 представлено распределение потенциалов в системе при $N=m=25$, $\frac{C_0}{e} = 0.1$ и $(i_0, j_0) = (13, 13)$, $(13, 25)$ соответственно.

Из (II), (I2) следует, что при $v_{\pm} = v_{\pm}^0 = 0$ энергия одно-

электронного солитона равна

$$E = \frac{e^2}{2cm} \left\{ \frac{x_1(1-x_1^{2i_0})(1-x_1^{2N+2-2i_0})}{(1-x_1^2)(1-x_1^{2N+2})} + \right. \\ \left. + 2 \sum_{e=2}^m \frac{x_e(1-x_e^{2i_0})(1-x_e^{2N+2-2i_0})}{(1-x_e^2)(1-x_e^{2N+2})} \cos^2(j_0-\frac{1}{2}) \frac{\pi(e-1)}{m} \right\}.$$

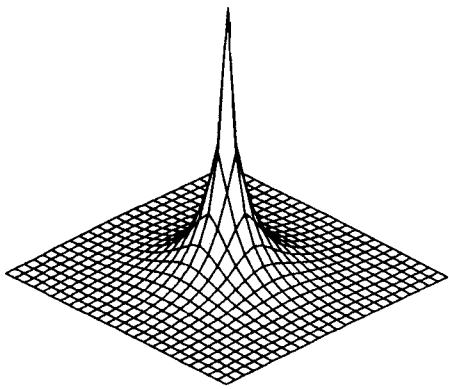


Рис. 2

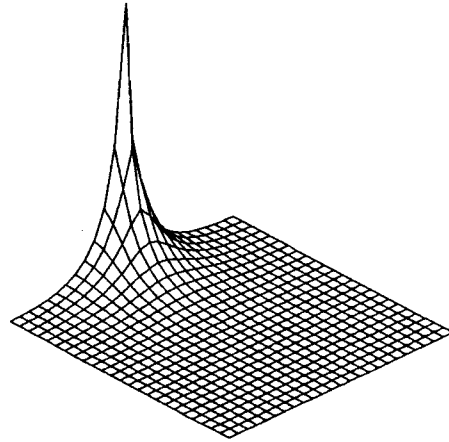


Рис. 3

В частности, при $N = m = 2k + 1$, $i_0 = j_0 = k + 1$,

$$E = \frac{e^2}{2cm} \left\{ \frac{x_1(1-x_1^{N+1})}{(1-x_1^2)(1+x_1^{N+1})} + 2 \sum_{j=1}^k \frac{x_{2j+1}(1-x_{2j+1}^{N+1})}{(1-x_{2j+1}^2)(1+x_{2j+1}^{N+1})} \right\} <$$

$$< \frac{e^2 x_1}{2c(1-x_1^2)} = \frac{e^2}{4c \sqrt{d+(d^2/4)}} \quad (\approx E \text{ при } m=1).$$

Заметим, что $x_e^{-1} - x_e = 2 \sqrt{d_e + d_e^2/4}$ увеличиваются с ростом ℓ , $d_e = d + 4 \sin^2 \frac{(\ell-1)\pi}{2m}$, $\ell = 1, \dots, m$.

5. Стационарные состояния

Если $v_+ = v_- = v$, то, начиная с некоторого порогового значения v_+ , в туннельную структуру начинают поступать электроны, которые дрейфуют вглубь цепочки. Цепочки солитонов встречаются в центре структуры и в ней устанавливается некоторое стационарное распределение. Если $T \rightarrow 0$, то $\exp(W/2kT) \rightarrow 0$ при $W = F - F' < 0$. Используя (II), находим

$$v_+ = \frac{e}{c} \left\{ \frac{x_1(1+x_1^N)}{2m(1-x_1)(1-x_1^{N+1})} \right\} + \quad (17)$$

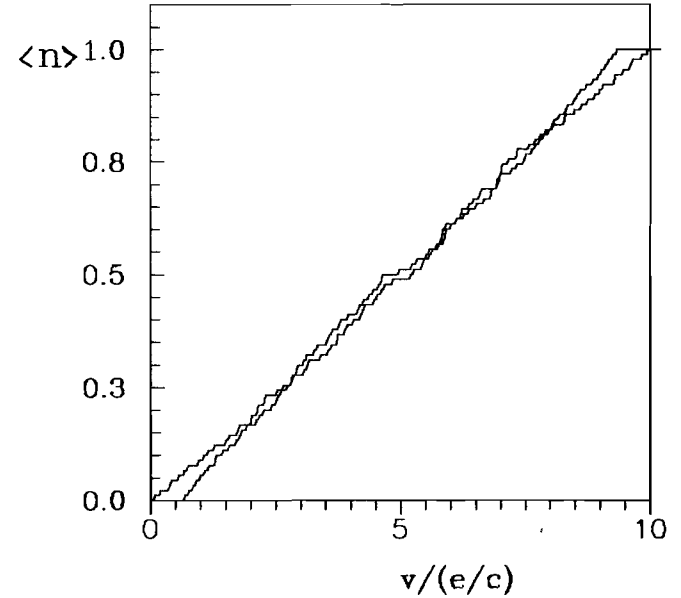


Рис. 4

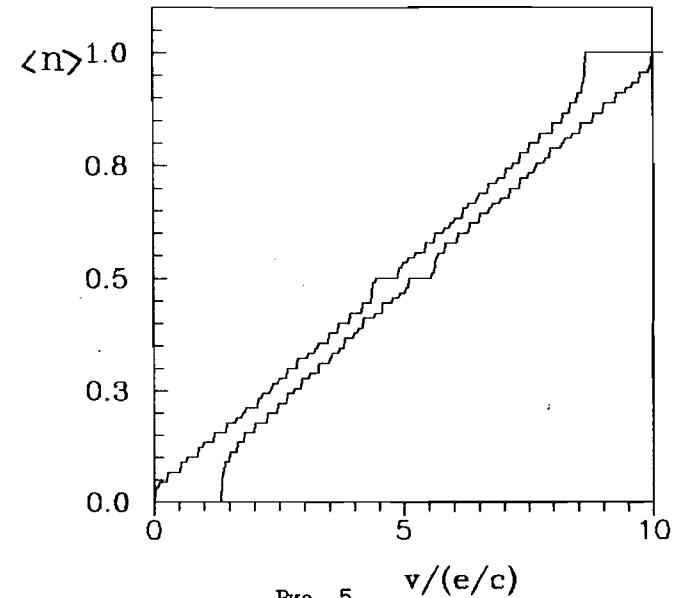


Рис. 5
17

$$+ \min_{1 \leq k \leq m} \frac{1}{m} \sum_{j=2}^m \left(\cos^2 \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{(j-1)\pi}{m} \right) \frac{x_3 (1-x_3^{2N}) (1+x_1^{N+1})}{(1-x_1)(1-x_1^N)(1-x_3^{2N+2})}.$$

Минимум достигается, когда $k = \left[\frac{m+1}{2} \right]$. То есть электрону легче всего протуннелировать в центральную цепочку, безразлично слева или справа. Заметим, что $V_t < \frac{e}{c} \frac{x_1(1+x_1^N)}{2(1-x_1)(1-x_1^{N+1})}$, $N \geq 4$. Справа стоит пороговое значение для одномерного случая, $m = 1$. Полученное аналитическое значение V_t хорошо согласуется с расчетным. На рис. 4 приведены графики зависимости удельной плотности солитонов от внешнего поля. Нижняя часть петли гистерезиса отвечает прямому ходу (от меньших значений V к большим). При этом в качестве начального состояния используются n_{ij} , отвечающие предыдущей ступени. Верхняя часть графика отвечает обратному ходу. Расчеты проводились для $N = 9$, $m = 10$, $L = 0, 1$, $T = 0$. При $V = 0,68 e/c$ в системе нет электронов. При $V = 0,7 e/c$ есть один электрон. Пороговое значение напряжения, сосчитанное по формуле (17) равно $V_t \approx 0,6829 e/c$. Для сравнения на рис. 5 приведены графики зависимости удельной плотности солитонов от внешнего поля в одномерном случае: $N = 90$, $m = 1$, $L = 0, 1$, $T = 0$. Видно, что ступени "чертовых лестниц" имеют различную ширину. В одномерном случае более ярко выражена петля гистерезиса.

Приносим благодарность И.С.Бахвалову и К.К.Лихареву за полезные обсуждения.

Литература

1. И.С.Бахвалов, Г.С.Казача, К.К.Лихарев, С.И.Сердюкова - Одно-электронные солитоны в одномерных туннельных структурах. ЖЭТФ, т. 95, вып. 3, март 1989, стр. 1010-1021.
2. К.К.Лихарев - Correlated discrete transfer of single electrons in ultrasmall tunnel junctions. IBM J. of Res. and Dev. vol.32, N 1, January 1988, pp. 144-158.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 октября 1989 года.

Получены явные формулы решения системы разностных уравнений, описывающих распределение потенциалов в узлах двумерной туннельной структуры. Доказано, что изменение свободной энергии при туннелировании равно изменению потенциалов в узлах, между которыми происходит обмен электронами. Аналитически найдены форма и свободная энергия одиночного солитона в двумерной туннельной структуре, а также пороговое значение внешнего поля, начиная с которого солитоны входят в структуру. Численно промоделированы статические состояния, вычислена зависимость удельной плотности солитонов от внешнего поля. Эта зависимость имеет вид "чертовой лестницы". Гистерезис в двумерном случае не так ярко выражен, как в одномерном.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Explicit formulas for the solution of a system of difference equations describing distribution of electric potential in the nodes of a two-dimensional tunnel-junction structure are obtained. It is proved that the change of free energy in tunneling is equal to the change of potentials in the nodes which exchange electrons. Shape and free energy of the single-electron soliton in the structure as well as the threshold value of the external field corresponding to injection of the solitons into the structure are found. Dependence of the specific density of the solitons on the external field at the static state of the system is calculated numerically. The dependence exhibits devil's staircase structure with a hysteresis which is not so strongly pronounced as in the one-dimensional case.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989