89-686

сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

Р11-89-686

Е.П.Каденцева, А.А.Шаненко, В.И.Юкалов

АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ КВАРК-АДРОННОЙ МАТЕРИИ

1989

Предложенная Ферми идея применения методов статистической физики для описания ядерных явлений переживает период бурного развития в последнее десятилетие. В частности, в релятивистской ядерной физике широкое распространение получили статистические модели, описывающие фазовый переход из адронов в кварк-глюонную плазму. Однако ни одна из них не учитывает сосуществование адронов и кварков, в то время как фазовый переход в гетерофазной системе может резко отличаться от фазового перехода в системе из чистых фаз.

В работе /1/ были сформулированы основные принципы теории кварк-адронной материи:

1. Кварк-адронная материя включает в себя все возможные фазовые состояния кварков: кварк-глюонную плазму и бесконечный набор фаз из n-кварковых кластеров (n = 3,6,9,12,15,...).

2. Учет реакции слияния и распада частиц позволяет рассматривать устойчивое сосуществование любых фаз кварков, в том числе адронов и свободных кварков.

3. Во всей исследуемой области значений термодинамических параметров системы применяется квантово-механический, микроскопический подход.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При определении концентраций мультикварковых кластеров кварк-адронной материи в области изменения значений термодинамических параметров $\Omega = \{\Theta, \rho;\ 0 < \Theta \le 1000,\ 0 < \rho/\rho_0 \le 100\}$ решаются две системы уравнений. Первая имеет вид

$$
\begin{cases}
\rho_q^{(1)}(\Theta,\rho) - \dfrac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_1^2} - \mu^{(1)} + B/\rho}{\Theta}\right) + \xi(1)} = 0\,, \\[3ex]
\rho_q^{(1)}(\Theta,\rho) + \displaystyle\sum_{n=3,6,9,12} n\frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^2dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_n^2} - n\mu^{(1)} + \frac{n}{9}\bar{\Phi}_{33}(0)(\rho-\rho_q^{(1)})}{\Theta}\right) + \xi(n)} + \\[3ex]
\qquad + 6\rho_{06}(\Theta,\rho) - \rho = 0\,, \\[2ex]
\mu^{(1)} = \dfrac{1}{6}M_6 + \dfrac{1}{9}\bar{\Phi}_{33}(0)\,(\rho - \rho_q^{(1)}(\Theta,\rho))\,.
\end{cases}
\qquad (1)
$$

Здесь неизвестными являются $\rho_q^{(1)}(\Theta, \rho)$ -функция плотности свободных кварков и $\rho_{06}(\Theta, \rho)$ -функция плотности шестикварков, находящихся в бозе-конденсате, зависящие от температуры Θ и кварковой плотности кварк-адронной материи ρ. Требуется найти значения $\rho_{06}(\Theta, \rho) \geq 0$ и определить множество $\bar{\Omega}_1 = \{\Theta, \rho;\ \rho_{06}(\Theta, \rho) \geq 0\}$.

Постоянные M_n, $\epsilon(n)$, $\xi(n)$, B, $\tilde{\Phi}_{33}(0)$ и нормальная плотность ρ_0 принимают следующие значения:

$M_1 = 7$ МэВ, $M_3 = 938$ МэВ, $M_6 = 1944$ МэВ, $M_9 = 3521$ МэВ,

$M_{12} = 4932$ МэВ;

$\epsilon(1) = 12,\ \epsilon(3) = 4,\ \epsilon(6) = 9,\ \epsilon(9) = 4,\ \epsilon(12) = 1;$

$\xi(n) = 1,\ n = 1, 3, 9;\ \xi(n) = -1,\ n = 6, 12;$

$\tilde{\Phi}_{33}(0) = 4{,}1 \cdot 10^{-5}\ 1/\text{МэВ}^2,\ B^{1/4} = 235$ МэВ, $\rho_0 = 4 \cdot 10^6\ \text{МэВ}^3$.

Вторая система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \rho_q^{(2)}(\Theta, \rho) - \dfrac{\epsilon(1)}{2\pi^2} \displaystyle\int_0^\infty \dfrac{x^2 dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + M_1^2} - \mu^{(2)} + B/\rho}{\Theta}\right) + \xi(1)} = 0, \\[2ex] \rho_q^{(2)}(\Theta, \rho) + \\ + \displaystyle\sum_{n=3,6,9,12} n \dfrac{\epsilon(n)}{2\pi^2} \int_0^\infty \dfrac{x^2 dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + M_n^2 - n\mu^{(2)}} + \frac{n}{9}\tilde{\Phi}_{33}^{(2)}(0)(\rho - \rho_q^{(2)})}{\Theta}\right) + \xi(n)} - \rho = 0, \\[2ex] \mu^{(2)} = \mu^{(2)}(\Theta, \rho). \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь неизвестными являются функции $\rho_q^{(2)}(\Theta, \rho)$ и $\mu^{(2)}(\Theta, \rho)$ — химический потенциал. Постоянные M_n, $\epsilon(n)$, $\xi(n)$, B, $\tilde{\Phi}_{33}(0)$, ρ_0 принимают те же значения, что и в (1). Требуется найти $\rho_q^{(2)}(\Theta, \rho)$, $\mu^{(2)}(\Theta, \rho)$ и определить область $\Omega_2 = \{\Theta, \rho\}$, в которой (2) имеет решение.

Сразу отметим, что если решения поставленных задач в Ω существуют, то области $\bar{\Omega}_1$ и Ω_2 не пересекаются и $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$. Справедливость этого утверждения будет установлена ниже при доказательстве существования и единственности решений задач (1), (2).

СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ (1), (2)

Введем обозначения:

$$\omega_1^{(\alpha)} = \sqrt{x^2 + M_1^2} - \mu^{(\alpha)} + \frac{B}{\rho}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$\omega_n^{(\alpha)} = \sqrt{x^2 + M_n^2} - n\mu^{(\alpha)} + \frac{n}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)(\rho - \rho_q^{(\alpha)}), \ n = 3, 6, 9, 12,$$

$$\mu^{(1)} = \frac{1}{6}M_6 + \frac{1}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)(\rho - \rho_q^{(1)}), \quad \mu^{(2)} = \mu^{(2)}(\Theta, \rho), \qquad (3)$$

$$\rho_n^{(\alpha)} = \frac{\epsilon(n)}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp\left(\dfrac{\omega_n^{(\alpha)}(x)}{\Theta}\right) + \xi(n)}, \ n = 1, 3, 6, 9, 12.$$

Докажем несколько вспомогательных утверждений.

Утверждение 1. Пусть $\Omega_1^* = \{\Theta, \rho, \rho_q^{(1)};\ \delta_\Theta \leq \Theta \leq \Theta_1,\ \delta_\rho \leq \rho/\rho_0 \leq \rho_1,\ \rho_q^{(1)} \geq 0\}$. Тогда несобственные интегралы $\rho_n^{(1)}$, определенные в (3), являются непрерывными функциями параметров $(\Theta, \rho, \rho_q^{(1)}) \in \Omega_1^*$. Интеграл $\rho_1^{(1)}$ можно дифференцировать по параметру $\rho_q^{(1)}$, причем

$$[\rho_1^{(1)}]'_{\rho_q^{(1)}} = \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2} \int_0^\infty [\quad]'_{\rho_q^{(1)}} dx.$$

Доказательство. Несобственные интегралы

$$\rho_n^{(1)} = \frac{\epsilon(n)}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2 + M_n^2} - \frac{n}{6}M_6}{\Theta}\right) + \xi(n)}, \ n = 3, 6, 9, 12,$$

$$\rho_1^{(1)} = \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_n^2}-\frac16 M_6-\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,(\rho-\rho_q^{(1)})+\frac{B}{\rho}}{\Theta}\right)+\xi(1)}$$

являются равномерно сходящимися относительно параметров $(\Theta,\ \rho,\ \rho_q^{(1)})\in\Omega_1^*$, так как для них можно построить мажорантные сходящиеся интегралы, не зависящие от параметров. Например:

$$\rho_1^{(1)} \le \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\Theta_1^3\exp\left(\frac{\frac16 M_6+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho_1+\frac{B}{\delta_\rho}}{\Theta_1}\right)\int_0^\infty x^2\exp(-x)\,dx,$$

$$\rho_n^{(1)} \le \frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_n^2}-\frac n6 M_6}{\Theta_1}\right)+\xi(n)},\quad n=3,6,9,12.$$

Аналогично строится мажоранта для

$$[\rho_1^{(1)}]'_{\rho_q^{(1)}} = \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\int_0^\infty[\quad]'_{\rho_q^{(1)}}\,dx.$$

Утверждение 1 доказано.

По определению /1/, подынтегральные выражения в (3) должны быть неотрицательными функциями. Поэтому $\omega_6^{(2)}(x)\ge 0$ и $\omega_{12}^{(2)}(x)\ge 0$, так как $\xi(6)=\xi(12)=-1$. Отсюда следует, что

$$\mu^{(2)}(\Theta,\rho)+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho_q^{(2)}(\Theta,\rho)\le\frac16 M_6+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho. \qquad (4)$$

Утверждение 2. Пусть $\Omega_2^*=\{\Theta,\rho,\rho_q^{(2)},\mu^{(2)};\ \delta_\Theta\le\Theta\le\Theta_2,\ \delta_\rho\le\rho/\rho_0\le\rho_2,$

$\mu^{(2)}+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho_q^{(2)}\le\frac16 M_6+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho\}$, $\bar\Omega_2^*=\{\Theta,\rho,\rho_q^{(2)},\mu^{(2)};\ \delta_\Theta\le\Theta\le\Theta_2,$

$\delta_\rho\le\rho/\rho_0\le\rho_2,\ \mu^{(2)}+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho_q^{(2)}\le\frac16 M_6+\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,\rho-\delta_2^*\}$.

Несобственные интегралы $\rho_n^{(2)}$, n = 1,3,6,9,12, являются непрерывными функциями параметров $(\Theta,\ \rho,\ \rho_q^{(2)},\ \mu^{(2)})\in\Omega_2^*$ и для любого фиксированного $\delta_2^*>0$ интегралы $\rho_n^{(2)}$ дифференцируемы по параметрам $(\Theta,\ \rho,\ \mu^{(2)},\ \rho_q^{(2)})\in\bar\Omega_2^*$, причем

$$[\rho_n^{(2)}]'_{\dots}=\frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty[\quad]'_{\dots}\,dx.$$

Доказательство. Для $\rho_n^{(2)}$ при $(\Theta,\rho,\mu^{(2)},\rho_q^{(2)})\in\Omega_2^*$ и для $\frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty[\quad]'_{\dots}\,dx$ при $(\Theta,\ \rho,\ \mu^{(2)},\ \rho_q^{(2)})\in\bar\Omega_2^*$ можно построить мажорантные сходящиеся интегралы, не зависящие от параметров, например:

$$\rho_3^{(2)}\le\frac{\epsilon(3)}{2\pi^2}\Theta_2^3\exp\left(\frac{\frac12 M_6}{\Theta_2}\right)\int_0^\infty\exp(-x)\,x^2\,dx,\quad \rho_6^{(2)}\le\frac{\epsilon(6)}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_6^2}-M_6}{\Theta_2}\right)-1}.$$

Аналогично строятся мажоранты для $\frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty[\quad]'_{\dots}\,dx$ при $(\Theta,\ \rho,\ \mu^{(2)},\ \rho_q^{(2)})\in\bar\Omega_2^*$. Утверждение 2 доказано.

Теорема 1. Система уравнений (1) имеет решения $\rho_{06}(\Theta,\rho)\ge 0$ при $(\Theta,\rho)\in\Omega=\{\Theta,\rho;\ \delta_\Theta\le\Theta\le 1000,\ \delta_\Theta<\rho/\rho_0\le 100\}$ для любых фиксированных $\delta_\Theta,\ \delta_\rho>0$.

Доказательство. Запишем (1) в виде

$$\rho_q^{(1)}=\frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_1^2}-\frac16 M_6-\frac19\tilde\Phi_{33}(0)\,(\rho-\rho_q^{(1)})}{\Theta}\right)+1}, \qquad (5а)$$

$$\rho_q^{(1)}+\sum_{n=3,6,9,12} n\,\frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty\frac{x^2\,dx}{\exp\left(\dfrac{\sqrt{x^2+M_n^2}-\frac n6 M_6}{\Theta}\right)+\xi(n)}+6\,\rho_{06}(\Theta,\rho)=\rho. \qquad (5б)$$

Уравнение (5а) имеет единственное непрерывное, возрастающее по Θ решение в области Ω.

На основании утверждения 1 $\rho_1^{(1)}$ — непрерывная функция своих параметров и в Ω

$$\frac{\partial}{\partial \rho_q^{(1)}} (\rho_q^{(1)} - \rho_1^{(1)}) = 1 - (\rho_1^{(1)})_{\rho_q^{(1)}} \neq 0 .$$

Тогда по теореме о неявной функции /2/, если существует набор параметров $\Theta^*, \rho^*, \rho_q^{(1)*}$, такой, что выполняется (5а), то в окрестности точек Θ^*, ρ^* существует единственная функция $\rho_q^{(1)}(\Theta, \rho)$, такая, что $\rho_q^{(1)}(\Theta^*, \rho^*) = \rho_q^{(1)*}$, и везде в этой окрестности выполняется (5а). Докажем, что для любых $(\Theta, \rho) \in \Omega$ всегда можно найти $\rho_q^{(1)}$ так, что (5а) будет верно. Фиксируем некоторые значения $\Theta^* > 0$, $\rho^* > 0$. Левая часть (5а) является непрерывной возрастающей функцией $\rho_q^{(1)}$ $(y = \rho_q^{(1)})$, а правая часть (5а) — непрерывной убывающей функцией $\rho_q^{(1)}$ $(y = \rho_1^{(1)}(\rho_q^{(1)}))$, причем $\rho_1^{(1)}(0) = C_\rho > 0$, где C_ρ — некоторая постоянная, а $\rho_1^{(1)}(\infty) = 0$. Поэтому существует единственная точка пересечения непрерывных кривых $y = \rho_q^{(1)}$ и $y = \rho_1^{(1)}(\rho_q^{(1)})$. Таким образом, все условия теоремы о неявной функции выполнены, то есть везде в Ω существует непрерывная по (Θ, ρ) единственная функция $\rho_q^{(1)}(\Theta, \rho)$, удовлетворяющая (5а). Функция $\rho_q^{(1)}(\Theta, \rho)$ возрастает по Θ. Предположим обратное. Пусть существуют $\Theta_1 > \Theta_2$, но $\rho_q^{(1)}(\Theta_1) \leq \rho_q^{(1)}(\Theta_2)$. Тогда $\omega_1^{(1)}(x, \Theta_1) < \omega_1^{(1)}(x, \Theta_2)$ и $\rho_1^{(1)}(\Theta_1) > \rho_1^{(1)}(\Theta_2)$, что противоречит исходному предположению $\rho_1^{(1)}(\Theta_1) = \rho_q^{(1)}(\Theta_1) \leq \rho_q^{(1)}(\Theta_2) = \rho_1^{(1)}(\Theta_2)$. Итак, везде в Ω уравнение (5а) имеет единственное непрерывное, возрастающее по Θ решение $\rho_q^{(1)}(\Theta, \rho)$.

Рассмотрим уравнение (5б). Интегралы $\rho_n^{(1)}$ $(n = 3,6,9,12)$ в (5б) являются непрерывными функциями $(\Theta, \rho) \in \Omega$, на основании утверждения 1, и возрастают по Θ. Поэтому при каждом фиксированном ρ из Ω функция

$$\rho_{06}(\Theta, \rho) = \rho - \sum_{n=1,3,6,9,12} n \rho_n^{(1)}$$

является непрерывной и убывает по Θ. Если при $\Theta \to 0+$ и некотором $\rho = \rho^* > 0$ уравнения (5) будут иметь решения $\rho_{06}(0+, \rho^*) > 0$, то для ρ^* будет существовать $\Theta^* > 0$, при котором $\rho_{06}(\Theta^*, \rho^*) = 0$. Используя известные методы /3/, можно убедиться, что при $\Theta \to 0+$ уравнения (5) переходят в

$$\rho_q^{(1)} = \frac{1}{3} \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2} [(\frac{1}{6} M_6 + \frac{1}{9} \tilde{\Phi}_{33}(0)(\rho - \rho_q^{(1)}) - \frac{B}{\rho})^2 - M_1^2]^{3/2},$$

$$\rho_q^{(1)} + \frac{1}{3} \frac{\epsilon(3)}{2\pi^2} [(\frac{1}{2} M_6)^2 - M_3^2]^{3/2} + 6\rho_{06}(0+, \rho) = \rho .$$

Анализ этих уравнений, при заданных значениях постоянных M_n, $\epsilon(n)$, $\xi(n)$, $n = 1,2,6$, B, $\tilde{\Phi}_{33}(0)$, ρ_0 и $0 < \rho/\rho_0 \leq 100$, показывает, что при плотностях $\rho^* = \rho/\rho_0 \geq 1$ существуют $\rho_{06}(0+, \rho^*) > 0$. Учитывая непрерывность функции $\rho_{06}(\Theta, \rho)$ и ее убывание по Θ, получаем: для любого $\rho^* = \rho/\rho_0 \geq 1$ существует $\Theta^* \in (0,1000)$, такое, что $\rho_{06}(\Theta^*, \rho^*) = 0$. Множество $\{\Theta^*, \rho^*\}$ дает границу области $\Omega_1 = \{\Theta, \rho; \rho_{06}(\Theta, \rho) > 0\}$. Теорема доказана.

Отметим, что на границе $\partial\Omega_1 = \{\Theta^*, \rho^*; \rho_{06}(\Theta^*, \rho^*) = 0\}$ выполняются уравнения (2) с

$$\mu^{(2)} = \frac{1}{6} M_6 + \frac{1}{9} \tilde{\Phi}_{33}(0)(\rho - \rho_q^{(2)}(\Theta^*, \rho^*)) = \mu^{(1)} .$$

Пусть $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$, тогда $\rho_{06}(\Theta, \rho) < 0$ для $(\Theta, \rho) \in \Omega_2$. Покажем, что для любых значений Θ и ρ из Ω_2 выполняется неравенство (4), если задача (2) имеет решение. Функция

$$\mu^* = \mu^{(2)}(\Theta, \rho) + \frac{1}{9} \tilde{\Phi}_{33}(0) \rho_q^{(2)}(\Theta, \rho)$$

убывает по Θ. Поэтому для $(\Theta^*, \rho^*) \in \partial\Omega_1$ и любого $\Theta_1 > \Theta^*$ (тогда $\rho_{06}(\Theta_1, \rho^*) < 0$ и $(\Theta_1, \rho^*) \in \Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$)

$$\mu^*(\Theta_1, \rho^*) < \mu^*(\Theta^*, \rho^*) = \frac{1}{6} M_6 + \frac{1}{9} \tilde{\Phi}_{33}(0) \rho^* .$$

Для $\Theta_1 < \Theta^*$ уравнения (2) не имеют смысла. Таким образом, вся область изменения значения термодинамических параметров $\Omega = \{\Theta, \rho\}$ разбивается на две непересекающиеся части: $\bar{\Omega}_1$ и Ω_2, $\Omega = \bar{\Omega}_1 \cup \Omega_2$. В $\bar{\Omega}_1$ существует решение задачи (1). Докажем, что решение задачи (2) существует в области Ω_2.

Теорема 2. Решение задачи (2) существует и единственно везде в области

$$\bar{\Omega}_2^* = \{\Theta,\ \rho,\ \rho_q^{(2)},\ \mu^{(2)};\ \ \delta_\Theta \le \Theta \le \Theta_2,\ \delta_\rho \le \rho/\rho_0 \le \rho_2,$$

$$\mu^{(2)} + \frac{1}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)\,\rho_q^{(2)} \le \frac{1}{6}M_6 + \frac{1}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)\,\rho - \delta_2^*\},$$

$$\delta_\Theta,\ \delta_\rho,\ \delta_2^* > 0.$$

Доказательство. Для доказательства существования и единственности решения (2) используем теорему о неявных функциях [2].

Предположим, что существует набор точек $\{\Theta^{(0)},\ \rho^{(0)},\ \mu^{(0)},\ \rho^{(0)}\}$ из $\bar{\Omega}_2^*$, для которого выполняется (2). Тогда для того, чтобы при всех Θ, ρ, достаточно близких к $\Theta^{(0)}$, $\rho^{(0)}$, существовало непрерывное решение $\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}$ (причем $\mu^{(2)}(\Theta^{(0)}, \rho^{(0)}) = \mu^{(0)}$, $\rho_q^{(2)}(\Theta^{(0)}, \rho^{(0)}) = \rho_q^{(0)}$), функциональный определитель

$$D = \frac{D(F_1, F_2)}{D(\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)})} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \mu^{(2)}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_q^{(2)}} \\[2ex] \dfrac{\partial F_2}{\partial \mu^{(2)}} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \rho_q^{(2)}} \end{vmatrix} \ne 0$$

в окрестности указанных значений переменных. Функции $F_1 = F_1(\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)})$, $F_2 = F_2(\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)})$ определяются для задачи (2) следующим образом:

$$F_1(\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}) = \rho_q^{(2)} - \rho_1^{(2)},\quad F_2(\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}) = \rho_q^{(2)} + \sum_{n=3,6,9,12} n\,\rho_n^{(2)} - \rho. \quad (6)$$

Используя утверждение 2, для $(\Theta, \rho, \mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}) \in \bar{\Omega}_2^*$ получаем

$$D = \sum_{n=3,6,9,12} \frac{1}{\Theta} n^2 I_n + \Big(1 + \sum_{n=3,6,9,12} \frac{1}{\Theta}\,\frac{n^2}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0) I_n\Big)\cdot \frac{1}{\Theta} I_1 \ge \delta_D > 0. \quad (7)$$

Здесь

$$I_n = \frac{\epsilon(n)}{2\pi^2}\int_0^\infty \frac{x^2 \exp\Big(\dfrac{\omega_n^{(2)}(x)}{\Theta}\Big)}{\Big[\exp\Big(\dfrac{\omega_n^{(2)}(x)}{\Theta}\Big) + \xi(n)\Big]^2}\,dx \ge 0,\qquad \sum_{n=1,3,6,9,12} I_n \ne 0.$$

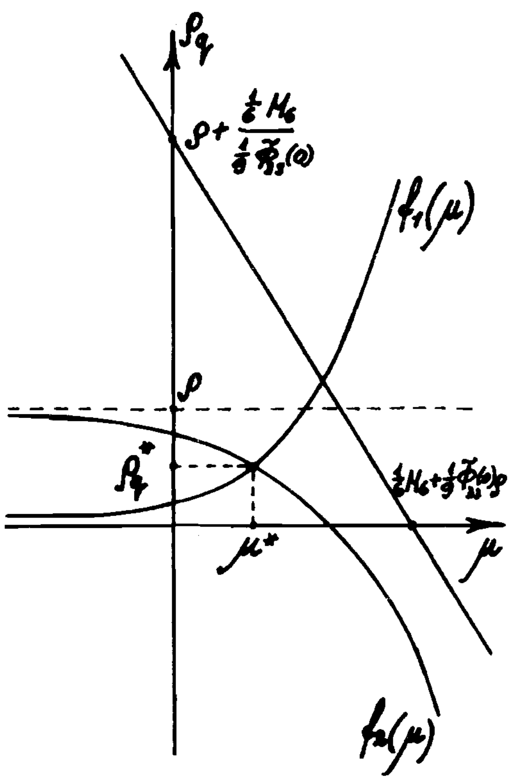

Рис. 1

Остается показать, что для любого набора точек $(\Theta^*, \rho^*) \in \bar{\Omega}_2^*$ существуют $(\mu^*, \rho_q^*) \in \bar{\Omega}_2^*$ такие, что выполняются (2).

Фиксируем $(\Theta^*, \rho^*) \in \bar{\Omega}_2^*$. Рассмотрим функцию $\rho_q^{(2)}$ как функцию одной переменной $\mu^{(2)}$. Из утверждения 2 следует, что все несобственные интегралы $\rho_n^{(2)}$ ($n = 1,2,6,9,12$) являются непрерывными функциями своих параметров в $\bar{\Omega}_2^*$. Первое уравнение (2) определяет $\rho_q^{(2)} = f_1(\mu^{(2)})$ как непрерывную возрастающую функцию параметра $\mu^{(2)}$, причем $\rho_q^{(2)}(-\infty) = 0$, $\rho_q^{(2)}(+\infty) = +\infty$. Второе уравнение (2) определяет $\rho_q^{(2)} = f_2(\mu^{(2)})$ как непрерывную убывающую функцию от $\mu^{(2)}$, причем

$$\rho_q^{(2)}(-\infty) = \rho,\quad \rho_q^{(2)}(+\infty) = -\infty$$

и

$$\mu^{(2)} < \frac{1}{6}M_6 + \frac{1}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)(\rho - \rho^{(2)}).$$

Непрерывные кривые $f_1(\mu^{(2)})$ и $f_2(\mu^{(2)})$ всегда имеют единственную точку пересечения $\mu^{(*)}$, $\rho_q^{(*)}$, такую, что набор $(\Theta^{(*)}, \rho^{(*)}, \mu^{(*)}, \rho_q^{(*)}) \in \bar{\Omega}_2^*$ и выполняется (2). Графики функций $f_1(\mu^{(2)})$, $f_2(\mu^{(2)})$ приведены на рис. 1. Теорема доказана.

ЧИСЛЕННЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ МУЛЬТИКВАРКОВЫХ КЛАСТЕРОВ В ЯДЕРНОЙ МАТЕРИИ

При численном решении задач (1), (2) использовался модифицированный метод Ньютона [4,5]:

$$U^{(k+1)} = U^{(k)} - \tau[F'(U^{(k)})]^{-1} F(U^{(k)}). \quad (8)$$

Алгоритм позволяет определять решение системы уравнений $F(U) = 0$ с заданной точностью. $F'(U)$ обозначает матрицу Якоби отображения F, $[F'(U)]^{-1}$, обратную к ней, τ — некоторый параметр, с помощью которого можно управлять процессом сходимости.

Вначале решалась задача (1) и находилась область $\bar{\Omega}_1 = \{\Theta, \rho;\ \rho_{об}(\Theta, \rho) \geq 0\}$. Затем в области $\Omega_2 = \Omega \setminus \bar{\Omega}_1$ решалась задача (2) (области $\bar{\Omega}_1$ и Ω_2 представлены на рис. 2).

Основные трудности были связаны с вычислением решения $\mu^{(2)}$, $\rho_q^{(2)}$ задачи (2), поэтому остановимся на изложении алгоритма (8) для нее.

Пусть $F(U)$ — оператор, отображающий линейное нормированное пространство R^2 в R^2 с нормой

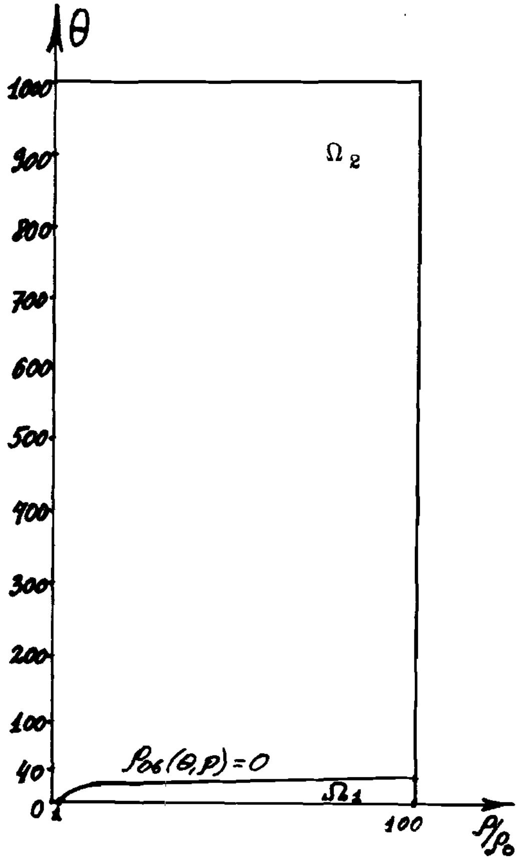

Рис. 2

$$\|U\| = \max_{i=1,2} |U_i|, \quad U = \{U_1, U_2\} \in R^2 .$$

Для (2) имеем

$$U = \{\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}\}, \quad F(U) = \{F_1, F_2\},$$

F_1, F_2 определены в (6).

Пусть $\Omega_a = \{U;\ \|U - U^*\| \leq a\}$. Известно [4,5], что метод Ньютона сходится к решению U^* задачи $F(U^*) = 0$, если выполнены условия

1) $\|[F'(U)]^{-1}\| \leq a_1, \quad U \in \Omega_a$;

2) $\|F(U_1) - F(U_2) - F'(U_2)(U_1 - U_2)\| \leq a_2 \|U_2 - U_1\|^2$

при U_1, $U_2 \in \Omega_a$, $0 < a$, $0 \leq a_1$, $a_2 < \infty$.

Из (7) следует, что нигде в $\bar{\Omega}_2^*$ определитель D матрицы $F'(U)$ не обращается в нуль. Компоненты вектора $F = \{F_1, F_2\}$ имеют непрерывные ограниченные первые и вторые производные в $\bar{\Omega}_2^*$. Поэтому для матрицы

$$[F'(U)]^{-1} = \frac{1}{D}\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_2}{\partial \rho_q^{(2)}} & -\dfrac{\partial F_1}{\partial \rho_q^{(2)}} \\ -\dfrac{\partial F_2}{\partial \mu^{(2)}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \mu^{(2)}} \end{pmatrix}$$

будет выполняться условие 1 и для отображения F — условие 2 при любых U, U_1, $U_2 \in \bar{\Omega}_2^*$.

Счет велся следующим образом. В области $\bar{\Omega}_2^*$ строилась прямоугольная сетка

$$\bar{\Omega}_2^{(h)} = \{\Theta_i, \rho_j;\ \ \Theta_i = (i-1)h_\Theta,\ \rho_j = (j-1)h_\rho,$$
$$i = 1, 2, \ldots, M;\quad j = 1, 2, \ldots, N\}$$

с шагами $h_\Theta = 1000/M$ и $h_\rho = 100/N$. В узлах $\{\Theta_i, \rho_j\}$ сетки $\bar{\Omega}_2^{(h)}$, попадающих внутрь и на границу обрасти Ω_1, решение (2) не вычислялось. Численные эксперименты показали, что функции $\mu^{(2)}$, $\rho_q^{(2)}$ слабо меняются в зависимости от температуры Θ. Поэтому при фиксированном Θ и $\rho/\rho_0 = h_\rho$ за начальное приближение для $\mu^{(2)}(\Theta, h_\rho)$, $\rho_q^{(2)}(\Theta, h_\rho)$ принимались

$$\mu^{(0)} = \mu^{(2)}(\Theta - h_\Theta, h_\rho), \quad \rho_q^{(0)} = \rho_q^{(2)}(\Theta - h_\Theta, h_\rho). \tag{9}$$

При $h_\rho < 1$ известны точные решения для $\Theta = 0$:

$$\rho_q^{(2)}(0, h_\rho) = 0,$$

$$\mu^{(2)}(0, h_\rho) = \frac{1}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)\rho_0 h_\rho + \frac{1}{3}[M_3^2 + (\frac{\epsilon(3)}{2\pi^2}\rho_0 h_\rho)^{2/3}]^{1/2} .$$

Последовательность вычисления решения $U^* = \{\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}\}$ в узлах $\{\Theta_i, \rho_j\}$ сетки $\bar{\Omega}_2^{(h)}$ заключалась в следующем. При фиксированном Θ_i и $\rho_j = h_\rho$ начальные приближения $\mu^{(0)}$, $\rho_q^{(0)}$ выбирались из (9). Итерации по формуле (8) проводились до тех пор, пока норма невязки $\psi = F(U)$ не становилась меньше заданной точности $\epsilon = 10^{-4}$:

$$\|\psi\| = \max_{1\le i\le 2} |F_i| \le \epsilon . \tag{10}$$

Далее значения $\mu^{(2)}$, $\rho_q^{(2)}$ вычислялись по формуле (8) в зависимости от плотности ρ/ρ_0. За начальное приближение для следующего шага по плотности $\rho_{j+1} = \rho_j + h_\rho$, $j = 2,3,\dots, N$, $\rho_N \le 100$ принимались

$$\mu^{(0)}(\Theta_i, \rho_{j+1}) = \mu^{(2)}(\Theta_i, \rho_j) + \frac{1}{18}\tilde{\Phi}_{33}(0)\rho_0 h_\rho, \rho_q^{(0)}(\Theta_i, \rho_{j+1}) = \rho_q^{(2)}(\Theta_i, \rho_j).$$

Затем вычислялись значения

$$\mu^{(2)}(\Theta_{i+1}, h_\rho), \quad \rho_q^{(2)}(\Theta_{i+1}, h_\rho) \quad \text{при} \quad \Theta_{i+1} = \Theta_i + h_\Theta .$$

Отметим, что вблизи границы $\rho_{06}(\Theta, \rho) = 0$ не удается использовать для $\mu^{(2)}$ начальное приближение

$$\mu^{(0)} = \frac{1}{6}M_6 + \frac{1}{9}\tilde{\Phi}_{33}(0)(\rho - \rho_q^{(2)}),$$

так как при этом значении перестает существовать $F'(U)$.

При вычислении решения $U = \{\mu^{(2)}, \rho_q^{(2)}\}$ вблизи $\rho_{06}(\Theta, \rho) = 0$ сходимость итерационного процесса (8) резко ухудшается и начинает зависеть от выбора значения параметра τ. Численные эксперименты показали, что τ необходимо выбирать из условия уменьшения нормы невязки

$$\|\Psi(U^{(k+1)})\| \le \|\Psi(U^{(k)})\|, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{11}$$

Условие (11) выполнялось при $1 \le \Theta \le 40$ и $\tau = 0{,}1$, $\Theta \ge 60$ и $\tau = 0{,}8$, $\Theta \ge 100$ и $\tau = 1$.

При расчетах по формуле (8) возникает вопрос о корректности вычисления несобственных интегралов $\rho_n^{(2)}$ $(n = 1,2,6,9,12)$, входящих в состав компонент вектора $F = \{F_1, F_2\}$, определенных в (6). Обрезание пределов интегрирования и погрешность выбранной квадратурной формулы согласовывались с условием (10).

Вычисление $\rho_n^{(2)}$ рассмотрим на примере

$$\rho_1^{(2)} = \rho_q^{(2)} = \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\int_0^\infty f(x)\,dx, \quad f(x) = x^2/(\exp(\frac{\omega_1^{(2)}(x)}{\Theta}) + 1). \tag{12}$$

Представим $\rho_q^{(2)}$ в виде

$$\rho_q^{(2)} = R_q + R_I,$$
$$R_q = \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\int_0^R f(x)\,dx, \quad R_I = \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\int_R^\infty f(x)\,dx. \tag{13}$$

Сделаем замену переменных $y = \frac{1}{\Theta}x$ и оценим R_I:

$$R_I \le \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\Theta^3 \int_{R/\Theta}^\infty \frac{y^2 dy}{\exp(\sqrt{y^2 + (\frac{M_1}{\Theta})^2})} \exp(\frac{\mu - \frac{B}{\rho}}{\Theta}) = R_I^* .$$

Пусть $z^2 = y^2 + (M_1/\Theta)^2$. Тогда

$$R_I^* \le \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\Theta^3 \exp(\frac{\mu - B/\rho}{\Theta}) \int_{\frac{1}{\Theta}\sqrt{R^2 + M_1^2}}^\infty z^2 \exp(-z)\,dz \le$$

$$\le \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\Theta^3 \exp(-\frac{\omega_1^{(2)}(R)}{\Theta})(z^2 + 2z + 2)\Big|_{z = \frac{1}{\Theta}\sqrt{R^2 + M_1^2}} .$$

Верхний предел интегрирования R выбирался из условия

$$R_I < \frac{\epsilon(1)}{2\pi^2}\Theta^3 \exp(-\frac{\omega_1^{(2)}(R)}{\Theta})(z^2 + 2z + 2)\Big|_{z = \frac{1}{\Theta}\sqrt{R^2 + M_1^2}} \le R_q \cdot \Delta, \Delta = 10^{-5}.$$

В значении R_q при $\Delta = 10^{-5}$ устанавливались первые четыре цифры. Для контроля вычислений проводились расчеты с $\Delta = 10^{-6}$, $\Delta = 10^{-7}$. При этом в значении R_q устанавливались пять цифр.

При счете R_q использовалась квадратурная формула Симпсона, точная для многочленов четвертого порядка. Функция $f(x)$ в (12) бесконечно дифференцируема по x. При $\omega_1^{(2)}(x) \le 0$ $f(x)$ ведет себя как x^2, а при $\omega_1^{(2)}(x) > 0$ — достаточно быстро спадает к нулю. Эти обстоятельства позволяют вычислять интеграл $\rho_q^{(2)}$ с "крупным" шагом $h = 0{,}5$, что существенно сокращает время машинного счета. Дополнительно были проведены расчеты с шагами интегрирования $h' = h/2$, $h'' = h/4$, показавшие корректность вычислений с шагом h. (В значении суммы, аппроксимирующей $\rho_q^{(2)}$, сохранялись первые четыре знака).

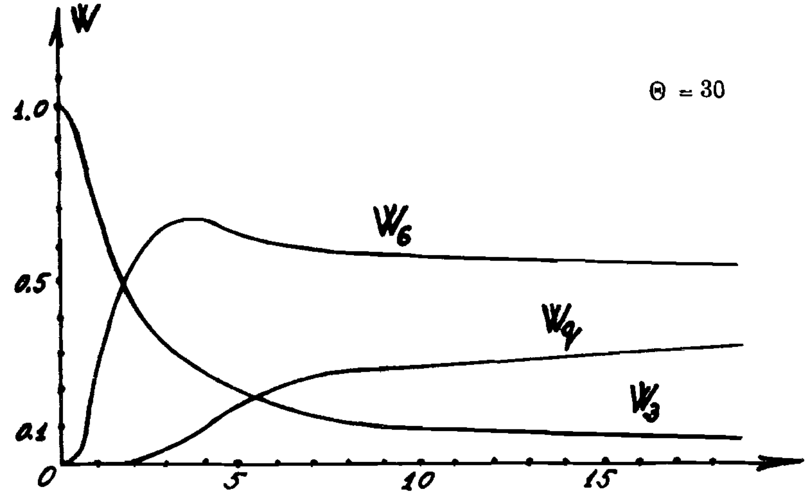

Рис. 3

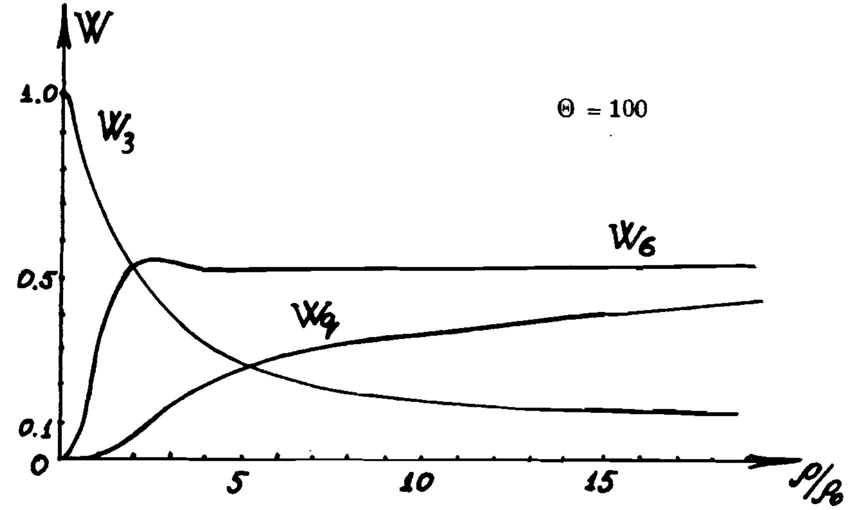

Рис. 4

Получены следующие результаты. При температуре $0 < \Theta \leq 1000$ МэВ, $0{,}1 \leq \rho/\rho_0 \leq 10$ (ρ_0 — плотность нормальной ядерной материи, $\rho_0 = 4 \cdot 10^6$ МэВ^3) из всего набора мультикварков ρ_n ($n = 3,6,9,12$) доминируют ρ_3-нуклоны и ρ_6-шестикварки. Причем концентрации $W_n = n\rho_n/\rho$

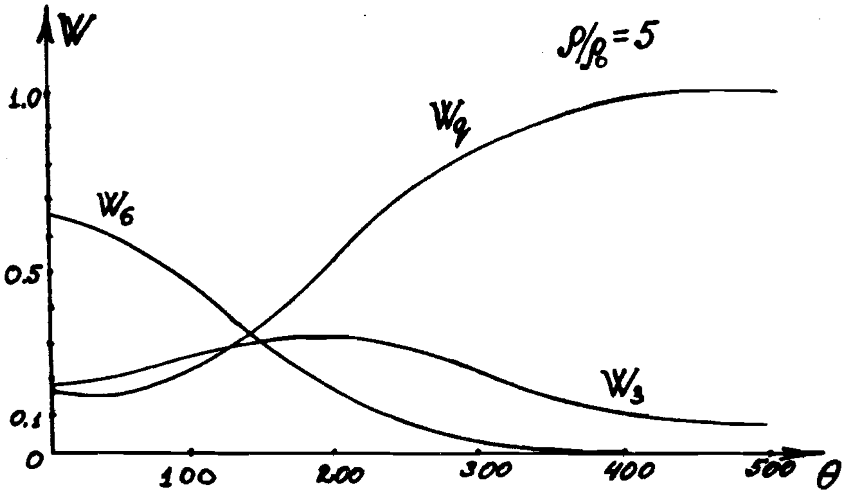

Рис. 5

остальных мультикварков исчезающе малы: $W_9 < 10^{-3}$, $W_{12} < 10^{-5}$. Кроме того, имеется обширная область сосуществования свободных кварков (кварк-глюонной плазмы ρ_q) с нуклонами и шестикварками. Графики, демонстрирующие зависимости $W_q(\Theta, \rho) = \rho_q/\rho$, $W_3(\Theta, \rho) = 3\rho_3/\rho$, $W_6(\Theta, \rho) = 6\rho_6/\rho$ от температуры и плотности, приведены на рис. 3,4,5.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шаненко А.А., Юкалов В.И. — В кн.: Релятивистская ядерная физика и квантовая хромодинамика. ОИЯИ, Д1,2-88-652, Дубна, 1988, с.445.
2. Смирнов В.И. — Курс высшей математики. М.: Наука, 1967, т.3.
3. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. — Статистическая физика. М.: Наука, 1978.
4. Бахвалов Н.С. — Численные методы. М.: Наука, 1973, т.1.
5. Ортега Дж., Рейнболдт В. — Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 сентября 1989 года.