сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна

P11-89-66

В.А.Калинников

БЫСТРОЕ АППАРАТУРНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ В ЦИФРОВЫХ УСТРОЙСТВАХ

1989

ВВЕДЕНИЕ

Аппаратурная реализация вычислений элементарных функций тесно связана, с одной стороны, с выбором метода и алгоритмов вычислений, а с другой стороны – с выбором способа структурной организации специализированного вычислителя. Можно выделить три основные группы вычислительных структур (ВС): регистровые, матричные и табличные[I,2].

Регистровые ВС базируются на схеме сумматора с памятью. В процессе выполнения операции осуществляются многократные пересылки информации между регистрами и производится анализ логических условий по содержимому регистров. Эта структура соответствует программному и микропрограммному способу реализации.

В основе матричных ВС лежит схема матричной сетки, являющейся предельным случаем регистровой структуры и служащей моделью вычислительного процесса для каждой отдельной операции. Матричные структуры наиболее полно отвечают требованиям однородности и регулярности, позволяют организовать конвеерный режим обработки входной информации, но требуют огромных затрат электронного оборудования. Однако по мере развития интегральной технологии и возможности размещения на одном кристале большой интегральной схемы (БИС) достаточно сложных устройств это ограничение будет неуклонно снижаться.

Типовым элементом табличных ВС является постоянно-запоминающее устройство (ПЗУ), содержащее вычисленные результаты некоторой операции из заданного набора. При этом в ПЗУ могут быть записаны результаты вычислений либо для всех наборов исходных данных (непосредственно-табличная реализация), либо только часть исходных наборов (таблично-алгоритмическая реализация). Непосредственно-табличные методы вычислений в случае больших разрядностей операндов требуют нереально больших объемов памяти ПЗУ. В этой связи практическая реализация непосредственно-табличных методов ограничивается малой разрядностью операндов.

В настоящее время наиболее распространенными методами являются таблично-алгоритмические и итерационные методы вычислений элементарных функций[I,3]. Итерационные методы, в основном, реализуются программными или микропрограммными средствами. Для аппаратурной реализации наиболее привлекательны таблично-алгоритмические методы, сочетающие в себе поиск аргумента по таблице с грубым значением и введением поправок на точное значение.

БЫСТРОЕ АППАРАТУРНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТНОГО КОРНЯ

Предлагаемый алгоритм вычисления относится к таблично-алгоритмическим методам и производит вычисление квадратного корня в соответствии с выражением

$$\sqrt{A} = D + W,$$

где D – грубое значение квадратного корня из числа A ; $W=(A-D^2)\cdot\Delta$ - поправка на точное значение, а $\Delta = \frac{1}{(D+1)^2 - D^2}$ – коэффициент кусочно-линейной аппроксимации. На первом этапе табличным методом с точностью до ближайшего целого числа вычисляется значение D (рис.I). Затем, заменяя квадратичную зависимость между двумя значениями D и $D+1$ линейной, вычисляем поправку на точное значение

$$W = (A - D^2)\frac{1}{(D+1)^2 - D^2}$$

Суммируя эту поправку с вычисленным D, получаем полное значение квадратного корня из числа A. Покажем это на примерах.

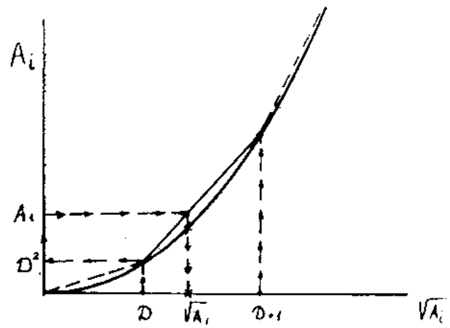

Рис.I. Вычисление квадратного корня из двоичного числа.

Пример I. Вычислим корень квадратный из числа A_1 = 35924. Грубая оценка числа $\sqrt{A_1}$ равна D_1 = I98. Коэффициент кусочно-линейной аппроксимации равен

$$\Delta_1 = \frac{1}{(D_1+1)^2 - D_1^2} = 0{,}0026385,$$ поправка на точное значение $W_1 = (A_1 - D_1^2)\cdot\Delta_1$ = 203· 0,0026385 = 0,53562.

Полное значение квадратного корня $\sqrt{A_1} = D_1 + W_1$ = I89,53562. Точное значение $\sqrt{A_1}$ = I89,53628, а погрешность вычисления составляет δ_1 = 0,000346%.

Пример 2. Вычислим квадратный корень из числа A_2 =I044444. Грубая оценка равна $\sqrt{A_2}$ = I02I. Вычисляем поправку на точное значение

$$W_2 = (\,1044444 - 1042441)\left(\frac{1}{104484 - 1042441}\right) = 0{,}9804209.$$

Полное значение квадратного корня из числа $\sqrt{A_2}$ = I02I,9804209.
Точное значение $\sqrt{A_2}$ = I02I,9804, а погрешность вычисления $\delta_2 \cong 0$.

Так как точность вычислений для данного алгоритма зависит от разрядности двоичных операндов, целесообразно для операндов, разрядность которых меньше числа адресных входов используемого типа ПЗУ, организовать непосредственно-табличную реализацию, а для операндов с большей разрядностью – таблично-алгоритмическую.

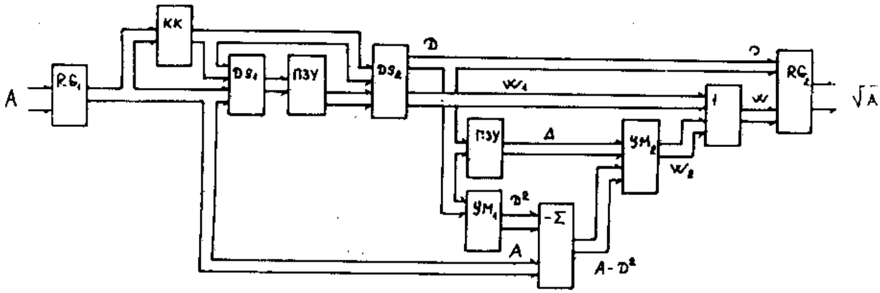

Рис.2. Функциональная схема устройства для вычисления квадратного корня из двоичных чисел большой разрядности.

На рис.2. представлена функциональная схема устройства для вычисления квадратного корня из двоичных чисел большой разрядности. Под управлением коммутатора KK и дешифратора DS_1 на вход $ПЗУ_I$ поступают k – старших разрядов числа A, где k – разрядность используемого типа ПЗУ. Это позволяет организовать табличный метод вычисления грубой оценки числа A, т.е. $D = \sqrt{A_k} \cdot \sqrt{2^{u-k}}$, где u – двоичная разрядность числа A; A_k – старшие k разрядов числа A. Например, грубая оценка корня квадратного из числа A = I044444 при использовании IO-разрядного ПЗУ вычисляется в следующем виде:

$$D = \sqrt{1019} \cdot \sqrt{2^{10}} = 31{,}921779 \cdot 2^5 = 1021.$$

В двоичном виде эта операция осуществляется следующим образом:

$$D = \sqrt{\mathrm{IIIIIIIOIIIIIIOIIOI}} = \sqrt{\mathrm{IIIIIIIIOII}} \cdot \sqrt{2^{\mathrm{IO}}} =$$

$$= \mathrm{IIIII{,}IIIOI} \cdot 2^5 = \mathrm{IIIIIIIIOI}.$$

Умножение на 2^5 равносильно сдвигу числа на пять разрядов влево. Эту операцию в устройстве выполняет дешифратор DS_2 (рис.2). Если разрядность числа A меньше чем k, то результат с дешифратора DS_2 в виде $D + W_1$ переписывается в выходной регистр RG_2. Поправка на точное значение в этом случае не вырабатывается. Если разрядность числа A больше k, то вычисленное значение D на умножителе $УМ_I$ возводится в квадрат, а на сумматоре-вычитателе Σ вычисляется разность $A - D^2$. Кроме того, по значению числа D, используемого как адрес, из $ПЗУ_2$ выбирается соответствующий коэффициент кусочно-линейной аппроксимации Δ. В $ПЗУ_2$ записана таблица значений Δ, в виде

адрес	D^2	значение Δ
32	I024	0,0I58735
33	I098	0,0I53846
34	II56	0,I49753I
⋮	⋮	⋮
256	65536	0,00I9569
257	66649	0,00I9493
⋮	⋮	⋮
65536	44307 $I0^9$	0,000076

Выбранное из $ПЗУ_2$ значение Δ и вычисленная разность $A - D^2$ поступают на умножитель $УМ_2$, где вычисляется поправка на точное значение W_2. Результат вычисления в виде $D + W_2$ записывается в выходной регистр RG_2.

Общее время вычисления для данного устройства можно выразить в следующем виде:

$$t_{реш} = \tau_{KK} + \tau_{DS_1} + 2\tau_{ПЗУ} + \tau_{DS_2} + 2\tau_{УМ} \simeq$$
$$\simeq 2(\tau_{ПЗУ} + \tau_{УМ}),$$

где $\tau_{KK}, \ldots\ldots, \tau_{УМ}$ – время выполнения операций в коммутаторе, дешифраторах, ПЗУ и умножителях. При реализации устройства на микросхемах КМ I802 ВР5 (умножители, $\tau_{УМ} \leq I20$ нс) и КР556 РТ5 (ПЗУ) общее время решения не превышает 350 нс., что вполне приемлемо для аппаратурного вычисления модулей коэффициентов Фурье в режиме скользящего спектрального измерения сигналов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Широкое применение специализированных процессоров характерно в настоящее время для самых разнообразных систем обработки информации, начиная от мультимикропроцессорных систем и включая высокопроизводительные многопроцессорные комплексы. Во всех таких случаях спецпроцессоры, будучи ориентированными на решение определенного класса задач, позволяют добиться максимальной производительности в рамках используемой элементно-технической базы.

В данной работе предлагается алгоритм и аппаратурная реализация быстрого вычисления квадратного корня из двоичных чисел большой разрядности, использование которого в цифровых системах обработки позволит значительно уменьшить время вычислений и объем затрат электронного оборудования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Байков В.Д.,Смолов В.Б. Специализированные процессоры: итерационные алгоритмы и структуры. М.: Радио и связь, 1985.
2. Опенгейм Э. Применение цифровой обработки сигналов. М.: Мир,1980.
3. Байков В.Д.,Селютин С.А. Вычисление элементарных функций в ЭКВМ. М.: Радио и связь, 1982.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 февраля 1989 года.