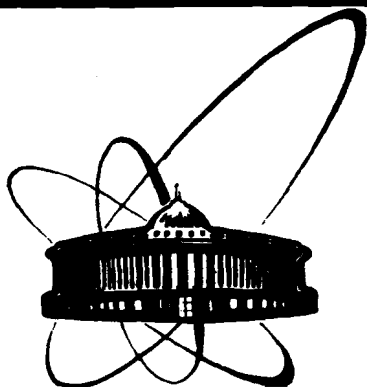


89-582



сообщения  
объединенного  
института  
ядерных  
исследований  
дубна

P11-89-582

Ж 696

И. Е. Жидкова

УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ  
БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ  
В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ  
(приложение)

1989

В настоящей работе приводятся усредненные уравнения бетатронных колебаний, получение которых описано в работе /1/.

I. Усредненные уравнения для случая, когда линейная часть исходных уравнений имеет постоянный коэффициент /т.е. когда выполнено соотношение /3.2/ работы /1/ /.

Введем дополнительные обозначения. В  $S_{kj}^{(\alpha, \beta, \delta)}$  верхний индекс означает, в каком приближении по степени  $\varepsilon$  ( $\varepsilon^1$ ,  $\varepsilon^2$  или  $\varepsilon^3$ ) входит данный коэффициент в уравнения.

Кроме того, нерезонансный вклад в каждую систему уравнений обозначим так:

$$FR_1 = S_{11}^{(1)} C_1 + S_{119}^{(2,3)} C_1^2 C_2 + S_{133}^{(2,3)} C_1 C_3 C_4 + S_{448}^{(3)} C_3^3 C_4 + \\ + S_{152}^{(3)} C_1 C_2 C_3^2 + S_{165}^{(3)} C_1^2 C_4^2,$$

$$FR_2 = S_{22}^{(1)} C_2 + S_{222}^{(2,3)} C_1 C_2^2 + S_{234}^{(2,3)} C_2 C_3 C_4 + S_{251}^{(3)} C_3 C_4^3 + \\ + S_{253}^{(3)} C_1 C_2 C_4^2 + S_{267}^{(3)} C_2^2 C_3^2,$$

$$FR_3 = S_{33}^{(1,2,3)} C_3 + S_{37}^{(3)} C_1 C_4 + S_{327}^{(2,3)} C_3^2 C_4 + S_{331}^{(2,3)} C_1 C_2 C_3 + \\ + S_{347}^{(3)} C_2 C_3^3 + S_{355}^{(3)} C_1 C_3 C_4^2 + S_{360}^{(3)} C_1^2 C_2 C_4,$$

$$FR_4 = S_{44}^{(1,2,3)} C_4 + S_{48}^{(3)} C_2 C_3 + S_{430}^{(2,3)} C_3 C_4^2 + S_{432}^{(2,3)} C_1 C_2 C_4 + \\ + S_{449}^{(3)} C_1 C_4^3 + S_{454}^{(3)} C_1 C_2^2 C_3 + S_{461}^{(3)} C_2 C_3^2 C_4.$$

Следует отметить, что  $S_{11}^{(1)}$  и  $S_{22}^{(1)}$  содержат как множитель коэффициент, соответствующий расстройке  $\Delta_x$ , а  $S_{33}^{(1)}$ ,  $S_{44}^{(1)}$  - множитель, соответствующий расстройке  $\Delta_z$ . Таким об-

резом, при дальнейшем исследовании уравнений остаются только те из этих членов, которые соответствуют введенной в исходные уравнения расстройке  $\Delta_x$  или  $\Delta_z$ . Кроме того, для резонансов вида  $k_x \nu_x = q$  ( $k_z \nu_z = q$ )  $c_3 = c_4 = 0$  ( $c_1 = c_2 = 0$ ).

Приведем теперь полученные усредненные уравнения.

I) Для резонанса  $\nu_x = +m$ :

$$c_1' = S_{15}^{(1,2)} c_1 c_2 + S_{163}^{(3)} c_1^2 c_2^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{25}^{(1,2)} c_1 c_2 + S_{263}^{(3)} c_1^2 c_2^2 + FR_2.$$

2) Для резонанса  $\nu_x = -m$ :

$$c_1' = S_{111}^{(1,2)} c_1^2 + S_{133}^{(3)} c_1^3 c_2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{212}^{(1,2)} c_1^2 + S_{242}^{(3)} c_1 c_2^3 + FR_2.$$

3) Для резонанса  $2\nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{12}^{(1)} c_2 + S_{122}^{(2,3)} c_1 c_2^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{21}^{(1)} c_1 + S_{219}^{(2,3)} c_1^2 c_2 + FR_2.$$

4) Для резонанса  $2\nu_x = -m$ :

$$c_1' = S_{115}^{(2,3)} c_1^3 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{216}^{(2,3)} c_2^3 + FR_2.$$

5) Для резонанса  $3\nu_x = +m$ :

$$c_1' = S_{112}^{(1,2)} c_2^2 + S_{142}^{(3)} c_1 c_2^3 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{211}^{(1,2)} c_1^2 + S_{239}^{(3)} c_1^3 c_2 + FR_2.$$

6) Для резонанса  $3\nu_x = -m$ :

$$c_1' = S_{135}^{(3)} c_1^4 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{236}^{(3)} c_2^4 + FR_2.$$

7) Для резонанса  $4\nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{116}^{(2,3)} c_2^3 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{215}^{(2,3)} c_1^3 + FR_2.$$

8) Для резонанса  $5\nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{126}^{(3)} c_2^4 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{235}^{(3)} c_1^4 + FR_2.$$

9) Для резонанса  $2\nu_z = +m$ :

$$c_3' = S_{34}^{(1,2,3)} c_4 + S_{330}^{(2,3)} c_3 c_4^2 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{43}^{(1,2,3)} c_3 + S_{427}^{(2,3)} c_3^2 c_4 + FR_4.$$

10) Для резонанса  $2\nu_z = -m$ :

$$c_3' = S_{317}^{(2,3)} c_3^3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{418}^{(2,3)} c_4^3 + FR_4.$$

II) Для резонанса  $4\nu_z = m$ :

$$c_3' = S_{318}^{(2,3)} c_4^3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{417}^{(2,3)} c_3^3 + FR_4.$$

I2) Для резонанса  $2\dot{\nu}_z + \dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{114}^{(1,2,3)} c_4^2 + S_{134}^{(3)} c_2 c_3 c_4 + S_{150}^{(3)} c_3 c_4^3 + S_{152}^{(3)} c_1 c_2 c_4^2 + S_{164}^{(3)} c_1^2 c_3^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{213}^{(1,2,3)} c_3^2 + S_{233}^{(3)} c_1 c_3 c_4 + S_{247}^{(3)} c_3^3 c_4 + S_{251}^{(3)} c_1 c_2 c_3^2 + S_{267}^{(3)} c_2^2 c_4^2 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{39}^{(1,2,3)} c_2 c_4 + S_{318}^{(3)} c_4^3 + S_{323}^{(3)} c_2^2 c_3 + S_{345}^{(3)} c_1 c_3^3 + S_{355}^{(3)} c_1 c_2^2 c_4 + S_{358}^{(3)} c_2 c_3 c_4^2 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{46}^{(1,2,3)} c_1 c_3 + S_{417}^{(3)} c_3^3 + S_{421}^{(3)} c_1^2 c_4 + S_{449}^{(3)} c_2 c_4^3 + S_{456}^{(3)} c_1 c_3^2 c_4 + S_{457}^{(3)} c_1^2 c_2 c_3 + FR_4,$$

I3) Для резонанса  $2\dot{\nu}_z - \dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{113}^{(1,2,3)} c_3^2 + S_{133}^{(3)} c_1 c_3 c_4 + S_{147}^{(3)} c_3^3 c_4 + S_{151}^{(3)} c_1 c_2 c_3^2 + S_{165}^{(2)} c_1^2 c_4^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{214}^{(1,2,3)} c_4^2 + S_{234}^{(3)} c_2 c_3 c_4 + S_{250}^{(3)} c_3 c_4^3 + S_{252}^{(3)} c_1 c_2 c_4^2 + S_{266}^{(3)} c_2^2 c_3^2 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{37}^{(1,2,3)} c_1 c_4 + S_{327}^{(3)} c_3^2 c_4 + S_{331}^{(3)} c_1 c_2 c_3 + S_{354}^{(3)} c_1 c_3 c_4^2 + S_{359}^{(3)} c_1^2 c_2 c_4 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{48}^{(1,2,3)} c_2 c_3 + S_{430}^{(3)} c_3 c_4^2 + S_{432}^{(3)} c_1 c_2 c_4 + S_{453}^{(2)} c_1 c_2^2 c_3 + S_{460}^{(3)} c_2 c_3^2 c_4 + FR_4.$$

I4) Для резонанса  $2\dot{\nu}_z + 2\dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{129}^{(2,3)} c_2 c_4^2 + S_{138}^{(3)} c_4^4 + S_{162}^{(3)} c_2^2 c_3 c_4 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{232}^{(3)} c_3^4 + S_{245}^{(2,3)} c_1 c_3^2 + S_{261}^{(3)} c_1^2 c_3 c_4 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{324}^{(2,3)} c_2^2 c_4 + S_{343}^{(3)} c_2^3 c_3 + S_{349}^{(3)} c_2 c_4^3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{420}^{(2,3)} c_1^2 c_3 + S_{441}^{(3)} c_1^3 c_4 + S_{445}^{(3)} c_1 c_3^3 + FR_4.$$

I5) для резонанса  $2\dot{\nu}_z - 2\dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{126}^{(2,3)} c_2 c_3^2 + S_{168}^{(3)} c_3^2 c_4^2 + S_{169}^{(3)} c_1 c_2 c_3 c_4 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{228}^{(2,3)} c_1 c_4^2 + S_{268}^{(3)} c_3^2 c_4^2 + S_{269}^{(3)} c_1 c_2 c_3 c_4 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{321}^{(2,3)} c_1^2 c_4 + S_{356}^{(3)} c_1 c_3^2 c_4 + S_{357}^{(3)} c_1^2 c_2 c_3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{423}^{(2,3)} c_2^2 c_3 + S_{455}^{(3)} c_1 c_2^2 c_4 + S_{458}^{(3)} c_2 c_3 c_4^2 + FR_4.$$

I6) Для резонанса  $2\dot{\nu}_z - 3\dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{166}^{(3)} c_2^2 c_3^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{265}^{(3)} c_1^2 c_4^2 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{341}^{(3)} c_1^3 c_4 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{444}^{(3)} c_2^3 c_3 + FR_4.$$

I7) Для резонанса  $2\dot{\nu}_z + 3\dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{167}^{(3)} c_2^2 c_4^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{264}^{(3)} c_1^2 c_3^2 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{344}^{(3)} c_2^3 c_4 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{440}^{(3)} c_1^3 c_3 + FR_4.$$

I8) Для резонанса  $4\dot{\nu}_z + \dot{\nu}_x = m$ :

$$c_1' = S_{138}^{(3)} c_4^4 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{237}^{(3)} c_3^4 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{349}^{(3)} c_2 c_4^3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{445}^{(3)} c_1 c_3^3 + FR_4.$$

19) Для резонанса  $4\omega_2 - \omega_x = m$ :

$$C_1' = S_{137}^{(3)} C_3^4 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{238}^{(3)} C_4^4 + FR_2,$$

$$C_3' = S_{343}^{(3)} C_1 C_4^3 + FR_3,$$

$$C_4' = S_{446}^{(3)} C_2 C_3^3 + FR_4.$$

11. Усредненные уравнения для случая, когда линейная часть имеет периодический коэффициент

Все обозначения, описанные в разделе I, сохраняются, но  $FR_1, FR_2, FR_3$  и  $FR_4$  имеют в этом случае следующий вид:

$$FR_1 = S_{11}^{(1,2)} C_1 + S_{119}^{(2)} C_1^2 C_2 + S_{133}^{(2)} C_1 C_3 C_4,$$

$$FR_2 = S_{22}^{(1,2)} C_2 + S_{222}^{(2)} C_1 C_2^2 + S_{234}^{(2)} C_2 C_3 C_4,$$

$$FR_3 = S_{33}^{(1,2)} C_3 + S_{327}^{(2)} C_3^2 C_4 + S_{331}^{(2)} C_1 C_2 C_3,$$

$$FR_4 = S_{44}^{(1,2)} C_4 + S_{430}^{(2)} C_3 C_4^2 + S_{432}^{(2)} C_1 C_2 C_4.$$

Если  $\Delta_x = 0$  то  $S_{11}^{(1)} = S_{22}^{(1)} = 0$ , если  $\Delta_z = 0$ ,  
то  $S_{33}^{(1)} = S_{44}^{(1)} = 0$ .

Усредненные уравнения для этого случая приведены ниже.

1) Для резонанса  $\omega_x = +m$ :

$$C_1' = S_{15}^{(1,2)} C_1 C_2 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{25}^{(1,2)} C_1 C_2 + FR_2.$$

2) Для резонанса  $\omega_x = -m$ :

$$C_1' = S_{111}^{(1,2)} C_1^2 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{212}^{(1,2)} C_2^2 + FR_2.$$

3) Для резонанса  $2\omega_x = +m$ :

$$C_1' = S_{12}^{(1,2)} C_2 + S_{122}^{(2)} C_1 C_2^2 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{21}^{(1,2)} C_1 + S_{219}^{(2)} C_1^2 C_2 + FR_2.$$

4) Для резонанса  $2\omega_x = -m$ :

$$C_1' = S_{115}^{(2)} C_1^3 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{216}^{(2)} C_2^3 + FR_2.$$

5) Для резонанса  $3\omega_x = +m$ :

$$C_1' = S_{112}^{(1,2)} C_2^2 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{211}^{(1,2)} C_1^2 + FR_2.$$

6) Для резонанса  $4\omega_x = +m$ :

$$C_1' = S_{116}^{(2)} C_2^3 + FR_1,$$

$$C_2' = S_{215}^{(2)} C_1^3 + FR_2.$$

7) Для резонанса  $\omega_z = +m$ :

$$C_3' = S_{310}^{(1,2)} C_3 C_4 + FR_3,$$

$$C_4' = S_{410}^{(1,2)} C_3 C_4 + FR_4.$$

8) для резонанса  $\omega_z = -m$ :

$$C_3' = S_{313}^{(1,2)} C_3^2 + FR_3,$$

$$C_4' = S_{414}^{(1,2)} C_4^2 + FR_4.$$

9) для резонанса  $2\omega_z = +m$ :

$$C_3' = S_{34}^{(1,2)} C_4 + S_{330}^{(2)} C_4^2 C_3 + FR_3,$$

$$C_4' = S_{43}^{(1,2)} C_3 + S_{427}^{(2)} C_3^2 C_4 + FR_4.$$

$$c_2' = S_{225}^{(2)} c_1 c_3^2 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{324}^{(2)} c_2^2 c_4 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{420}^{(2)} c_1^2 c_3 + FR_4.$$

20) Для резонанса  $2\nu_z - 2\nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{126}^{(2)} c_2 c_3^2 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{228}^{(2)} c_1 c_4^2 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{321}^{(2)} c_1^2 c_4 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{423}^{(2)} c_2^2 c_3 + FR_4.$$

21) Для резонанса  $\nu_z + 3\nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{124}^{(2)} c_2^2 c_4 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{220}^{(2)} c_1^2 c_3 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{316}^{(2)} c_2^3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{415}^{(2)} c_1^3 + FR_4.$$

22) Для резонанса  $\nu_z - 3\nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{123}^{(2)} c_2^2 c_3 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{221}^{(2)} c_1^2 c_4 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{315}^{(2)} c_1^3 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{416}^{(2)} c_2^3 + FR_4.$$

23) Для резонанса  $3\nu_z + \nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{118}^{(2)} c_4^3 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{217}^{(2)} c_3^3 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{329}^{(2)} c_2 c_4^2 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{425}^{(2)} c_1 c_3^2 + FR_4.$$

24) Для резонанса  $3\nu_z - \nu_x = m$ :

$$c_1' = S_{117}^{(2)} c_3^3 + FR_1,$$

$$c_2' = S_{218}^{(2)} c_4^3 + FR_2,$$

$$c_3' = S_{328}^{(2)} c_1 c_4^2 + FR_3,$$

$$c_4' = S_{426}^{(2)} c_2 c_3^2 + FR_4.$$

Все приведенные результаты получены с помощью программы /2,3/.

#### Литература

1. Амирханов И.В., Мидков Е.П., Мидкова И.Е. Усредненные уравнения бетатронных колебаний в окрестности резонансов в циклических ускорителях. ОИИ, РИИ-89-516, Дубна, 1989.
2. Мидкова И.Е., ОИИ, РИИ-88-716, Дубна, 1988.
3. Мидкова И.Е. ОИИ, РИИ-88-722, Дубна, 1988.

Рукопись поступила в издательский отдел  
4 августа 1989 года.