ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р11-89-544

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек*

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДАХ И СТАНДАРТНЫХ ПРОГРАММАХ НА ФОРТРАНЕ ЭВМ ЕС-1061(60) ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ВСЕХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПЯТИ- И СЕМИДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ, А ТАКЖЕ МАТРИЦ ХЕССЕНБЕРГА

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

* Университет, Пхеньян, КНДР

1989

I. ВВЕДЕНИЕ

Обычно (см., например, [3,4,II] или §46 гл.VI [II] и т.д.) на практике при использовании QR- или LR - методов для вычисления всех собственных значений у $A=\|a_{ij}\|_{ij}$ матрицы общего вида осуществляется (см., например, стр. 3I6 [4] либо стр. 427 ÷ 492 [3]) предварительное подобное сведение $QAQ^{T}=H$ матрицы A к H - матрице Хессенберга (правой почти треугольной матрице). Далее качество найденных собственных значений матриц H (и следовательно, A) и время, затрачиваемое на ЭВМ на их получение, существенно зависят от способа выбора ускоряющих коэффициентов (сдвигов) $\overset{(k)}{W}$.

В модифицированных LR- методах для нахождения собственных значений матриц в форме Хессенберга [I÷4], т.е.

$$H=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{m,m-1} & a_{mm} \end{bmatrix}, \tag{I.I}$$

$$\left.\begin{aligned} (\overset{(k)}{H}-\overset{(k)}{W}E) &= \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R} \;\rightarrow\; \overset{(k+1)}{H}=\overset{(k)}{R}\,\overset{(k)}{L}+\overset{(k)}{W}E \\ \lambda_i &= \lim_{k\to\infty}\overset{(k+1)}{a}_{ii}\,,\quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}\right\}, \tag{I.2}$$

$$\left.\begin{aligned} (\overset{(k)}{H}-\overset{(k)}{W}E) &= \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R} \;\rightarrow\; \overset{(k+1)}{H}=\overset{(k)}{R}\,\overset{(k)}{L} \\ \lambda_i &= \lim_{k\to\infty}\Big(\overset{(k+1)}{a}_{ii}+\sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{W}\Big),\quad i=1,2,\dots,m \end{aligned}\right\}, \text{ где} \tag{I.3}$$

$\overset{(k)}{a}_{ii}$ - диагональные элементы итерационной матрицы $\overset{(k+1)}{H}$, итерационный коэффициент $\overset{(k)}{W}$ (сдвиг) для ускорения сходимости обычно на практике выбирается как собственное значение матриц 2 x 2

$$\begin{pmatrix} \overset{(k)}{a}_{i-1,j-1} & \overset{(k)}{a}_{i-1,j} \\ \overset{(k)}{a}_{i,i-1} & \overset{(k)}{a}_{ii} \end{pmatrix}, \tag{I.4}$$

ближайшее к элементу $\overset{(k)}{a}_{ii}$ [2,4]. Наилучшие результаты (по скорости сходимости) получены, если для $\overset{(k)}{W}$ выполнялось условие (§24 г.8[4])

$$\left|\overset{(k)}{W}/\overset{(k-1)}{W}-1\right|<\frac{1}{2}\quad . \tag{I.5}$$

Такой способ выбора сдвига при поиске собственных значений H - вещественной матрицы является наиболее эффективным,если у H имеются комплексно-сопряженные собственные значения. Однако в настоящее время всё ещё не существует теории выбора оптимальной стратегии сдвигов, а также точных аналитических выражений для оценки скорости сходимости при выборе ускоряющих коэффициентов в общем виде (см., например, [4] либо §46 и стр. 262÷263 [I], а также §3I [I2]).

В настоящей работе предлагается один из универсальных (по нашему мнению) способов выбора ускоряющих коэффициентов в модифицированных LR - алгоритмах для вычисления собственных значений вещественных матриц в форме Хессенберга, который также может быть использован и для матриц с комплексными элементами. **Обсуждаемый** здесь способ выбора $\overset{(k)}{W}$ основан на стратегии выбора ускоряющих коэффициентов в модифицированных алгоритмах для вычисления собственных значений вещественных трехдиагональных матриц общего вида, предложенной нами в [5] и реализованной в программах [6,7] .

В настоящей работе мы также приводим описание стандартных программ на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061 и тестовые расчеты для вычисления собственных значений пяти-, семидиагональных вещественных матриц и матриц в форме Хессенберга, в которых реализованы алгоритмы, приведенные нами в [8] и в этой работе.

2. О способах выбора итерационных ускоряющих коэффициентов при поиске всех собственных значений матриц Хессенберга

В этом разделе дается обобщение предложенного нами [8,5] нового способа выбора ускоряющих итерационных коэффициентов при поиске всех собственных значений матриц Хессенберга с использованием LR- метода.

Теорема I. Пусть собственные значения вещественной матрицы $\overset{(0)}{H}=(\overset{(0)}{H}+Ed)$, у которой $\overset{(0)}{H}$ есть верхняя почти треугольная матрица (т.е. матрица Хессенберга) общего вида (I.I) и d – начальный сдвиг*), удовлетворяют следующему условию упорядоченности

$$|\lambda_1(d)| > |\lambda_2(d)| > \cdots > |\lambda_m(d)| > 0 . \qquad (2.I)$$

Тогда если в LR – методе [I÷4] для вычисления собственных значений матрицы $\overset{(0)}{H}$ в форме Хессенберга (I.I) выбирать $\overset{(k)}{W}_j$ – итерационные коэффициенты – сдвиги для любого $j=m, m-1,\dots,2$ и любого $k=1,2,\dots$ в виде

$$\overset{(k)}{W}_j = \begin{cases} 0 \ , & \text{если } \ |\overset{(k)}{a}_{jj-1}| \geqslant 1 \\ \overset{(k)}{a}_{jj} - \overset{(k)}{a}_{jj-1}\overset{(k)}{a}_{j-1j}/\overset{(k)}{a}_{j-1j-1} \ , & \text{если } \ |\overset{(k)}{a}_{jj-1}| < \varepsilon_p < 1 \ , \end{cases} \qquad (2.2)$$

то в ускоренном таким образом LR – методе достигается не хуже чем квадратическое ускорение сходимости, т.е.

$$\overset{(k+1)}{a}_{jj-1}(\overset{(k)}{W}_j) \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}{}_p^2) . \qquad (2.3)$$

Доказательство. При (2.I) имеет место $\overset{(k)}{H} = \overset{(k)}{L}\,\overset{(k)}{R}$, где

$$\overset{(k)}{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ \ell_2 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ell_{m-1} & 1 \\ & & & \ell_m \ 1 \end{bmatrix}, \qquad \overset{(k)}{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1m} \\ & r_{22} & \cdots & r_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & r_{mm} \end{bmatrix} . \qquad (2.4)$$

---

*) Общая стратегия выбора d – начального сдвига обсуждалась нами в [13] , но в [14] нами описана оптимальная практическая стратегия.

Тогда модифицированный явный LR – алгоритм (I.2) для вычисления собственных значений матриц в форме Хессенберга имеет вид

Если $|\overset{(k+1)}{a}_{ii-1}| > \varepsilon$ x) для любых $k=1,2,\dots,$ то

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\ell}_i = \overset{(k)}{a}_{ii-1}/\overset{(k)}{r}_{i-1,i-1} \ ; \ i=2,3,\dots,m \ ; \\ &\overset{(k)}{r}_{ii} = (\overset{(k)}{a}_{ii} - \overset{(k)}{W}) - \overset{(k)}{\ell}_i\,\overset{(k)}{r}_{i-1,i} \ ; \ \overset{(k)}{r}_{11} = \overset{(k)}{a}_{11} - \overset{(k)}{W} \ ; \ i=2,3,\dots,m \ ; \\ &\overset{(k)}{r}_{i,n} = \overset{(k)}{a}_{i,n} - \overset{(k)}{\ell}_i\cdot\overset{(k)}{r}_{i-1,n} \ ; \ \overset{(k)}{\ell}_1 = 0 \ ; \ i=1,2,\dots,m, \ n=i+1,\dots,m; \\ &\overset{(k+1)}{a}_{ii-1} = \overset{(k)}{r}_{ii}\cdot\overset{(k)}{\ell}_i \ , \ i=2,3,\dots,m . \end{aligned}\right\} \qquad (2.5)$$

$$\left.\begin{aligned} &\begin{cases} \overset{(k+1)}{a}_{ii} = (\overset{(k)}{r}_{ii} + \overset{(k)}{W}) + \overset{(k)}{r}_{ii+1}\overset{(k)}{\ell}_{i+1} \ ; \ \overset{(k+1)}{a}_{mm} = \overset{(k)}{r}_m + \overset{(k)}{W} , & \text{в случае (I.2)} ; \\ \overset{(k+1)}{a}_{ii} = \overset{(k)}{r}_{ii} + \overset{(k)}{r}_{ii+1}\overset{(k)}{\ell}_{i+1} \ ; \ \overset{(k+1)}{a}_{mm} = \overset{(k)}{r}_m , & \text{в случае (I.3)} ; \ i=1,2,\dots,m-1; \end{cases} \\ &\overset{(k+1)}{a}_{i,n} = \overset{(k)}{r}_{i,n} + \overset{(k)}{r}_{i,n+1}\overset{(k)}{\ell}_{n+1} \ ; \ \overset{(k+1)}{a}_{im} = \overset{(k)}{r}_{im} \ ; \ i=1,2,\dots,m \ ; \ n=i+1,\dots,m-1. \end{aligned}\right\} \qquad (2.6)$$

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \overset{(k+1)}{a}_{ii} - d \quad \text{в случае (I.2)} , \\ &\lambda_i = \lim_{k\to\infty} \Big(\overset{(k+1)}{a}_{ii} + \sum_{p=1}^{k} \overset{(p)}{W}\Big) - d \ \text{ в случае (I.3)} , \ i=1,2,\dots,m. \end{aligned}\right\} \qquad (2.7)$$

Если $|\overset{(k^*)}{a}_{i^*i^*-1}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k=k^*\geqslant 2$ и некотором $i=i^*$, то

$$\Big\{ \overset{(k^*+1)}{a}_{nn-1} = 0 , \quad \overset{(k^*+1)}{a}_{nn} = \overset{(k^*)}{a}_{nn} \Big\}_{n=i^*}^{m} . \qquad (2.8)$$

Если для некоторого k выполняется неравенство $1 > |\overset{(k+1)}{a}_{ii-1}| > \varepsilon$ и выбирать ускоряющий коэффициент $\overset{(k)}{W}_i$ в виде $(2.2)_{2)}$, то из (2.5) ÷ (2.6), получаем

$$\overset{(k+1)}{a}_{ii-1} = \Big[\prod_{n=1}^{k}\Big(\frac{\overset{(n)}{r}_{i-1i}}{\overset{(n)}{r}_{i-1i-1}}\Big)\cdot\overset{(n)}{\ell}_i\cdot\Big(\frac{\overset{(n)}{r}_{i-1i-1}}{\overset{(n)}{a}_{i-1i-1}}\cdot\frac{\overset{(n)}{a}_{i-1i}}{\overset{(n)}{r}_{i-1i}} - 1\Big)\Big]\,\overset{(1)}{a}_{ii-1} \qquad (2.9)$$

$$\left(\text{или} \quad \frac{\overset{(k+1)}{a}_{ii-1}(\overset{(k)}{W}_i)}{\overset{(k)}{a}_{ii-1}(\overset{(k-1)}{W}_i)} = \frac{1}{\overset{(k)}{r}_{i-1i-1}}\Big(\frac{\overset{(k)}{a}_{i-1i}}{\overset{(k)}{a}_{i-1i-1}} - \frac{\overset{(k)}{r}_{i-1i}}{\overset{(k)}{r}_{i-1i-1}}\Big)\cdot\overset{(k)}{a}_{ii-1}(\overset{(k-1)}{W}_i)\right) . \qquad (2.9)'$$

Известно, что

$$\lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{\ell}_i = 0 \ ; \ \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{r}_{i-1i-1} = \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{a}_{i-1i-1} = \lambda_{i-1} \ ; \ \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{a}_{i-1i} = \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{r}_{i-1i};$$

следовательно, выполняется соотношение

$$\lim_{k\to\infty}\Big(\frac{\overset{(k)}{r}_{i-1i-1}}{\overset{(k)}{a}_{i-1i-1}}\cdot\frac{\overset{(k)}{a}_{i-1i}}{\overset{(k)}{r}_{i-1i}} - 1\Big) = 0 .$$

Поэтому если положить

$$|\overset{(k)}{\ell}_i| \leqslant \overset{(k)}{\varepsilon}_\ell \ , \qquad \Big|\frac{\overset{(k)}{r}_{i-1i-1}}{\overset{(k)}{a}_{i-1i-1}}\cdot\frac{\overset{(k)}{a}_{i-1i}}{\overset{(k)}{r}_{i-1i}} - 1\Big| \leqslant \overset{(k)}{\varepsilon}_r ,$$

и $\overset{(k)}{\varepsilon}_p = \max(\overset{(k)}{\varepsilon}_\ell, \overset{(k)}{\varepsilon}_r)$, то

$$|\overset{(k+1)}{a}_{ii-1}| \leqslant \Big[\prod_{n=1}^{k}\Big|\frac{\overset{(n)}{r}_{i-1i}}{\overset{(n)}{r}_{i-1i-1}}\Big|\cdot\overset{(n)}{\varepsilon}{}_p^2\Big]\cdot|\overset{(1)}{a}_{ii-1}| \ , \ \text{т.е.} \quad \overset{(k+1)}{a}_{ii-1}(\overset{(k)}{W}_i) \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}{}_p^2) . \qquad (2.10)$$

Теорема доказана.

---

x) Здесь и далее ε – константа, определяемая разрядной сеткой ЭВМ.

Замечание I. Из (2.9) следует, что в соответствии с (2.2) включать в итерационный процесс ускоряющие сдвиги $\overset{(\kappa)}{W}_i$ целесообразно только после выполнения определенного числа итераций без ускоряющих сдвигов, в результате которых выполняются неравенства

$$\left| \frac{\overset{(\kappa)}{r}_{i+1\,i+1}}{\overset{(\kappa)}{\bar a}_{i+1\,i+1}} \cdot \frac{\overset{(\kappa)}{\bar a}_{i+1\,i}}{\overset{(\kappa)}{r}_{i+1\,i}} - 1 \right| < 1 \qquad (2.11)$$

для любых κ и κ', удовлетворяющих неравенству $\kappa \geqslant \kappa'$.

Пусть теперь заданная матрица H (I.I) имеет кратное комплексное собственное значение $\lambda = a + i\,b$ и его кратность равна n. Тогда по основной теореме алгебры (§68 [9]) ему сопряженное комплексное число $\bar\lambda = a - i\,b$ есть также собственное значение кратности n заданной матрицы H. С другой стороны, если λ_i – комплексное кратное собственное значение (т.е. $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \cdots, \lambda_{i+n-1}, \bar\lambda_{i+n}, \cdots, \bar\lambda_{i+2n-1}$), то итерационные матрицы $\overset{(\kappa)}{H}$ при $\kappa \to \infty$ стремятся к верхнетреугольной матрице, которая имеет лишь [3,8] подматрицу $\overset{(\infty)}{H}_{2n}$ на диагонали. Но собственные значения матрицы $\overset{(\kappa)}{H}_{2n}$ при $\kappa \to \infty$ стремятся к кратным собственным значениям λ_i заданной матрицы H (I.I). Отметим, что указанный способ выбора $\overset{(\kappa)}{W}$ (2.2) ускоряющих коэффициентов в итерационном алгоритме (2.5)÷(2.8) сохраняет вещественность и форму Хессенберга исходной матрицы H (I.I). Традиционный же способ выбора $\overset{(\kappa)}{W}$, приведенный во введении, может нарушать вещественность итерационных матриц, что приводит (см., например, § 31.21÷31.30 [12]) к дополнительным потерям времени и памяти ЭВМ, а также к ухудшению качества спектра. По аналогии с [8] справедлив следующий результат.

Теорема 2. Пусть у вещественной матрицы H (I.I) имеется кратное вещественное либо комплексное собственное значение λ. Тогда если итерационные матрицы $\overset{(\kappa)}{H}$ LR – алгоритма (2.5)÷(2.8) при способах выбора ускоряющих итерационных коэффициентов $\overset{(\kappa)}{W}$ (2.2) стремятся при $\kappa \to \infty$ к виду

$$\overset{(\infty)}{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \lambda_2 & & & & \\ & & \ddots\,\lambda_{i-1} & (\bar a_{ij}) & & \\ & & & \bar H_s & & \\ & \mathbf{0} & & & \lambda_{i+s} & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & \lambda_m \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \bar H_s = \begin{pmatrix} \bar a_{11} & \bar a_{12} & - - - & \bar a_{1s} \\ \bar a_{21} & \bar a_{22} & - - - & \bar a_{2s} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \bar a_{s-1\,s-2} & \bar a_{s-1\,s-1} & \bar a_{s-1\,s} \\ & & \bar a_{s\,s-1} & \bar a_{ss} \end{pmatrix}, \qquad (2.12)$$

то имеют место следующие утверждения:

I. Равенство $s = 2n+1$, где $n = 1, 2, \cdots$ является достаточным условием для того, чтобы $\bar H_s$ (а вместе с ней и исходная матрица H (I.I)) имели бы s – кратное вещественное собственное значение

$$\lambda = \frac{1}{s}\left[\sum_{i=1}^{s} \bar a_{ii} = S_P(\bar H_s)\right]. \qquad (2.13)$$

2. Равенство $s = 2n$, где $n = 1, 2, \cdots$ и $V < 0$ являются необходимым и достаточным условиями для n – кратного комплексного

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = (a \pm i\,b), \ \text{где} \\ &a = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \bar a_{ii}, \quad b = \frac{1}{2n}\sqrt{-V} \end{aligned}\right\} \qquad (2.14)$$

собственного значения λ, а $s = 2n$ и $V = 0$ достаточными условиями для $2n$ – кратного вещественного

$$\lambda = \frac{1}{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n} \bar a_{ii} = S_P(\bar H_s)\right] \qquad (2.15)$$

собственного значения λ матрицы $\bar H_s$ (то же самое заданной матрицы H (I.I)). Здесь V – дискриминант характеристического многочлена – $(\lambda^2 + 2B\lambda + F)^n$ матрицы $\bar H_s$, т.е.

$$V = \frac{1}{4n^2}\Big\{\big[(\bar a_{11} - \bar a_{22})^2 + \cdots + (\bar a_{11} - \bar a_{ss})^2\big] + \big[(\bar a_{22} - \bar a_{33})^2 + \cdots + (\bar a_{22} - \bar a_{ss})^2\big] + \cdots + \big[(\bar a_{s-1\,s-1} - \bar a_{ss})^2\big]\Big\} + \frac{1}{n}\sum_{i=2}^{s} \bar a_{i-1\,i}\,\bar a_{i\,i-1}. \qquad (2.16)$$

Доказательство справедливости утверждений теоремы совпадает с доказательством аналогичных утверждений теоремы 5 из [8], если использовать ускоряющие коэффициенты $\overset{(\kappa)}{W}$ (2.2), поэтому мы на нем не останавливаемся. Теорема установлена.

Замечание 2. Отметим, что если у матрицы H (I.I) имеется более чем одно кратное собственное значение, то у итерационных матриц $\overset{(\kappa)}{H}$ при выборе $\overset{(\kappa)}{W}$ в виде (2.2) появляется на диагонали соответствующее число матриц $\bar H_s$, для каждой из которых (по аналогии с [8]) справедлива теорема 2.

3. Описание подпрограмм на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления полного спектра вещественных пяти- и семидиагональных матриц общего вида, а также матриц Хессенберга

В настоящем разделе приводится описание стандартных программ и примеры вычисления собственных значений вещественных пяти и семидиагональных матриц общего вида, а также матриц Хессенберга произвольной структуры, т.е.

$$C_5 = \begin{pmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & a_4 & & \\ b_3 & p_3 & q_3 & r_4 & a_5 & \\ & - & - & - & - & \\ & b_{m-2} & p_{m-2} & q_{m-2} & r_{m-1} & a_m \\ & & b_{m-1} & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & b_m & p_m & q_m \end{pmatrix}, \qquad (3.1)$$

$$
\mathfrak{C}_7 = \begin{pmatrix}
q_1 & r_2 & a_3 & d_4 & & & & & \\
p_2 & q_2 & r_3 & a_4 & d_5 & & & & \\
b_3 & p_3 & q_3 & r_4 & a_5 & d_6 & & & \\
e_4 & b_4 & p_4 & q_4 & r_5 & a_6 & d_7 & & \\
 & - & - & - & - & - & - & & \\
 & e_{m-3} & b_{m-3} & p_{m-3} & q_{m-3} & r_{m-2} & a_{m-1} & d_m & \\
 & & e_{m-2} & b_{m-2} & p_{m-2} & q_{m-2} & r_{m-1} & a_m & \\
 & & & e_{m-1} & b_{m-1} & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m & \\
 & & & & e_m & b_m & p_m & q_m &
\end{pmatrix}, \qquad (3.2)
$$

$$
H = \begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & - & - & - & a_{1m} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & - & - & - & a_{2m} \\
 & a_{32} & a_{33} & - & - & - & a_{3m} \\
 & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\
 & & & & a_{m-1,m-2} & a_{m-1,m-1} & a_{m-1,m} \\
 & & & & & a_{m,m-1} & a_{mm}
\end{pmatrix}. \qquad (3.3)
$$

Подпрограмма MATLR5 вычисляет все собственные значения матрицы вида $\mathfrak{C}_5$ (3.I) по алгоритму (3.7)÷(3.I0) из [8], MATLR7 – матриц вида $\mathfrak{C}_7$ (3.2) по (3.I8)÷(3.2I) из [8], а DBWLR1 – матриц вида (3.3) по (2.5)÷(2.8) из настоящей работы. В подпрограмме MATLR5 используется ускоряющий коэффициент $\overset{\infty}{W}$ (3.4) [8], в MATLR7 – $\overset{\infty}{W}$ (3.I5) [8], а в DBWLR1 – $\overset{\infty}{W}$ (2.2) из настоящей работы. Написаны также еще две подпрограммы DBWLR2 и DCOWLR. DBWLR2 вычисляет собственные значения вещественных, а DCOWLR – комплексных матриц Хессенберга. В стандартной подпрограмме DBWLR2 реализован алгоритм (2.5)÷(2.8) с использованием перестановок [2÷4] и ускоряющих коэффициентов $\overset{\infty}{W}$ в форме (2.2). Стандартная подпрограмма DCOWLR взята из библиотеки [I0], но в ней изменена стратегия выбора $\overset{\infty}{W}$ – ускоряющих коэффициентов. Вместо стандартной стратегии, описанной во введении к настоящей работе, использована наша стратегия (2.2).

В подпрограммах MATLR5, MATLR7, DBWLR1, DBWLR2 реализованы также результаты лемм 3 и 4 из [8] для анализа кратных собственных значений матриц третьего и четвертого порядков. Все программы используют арифметику с двойной точностью. Печать выходной информации не предусмотрена.

<u>Обращение к подпрограммам</u>

```
CALL  MATLR5 (M, A, R, Q, P, B, IERR)
CALL  MATLR7 (M, D, A, R, Q, P, B, E, IERR)
CALL  DBWLR1 (M, A, IERR, AL, BL)
CALL  DBWLR2 (M, A, WR, WI, IERR)
CALL  DCOWLR (M, HR, HI, WR, WI, IERR)
```


Здесь: M – порядок заданных матриц $\mathfrak{C}_5$ (3.I), $\mathfrak{C}_7$ (3.2) и H (3.3).
В подпрограммах MATLR5 и MATLR7

A, R, Q, P, B и D, E – одномерные вещественные массивы размерности M, содержащие элементы заданных матриц $\mathfrak{C}_5$ и $\mathfrak{C}_7$, а также их собственные значения. А именно. На входе $E \leftrightarrow e_i$, $B \leftrightarrow b_i$, $P \leftrightarrow p_i$, $Q \leftrightarrow q_i$, $R \leftrightarrow r_i$, $A \leftrightarrow a_i$, $D \leftrightarrow d_i$. На выходе Q – содержит вещественные части и P – мнимые части собственных значений соответствующих матриц.

В подпрограммах DBWLR1, DBWLR2 и DCOWLR

A – двумерный вещественный массив размерности [M×M], содержащий элементы заданной вещественной матрицы H (3.3) на входе;

HR, HI – двумерные вещественные массивы размерности [M×M], содержащие соответственно вещественные и мнимые части исходной комплексной матрицы в форме Хессенберга H (3.3) на входе;

AL≡WR, BL≡WI – одномерные вещественные массивы размерности M, содержащие соответственно вещественные и мнимые части собственных значений матрицы H (3.3) на выходе из подпрограмм;

IERR – целая переменная, служащая для сообщения об ошибках. Если на выходе IERR ≠ 0, то вычисления неудовлетворительные, т.к. при вычислении одного из собственных значений сделано более чем 30 итераций, но необходимая точность не достигнута. Если на выходе IERR = 0, то все собственные значения найдены с удовлетворительной точностью.

Ниже представлены результаты вычислений для некоторых тестовых вещественных матриц. При этом помимо наших программ были использованы также DESRG2, DHQR, DCOMLR, DMTQL2, DHQR2 и DBSECT + DTNVIT – стандартные подпрограммы из библиотеки [I0]. Из них DHQR вычисляет собственные значения, а DHQR2 – собственные значения и собственные векторы вещественных матриц в верхней форме Хессенберга посредством QR – алгоритма.

Подпрограммы DBSECT и DTNVIT используют методы бисекций и обратных итераций для вычисления собственных значений и собственных векторов симметрических вещественных трехдиагональных матриц. Подпрограмма DMTQL2 вычисляет собственные значения и корневые векторы симметрической вещественной трехдиагональной матрицы на основе QL – алгоритма. Подпрограмма DESRG2 вычисляет собственные значения любых вещественных матриц, используя подпрограммы DHQR, а DCOMLR – собственные значения комплексных матриц в форме Хессенберга посредством LR – алгоритма.

Нами использована также наша подпрограмма DIM1 из [7], которая вычисляет собственные значения и соответствующие им собственные векторы вещественных трехдиагональных матриц произвольной структуры с ненулевыми внедиагональными элементами.

<u>Комментарии к таблицам</u>

В приведенных ниже таблицах указаны названия подпрограмм, $\mathbb{C}_i$ *) – вид матрицы, а также использованы следующие обозначения:

m – порядок заданной матрицы,

$\Delta S_p = \left| \sum_{i=1}^{m} \lambda_i - \sum_{i=1}^{m} q_i \right|$,

$\Delta = (\mathbb{C} - \lambda E)\, U(\lambda)$ – невязка,

N – Общее число итераций,

t_λ, $t_{\lambda,u}$ – время вычисления собственных значений и, соответственно, полное время вычисления собственных значений и собственных векторов.

Прежде чем перейти к выводам отметим, что указанный способ выбора ускоряющих коэффициентов $\overset{\infty}{W}$ может быть использован и в QR – методе.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

В заключение отметим, что в настоящей работе:

– Дано обобщение предложенного нами в [5,8] нового универсального способа выбора ускоряющих итерационных коэффициентов при поиске всех собственных значений матриц Хессенберга с использованием LR – метода.

– Описаны новые эффективные стандартные программы на ФОРТРАНе ЭВМ ЕС-1061(60) для вычисления собственных значений пяти-, семидиагональных матриц и матриц Хессенберга.

– Показано (см., например, таблицу 7), что LR – метод с применением новой стратегии выбора ускоряющих коэффициентов при поиске всех собственных значений вещественных матриц Хессенберга не уступает (и даже превосходит) по эффективности QR – метод.

Авторы искренне признательны члену – корреспонденту АН СССР профессору Н. Н. Говоруну за поддержку настоящих исследований.

*) Матрицы вида $\mathbb{C}_2$ встречаются [15] при обработке экспериментальных данных в физике высоких энергий.

Таблица I

	m		MATLR5	DESRG2
$\mathbb{C}_1=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & & & 0 \\ (-3+\frac{1}{2}) & 6 & -4 & 1 & & \\ (1+\frac{0.8}{3}) & (-4+\frac{1}{3}) & 6 & -4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ & & (1+\frac{0.8}{m-1}) & (-4+\frac{1}{m-1}) & 6 & -4 \\ 0 & & & (1+\frac{0.8}{m}) & (-4+\frac{1}{m}) & 6 \end{pmatrix}$	20	ΔS_p	$0.58975047068\cdot 10^{-12}$	$0.17834622668\cdot 10^{-11}$
		t_λ	0.0749969	0.1647949
		N	128	
	100	ΔS_p	$0.12221335055\cdot 10^{-10}$	$0.41893599700\cdot 10^{-10}$
		t_λ	1.1102295	10.6154633
		N	393	
	200	ΔS_p	$0.36720848584\cdot 10^{-10}$	$0.14750867194\cdot 10^{-9}$
		t_λ	3.7224126	70.0562592
		N	683	
$\mathbb{C}_2=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & & & & \\ -3 & 6 & -4 & 1 & & & \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ & & - & - & - & - & \\ & & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ & & & 1 & -4 & 6 & -4 \\ & & & & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$	20	ΔS_p	$0.31974423109\cdot 10^{-12}$	$0.17053025658\cdot 10^{-11}$
		t_λ	0.0404810	0.1452179
		N	96	
	100	ΔS_p	$0.86401996668\cdot 10^{-11}$	$0.39392489271\cdot 10^{-10}$
		t_λ	0.7511635	9.2184753
		N	313	
	200	ΔS_p	$0.29274360713\cdot 10^{-10}$	$0.14290435502\cdot 10^{-9}$
		t_λ	2.9093367	65.4095306
		N	578	
$\mathbb{C}_3=\mathbb{C}_2+\alpha\cdot\mathbb{C}_4$, где $\mathbb{C}_4=\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & - & - & - & - \\ & & 1 & 4 & 1 \\ & & & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\alpha=10^{-2}$	20	ΔS_p	$0.31974423109\cdot 10^{-12}$	$0.16839862838\cdot 10^{-11}$
		t_λ	0.0476837	0.1518707
		N	99	
	100	ΔS_p	$0.70485839387\cdot 10^{-11}$	$0.36777692003\cdot 10^{-10}$
		t_λ	0.8382881	9.1357269
		N	347	
	200	ΔS_p	$0.23476331990\cdot 10^{-10}$	$0.13466205928\cdot 10^{-9}$
		t_λ	3.1014099	64.0174408
		N	642	

Таблица 2

$$\mathfrak{C}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & -1 & & & & & \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & & \\ & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & \\ & & & & -1 & 0 & 2 & 0 & \\ & & & & & -1 & 0 & 2 & \end{bmatrix}, \quad m = 20$$

DESRG2	$0.223383475497\cdot IO^{-I}$	$0.I98062264I95\cdot IO^{0}$	$0.533896256340\cdot IO^{0}$
	$0.I554958I3209\cdot IO^{I}$	$0.39III456II57\cdot IO^{I}$	$0.365247754863\cdot IO^{I}$
	$0.273068204873\cdot IO^{I}$	$0.324697960372\cdot IO^{I}$	$0.2I49460I87I7\cdot IO^{I}$
	$0.I00000000000\cdot IO^{I}$	$0.223383475560\cdot IO^{-I}$	$0.I98062264222\cdot IO^{0}$
	$0.39III456II59\cdot IO^{I}$	$0.533896256038\cdot IO^{0}$	$0.36524775488I\cdot IO^{I}$
	$0.I554958I32I6\cdot IO^{I}$	$0.324697960372\cdot IO^{I}$	$0.2I49460I87I7\cdot IO^{I}$
	$0.273068204873\cdot IO^{I}$	$0.I00000000000\cdot IO^{I}$	
	$\Delta S_P = 0.273558953268\cdot IO^{-I2}$; $t_\lambda = 0.0676483$		
MATLR5	$0.39III456II57\cdot IO^{I}$	$0.39III456II57\cdot IO^{I}$	$0.365247754863\cdot IO^{I}$
	$0.365247754863\cdot IO^{I}$	$0.324697960372\cdot IO^{I}$	$0.324697960372\cdot IO^{I}$
	$0.273068204873\cdot IO^{I}$	$0.273068204873\cdot IO^{I}$	$0.2I49460I87I7\cdot IO^{I}$
	$0.2I49460I87I7\cdot IO^{I}$	$0.I554958I3209\cdot IO^{I}$	$0.I554958I3209\cdot IO^{I}$
	$0.I00000000000\cdot IO^{I}$	$0.I00000000000\cdot IO^{I}$	$0.533896256340\cdot IO^{0}$
	$0.533896256340\cdot IO^{0}$	$0.I98062264I95\cdot IO^{0}$	$0.I98062264I95\cdot IO^{0}$
	$0.223383475497\cdot IO^{-I}$	$0.223383475497\cdot IO^{-I}$	
	$\Delta S_P = 0.I3I450406II6\cdot IO^{-I2}$; $t_\lambda = 0.03092859$; $N =$ I03		
MATLR7	$0.39III456II57\cdot IO^{I}$	$0.39III456II57\cdot IO^{I}$	$0.365247754863\cdot IO^{I}$
	$0.365247754863\cdot IO^{I}$	$0.324697960372\cdot IO^{I}$	$0.324697960372\cdot IO^{I}$
	$0.273068204873\cdot IO^{I}$	$0.273068204873\cdot IO^{I}$	$0.2I49460I87I7\cdot IO^{I}$
	$0.2I49460I87I7\cdot IO^{I}$	$0.I554958I3209\cdot IO^{I}$	$0.I554958I3209\cdot IO^{I}$
	$0.I00000000000\cdot IO^{I}$	$0.I00000000000\cdot IO^{I}$	$0.533896256340\cdot IO^{0}$
	$0.533896256340\cdot IO^{0}$	$0.I98062264I95\cdot IO^{0}$	$0.I98062264I95\cdot IO^{0}$
	$0.223383475497\cdot IO^{-I}$	$0.223383475497\cdot IO^{-I}$	
	$\Delta S_P = 0.I42I08547I52\cdot IO^{-I2}$; $t_\lambda = 0.0327I484$; $N =$ I39		

Таблица 3

	m		MATLR7	DESRG2
$\mathfrak{C}_6 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 & 1 & & & & & \\ 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & 3 & 6 & 3 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 3 & 6 & 3 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 3 & 6 & 2 \\ & & & & & 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$	20	ΔS_P	$0.38724579099\cdot IO^{-I2}$	$0.I4352963262\cdot IO^{-II}$
		t_λ	0.0759735	0.I565I2I
		N	66	
	I00	ΔS_P	$0.92654772743\cdot IO^{-II}$	$0.30070I68577\cdot IO^{-I0}$
		t_λ	I.5I25596	I0.I35559I
		N	298	
	200	ΔS_P	$0.3689I37884I\cdot IO^{-I0}$	$0.II044676285\cdot IO^{-9}$
		t_λ	6.240I700	69.4477322
		N	604	
$\mathfrak{C}_7 = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 & & & & & \\ 2 & 6 & 2 & 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 1 & & & \\ 1 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ & & & 1 & 1 & 2 & 6 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 1 & 2 & 6 & 2 \\ & & & & & 1 & 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$	20	ΔS_P	$0.5400I249I88\cdot IO^{-I2}$	$0.I40332I903I\cdot IO^{-II}$
		t_λ	0.0774705	0.I702728
		N	66	
	I00	ΔS_P	$0.7560I747085\cdot IO^{-II}$	$0.28762769944\cdot IO^{-I0}$
		t_λ	I.48I2486	II.2400080
		N	287	
	200	ΔS_P	$0.39449332689\cdot IO^{-I0}$	$0.I05I0348I47\cdot IO^{-9}$
		t_λ	5.8600624	80.56I72I8
		N	557	
$\mathfrak{C}_8 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & f_4 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & a_4 & f_5 & & & \\ b_3 & p_3 & q_3 & r_4 & a_5 & f_6 & & \\ z_4 & b_4 & p_4 & q_4 & r_5 & a_6 & f_7 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & f_m \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & a_m \\ & & & z_{m-1} & b_{m-1} & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & z_m & b_m & p_m & q_m \end{bmatrix},$ где $q_i = 6, i = 2,\dots,m-1; q_1 = q_m = 5$; $r_i = 3, i = 2,\dots,m$; $a_i = 1, i = 3,\dots,m$; $f_i = 1, i = 4,\dots,m$; $p_i = 3 + \frac{1}{i}; i = 2,\dots,m$; $b_i = 1 + \frac{1}{i}; i = 3,\dots,m$; $z_i = 1 + \frac{0.8}{i}; i = 4,\dots,m$	20	ΔS_P	$0.440536496I7\cdot IO^{-I2}$	$0.I43I7436I26\cdot IO^{-II}$
		t_λ	0.090454I	0.I5396I2
		N	77	
	I00	ΔS_P	$0.I4722445485\cdot IO^{-I0}$	$0.3I66I784306\cdot IO^{-I0}$
		t_λ	2.I405769	I0.3303072
		N	36I	
	200	ΔS_P	$0.42007286538\cdot IO^{-I0}$	$0.II4I4I58507\cdot IO^{-9}$
		t_λ	6.7692232	72.464III3
		N	6I9	

Таблица 4

$$\mathbb{C}_9 = \left(\begin{array}{l} q_i = \begin{cases} 110 - 10 \cdot i, & \text{если} \quad 1 \leq i \leq 11 \\ 10 \cdot i - 110, & \text{если} \quad 12 \leq i \leq 21 \end{cases} \\ p_n = 1 = r_n \quad ; \quad n = 2, 3, \ldots, 21 \end{array} \right)$$

	N	ΔS_p	$\Delta = (\mathbb{C} - \lambda E) U(\lambda)$	t_λ	$t_{\lambda,u}$
DIM1	70	$0.11937117960 8 \cdot 10^{-11}$	$0.112772248081 \cdot 10^{-9}$	0.02559	0.105789
DMTQL2		$0.102318153949 \cdot 10^{-11}$	$0.429462541484 \cdot 10^{-8}$	0.03536ж)	0.111572ж)
DHQR2		$0.818545231596 \cdot 10^{-11}$	$0.604962244614 \cdot 10^{-7}$		0.261952ж)
DBSECT+ DTINVIT		$0.234618255490 \cdot 10^{-6}$	$0.430588854865 \cdot 10^{-5}$	0.08798ж)	0.115555ж)
MATLR5	76	$0.176214598469 \cdot 10^{-11}$		0.04436	
MATLR7	82	$0.909494701773 \cdot 10^{-12}$		0.07028	
DBWLR1	74	$0.204636307899 \cdot 10^{-11}$		0.18976	
DBWLR2	45	$0.341060513165 \cdot 10^{-12}$		0.17480	
DCOWLR	55	$0.454747350886 \cdot 10^{-12}$		0.36119	
DESRG2		$0.818545231596 \cdot 10^{-11}$		0.12641ж)	
DCOMLR	43	жж) $0.102318153949 \cdot 10^{-11}$		0.33920	
DHQR	24	$0.818545232 \cdot 10^{-11}$		0.22873	

ж) Здесь дано время работы соответствующей стандартной программы из постоянной библиотеки ЭВМ ЕС – 1061.

жж) Все собственные значения, вычисленные с помощью стандартной программы DCOMLR, имеют мнимую часть, хотя матрица $\mathbb{C}_9$ симметрическая и у неё не должно быть комплексных собственных значений. Следовательно, появление вычисленных комплексных собственных значений есть следствие отмеченной во введении стратегии выбора ускоряющих коэффициентов $\overset{\infty}{W}$.

Таблица 5

$$H_1 = \begin{pmatrix} 5 & -2.5 & 3 & -2.5 \\ 1 & 2 & 2.5 & -2.5 \\ & -1 & 7 & -3 \\ & & 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = 4 - i \\ \lambda_3 = \lambda_4 = 4 + i \end{array}\right\} \text{ – точные собственные значения}$$

	Собственные значения				ΔS_p	t_λ	N
	$\bar\lambda_1$	$\bar\lambda_2$	$\bar\lambda_3$	$\bar\lambda_4$			
DBWLR1	4.0 1.0	4.0 -1.0	4.0 1.0	4.0 -1.0	0.0	0.00206	1
DHQR	$0.39999958 \cdot 10^{1}$ $0.10000065 \cdot 10^{1}$	$0.39999958 \cdot 10^{1}$ $-.10000065 \cdot 10^{1}$	$0.40000042 \cdot 10^{1}$ $0.99999351 \cdot 10^{0}$	$0.40000042 \cdot 10^{1}$ $-.99999351 \cdot 10^{0}$	$0.7016610 \cdot 10^{-13}$	0.01726	
DCOMLR	$0.40000007 \cdot 10^{1}$ $0.10000086 \cdot 10^{1}$	$0.39999993 \cdot 10^{1}$ $0.99999143 \cdot 10^{0}$	$0.40000127 \cdot 10^{1}$ $-.10000046 \cdot 10^{1}$	$0.39999873 \cdot 10^{1}$ $-.99999541 \cdot 10^{0}$	$0.2886580 \cdot 10^{-14}$	0.00930	

Таблица 6

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 & -4 \\ 1 & 7 & 7 & 6 \\ & -2 & -1 & -4 \\ & & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 \text{ – точные собственные значения}$$

	Собственные значения				ΔS_p	t_λ	N
	$\bar\lambda_1$	$\bar\lambda_2$	$\bar\lambda_3$	$\bar\lambda_4$			
DBWLR1	3.0 0.0	3.0 0.0	3.0 0.0	3.0 0.0	0.0	0.00229	1
DHQR	$0.29996097 \cdot 10^{1}$ 0.0	$0.30001319 \cdot 10^{1}$ $0.31874964 \cdot 10^{-3}$	$0.30001319 \cdot 10^{1}$ $-.31874964 \cdot 10^{-3}$	$0.30001265 \cdot 10^{1}$ 0.0	$0.5861976 \cdot 10^{-13}$	0.01971	
DCOMLR	$0.30001757 \cdot 10^{1}$ $0.86514962 \cdot 10^{-6}$	$0.30000022 \cdot 10^{1}$ $-.17721099 \cdot 10^{-3}$	$0.30000006 \cdot 10^{1}$ $0.17707260 \cdot 10^{-3}$	$0.29998215 \cdot 10^{1}$ $-.72676495 \cdot 10^{-6}$	$0.1199041 \cdot 10^{-13}$	0.02456	

Таблица 7

			DBWLR1	DBWLR2	DHQR	DCOWLR	DCOMLR
$H_3=\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$	I0	ΔS_p	$0.5329071\cdot 10^{-13}$	$0.3197442\cdot 10^{-13}$	$0.1421086\cdot 10^{-12}$	$0.3197442\cdot 10^{-13}$	x) $0.3552714\cdot 10^{-13}$
		t_λ	0.024642	0.05I7I2	0.057373	0.I00296	0.II8088
		N	29	30	II	33	30
	I00	ΔS_p	$0.4636291\cdot 10^{-11}$	$0.2607692\cdot 10^{-11}$	$0.1463718\cdot 10^{-10}$	$0.2525979\cdot 10^{-11}$	x) $0.2948752\cdot 10^{-11}$
		t_λ	II.347457	2I.900970	24.98II09	46.806656	48.460529
		N	304	283	I20	286	277
	200	ΔS_p	$0.2108891\cdot 10^{-10}$	$0.1080025\cdot 10^{-11}$	$0.5434231\cdot 10^{-10}$		
		t_λ	86.257600	I65.667039	I79.997329		
		N	600	566	237		
$H_4=\begin{bmatrix} 12 & 11 & 10 & \cdots & 1 \\ 11 & 11 & 10 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$	I2	ΔS_p	$0.2060574\cdot 10^{-12}$	$0.2060574\cdot 10^{-12}$	$0.6892265\cdot 10^{-12}$	$0.2060574\cdot 10^{-12}$	x) $0.2629008\cdot 10^{-12}$
		t_λ	0.063537	0.063980	0.098473	0.I29I66	0.I223I4
		N	32	32	I4	32	26

x) При вычислении собственных значений матриц H_3 и H_4 с использованием стандартной программы DCOMLR находятся комплексные собственные значения(хотя у этих матриц все собственные значения вещественны), что опять-таки является следствием стандартной стратегии выбора $\overset{(\omega)}{W}$.

Литература

I. В. В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. М., Наука, I977.

2. FORTRAN による数値計算ハンドブック . I978.

3. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений. М., Наука, I970.

4. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., Машиностроение, I976.

5. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-88-453, Дубна, I988.

6. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-88-787, Дубна, I988.

7. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-88-92I, Дубна, I988.

8. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-89-543, Дубна, I989.

9. В. В. Воеводин. Линейная алгебра. М., Наука, I980.

I0.Р. Н. Федорова, А. И. Широкова. Библиотека программ на ФОРТРАНе. т. VI . Описание программ. Дубна, I983.

II.Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз., I963.

I2.В. В. Воеводин, Ю. А. Кузнецов. Матрицы и вычисления. М., Наука, I984.

I3.Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-88-452, Дубна, I988.

I4.Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек. ОИЯИ, PII-88-736, Дубна, I988.

I5.Ю. А. Будагов, Г. А. Емельяненко, В. Г. Одинцов. ОИЯИ, PI0-9950 , Дубна, I976.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 июля I989 года.