объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-89-543

Г.А.Емельяненко, Им Ён Сек*

О МЕТОДАХ ПОИСКА ВСЕХ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ БЛОЧНО-ТРЕХДИАГОНАЛЬНЫХ, А ТАКЖЕ ПЯТИ- И СЕМИДИАГОНАЛЬНЫХ МАТРИЦ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

*Университет, Пхеньян, КНДР

1989

I. Введение

В [I÷7] нами были предложены отличные от известных эффективные методы для вычисления собственных значений и соответствующих им корневых векторов вещественных трехдиагональных матриц общего вида $\mathbb{C}$ (I.I) произвольной структуры и приведено описание стандартных программ на основе этих алгоритмов.

В этой работе мы обобщим результаты [I÷7] для нахождения собственных значений блочно-трехдиагональных, ленточных и, в частности, (пяти) семидиагональных матриц.

Ленточные матрицы являются частным случаем блочно-трехдиагональных матриц общего вида

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & & & \\ & p_3 & q_3 & r_4 & & \\ & & - & - & - & \\ & & & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & p_m & q_m \end{bmatrix} \tag{I.I}$$

,

где $\{q_k\}_{k=1}^{m}$ - диагональные матрицы-блоки (в общем случае разных размерностей), а $\{p_k, r_k\}_{k=2}^{m}$ - (под)наддиагональные блоки.

Известно (см., например, [8]), что если $\mathbb{C}$ (I.I) - неособенная блочно-трехдиагональная матрица, все ведущие блочные угловые миноры которой отличны от нуля, у которой также $det(q_1) \neq 0 \neq det(q_m)$, то для $\mathbb{C}$ (I.I) справедливы следующие матрично-факторизованные представления:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} E & & & \\ (-\beta_2) & E & & \\ & (-\beta_3) & E & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & (-\beta_m) & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 & & & \\ & \omega_2 & & \\ & & \omega_3 & \\ & & & \ddots \\ & & & & \omega_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & (-C_2) & & & \\ & E & (-C_3) & & \\ & & E & (-C_4) & \\ & & & \ddots & (-C_m) \\ & & & & E \end{bmatrix} \tag{I.2}$$

, где

$$\begin{cases} \beta_{k+1} = -(p_{k+1} \cdot \omega_k^{-1}) \\ C_{k+1} = -(\omega_k^{-1} \cdot r_{k+1}) \end{cases}, \quad \begin{cases} \omega_k = q_k + p_k C_k, \quad k = 1, 2, \ldots, m \\ C_1 = 0, \quad p_1 = E \end{cases} \tag{I.3}$$

-единичная матрица.

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} E & (-\hat{\beta}_2) & & & \\ & E & (-\hat{\beta}_3) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & E & (-\hat{\beta}_m) \\ & & & & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\omega}_1 & & & \\ & \hat{\omega}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \hat{\omega}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & & & \\ (-\hat{C}_2) & E & & \\ & & \ddots & \\ & & (-\hat{C}_m) & E \end{bmatrix} \tag{I.4}$$

, где

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{k+1} = -(r_{k+1} \cdot \hat{\omega}_{k+1}^{-1}) \\ \hat{C}_{k+1} = -(\hat{\omega}_{k+1}^{-1} \cdot p_{k+1}), \end{cases} \quad \begin{cases} \hat{\omega}_k = q_k + r_{k+1} \hat{C}_{k+1}; \quad k = 1, 2, \ldots, m \\ \hat{C}_{m+1} = 0, \quad r_{m+1} = E \end{cases} \tag{I.5}$$

-единичная матрица.

Эти представления будут использованы нами далее при модификации результатов [I÷7].

2. О методах поиска собственных значений блочно-трехдиагональных матриц

В этом параграфе мы получим обобщения некоторых методов из [I÷3] поиска собственных значений для блочно-трехдиагональных матриц.

Имеет место следующая

Теорема I. Пусть $\mathbb{C}$ (I.I) – вещественная блочно-трехдиагональная матрица, у которой $\{P_\ell \neq 0_\ell$ и $\tau_\ell \neq 0_\ell\}_{\ell=2}^{m}$ – ни одна из (в общем случае прямоугольных) матриц не является тождественно нулевой матрицей. Пусть также $det(q_1) \neq 0$ и $det(q_m) \neq 0$ и все ведущие блочные угловые миноры у $\mathbb{C}$ (I.I) отличны от нуля, а все собственные значения вещественны, различны и упорядочены, т.е.

$$|\mu_1| > |\mu_2| > \cdots > |\mu_n| \quad , \tag{2.I}$$

где $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_m$, а n_i – размерности матриц q_i для любых $i = 1, 2, \ldots, m$.

Тогда для нахождения подвекторов ${}_{n_i}\mu = \{{}_{n_i}\mu_1, \ldots, {}_{n_i}\mu_{n_i}\}$ вектора (2.I) собственных значений матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) могут быть использованы следующие матричные процессы:

I. (μ_Λ – метод). Если $\|P_i^{(k+1)}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i^{(k)} = q_i^{(k)} - [P_i^{(k)} \lambda_{i-1}^{(k)-1}] \cdot \tau_i , \quad \lambda_1^{(k)} = q_1^{(k)} ; \; i = 2, 3, \ldots, m \\ &P_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} [P_i^{(k)} \lambda_{i-1}^{(k)-1}] , \; i = 2, 3, \ldots, m \\ &q_{i-1}^{(k+1)} = \lambda_{i-1}^{(k)} + \tau_i \cdot [P_i^{(k)} \cdot \lambda_{i-1}^{(k)-1}] , \; q_m^{(k+1)} = \lambda_m^{(k)} ; \; i = 2, 3, \ldots, m \end{aligned}\right\} , \tag{2.2}$$

Если $\|P_{i^*}^{(k^*)}\| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ для некоторого $i = i^*$, то

$$\{ P_\ell^{(k^*+1)} = 0_\ell , \quad q_\ell^{(k^*+1)} = \lambda_\ell^{(k^*)} , \quad q_\ell^{(k^*+1)} = q_\ell^{(k^*)} \}_{\ell = i^*}^{m} \tag{2.3}$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{ q_i^{(k+1)}$ или $\lambda_i^{(k+1)} \}$ для любого i из $1 \leqslant i \leqslant m$ при $k \to \infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и являются компонентами подвектора ${}_{n_i}\mu$.

2. ($\mu_{\Lambda T}$ – метод). Если $\|T_i^{(k+1)}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{aligned} &\lambda_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} - T_i^{(k+1)} \cdot \tau_i + \tau_{i+1} \cdot T_{i+1}^{(k)} ; \quad T_{m+1}^{(k)} = 0_{m+1} = \tau_{m+1} ; \; i = 1, \ldots, m \\ &T_i^{(k+1)} = \lambda_i^{(k)} \cdot T_i^{(k)} \cdot \lambda_{i-1}^{(k+1)-1} ; \quad T_1^{(k+1)} = 0_1 ; \; i = 2, 3, \ldots, m \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

, где

$$\left.\begin{aligned} &T_i^{(1)} = P_i^{(1)} \cdot (q_{i-1}^{(1)} - T_{i-1}^{(1)} \tau_{i-1})^{-1} ; \quad T_1^{(1)} = 0_1 ; \; i = 2, 3, \ldots, m \\ &\lambda_i^{(1)} = (q_i^{(1)} - T_i^{(1)} \cdot \tau_i) ; \quad i = 1, 2, \ldots, m \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Если $\|T_{i^*}^{(k^*)}\| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ для некоторого $i = i^*$, то

$$\{ T_\ell^{(k^*+1)} = 0_\ell , \quad \lambda_\ell^{(k^*+1)} = \lambda_\ell^{(k^*)} \}_{\ell = i^*}^{m} . \tag{2.6}$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{ \lambda_i^{(k)} \}$ для любого i из $1 \leqslant i \leqslant m$ при $k \to \infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$(I.I) и являются компонентами подвектора ${}_{n_i}\mu$.

3. (μ_G – метод). Если $\|P_j^{(k+1)}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)} = q_{j-1}^{(k)} - \tau_j \cdot [\tilde{\lambda}_j^{(k)-1} \cdot P_j^{(k)}] , \quad \tilde{\lambda}_m^{(k)} = q_m^{(k)} , \; j = m, m-1, \ldots, 2 \\ &P_j^{(k+1)} = [\tilde{\lambda}_j^{(k)-1} \cdot P_j^{(k)}] \cdot \tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)} ; \quad j = m, m-1, \ldots, 2 \\ &q_j^{(k+1)} = \tilde{\lambda}_j^{(k)} + [\tilde{\lambda}_j^{(k)-1} \cdot P_j^{(k)}] \cdot \tau_j ; \quad \tau_1 = 0_1 , \; P_1^{(k)} = 0_1 ; \; j = m, m-1, \ldots, 1 \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

Если $\|P_{j^*}^{(k^*)}\| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ для некоторого $j = j^*$, то

$$\{ P_\ell^{(k^*+1)} = 0_\ell , \quad q_\ell^{(k^*+1)} = \tilde{\lambda}_\ell^{(k^*)} , \quad q_\ell^{(k^*+1)} = q_\ell^{(k^*)} \}_{\ell = 1}^{j^*} . \tag{2.8}$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{ q_j^{(k+1)}$ или $\tilde{\lambda}_j^{(k)} \}$ для любого j из $1 \leqslant j \leqslant m$ при $k \to \infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$(I.I) и являются компонентами подвектора ${}_{n_j}\mu$.

4. (μ_{GS} – метод). Если $\|S_j^{(k+1)}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\lambda}_j^{(k+1)} = \tilde{\lambda}_j^{(k)} - \tau_{j+1} \cdot S_j^{(k+1)} + S_{j-1}^{(k)} \cdot \tau_j ; \quad \tau_{m+1} = 0_{m+1} , \; \tau_1 = 0_1 ; \; j = m, m-1, \ldots, 1 \\ &S_{j-1}^{(k+1)} = \tilde{\lambda}_j^{(k+1)-1} \cdot S_{j-1}^{(k)} \cdot \tilde{\lambda}_{j-1}^{(k)} ; \quad S_m^{(k+1)} = 0_m ; \; j = m, m-1, \ldots, 2 \end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

, где

$$\left.\begin{aligned} &S_{j-1}^{(1)} = (q_j^{(1)} - \tau_{j+1} \cdot S_j^{(1)})^{-1} \cdot P_j^{(1)} ; \quad S_m^{(1)} = 0_m ; \; j = m, m-1, \ldots, 2 \\ &\tilde{\lambda}_j^{(1)} = (q_j^{(1)} - \tau_{j+1} \cdot S_j^{(1)}) ; \quad j = m, m-1, \ldots, 1 \end{aligned}\right\} . \tag{2.I0}$$

Если $\|S_{j^*}^{(k^*)}\| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ для некоторого $j = j^*$, то

$$\{ S_\ell^{(k^*+1)} = 0_\ell , \quad \tilde{\lambda}_\ell^{(k^*+1)} = \tilde{\lambda}_\ell^{(k^*)} \}_{\ell = 1}^{j^*} . \tag{2.II}$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{ \tilde{\lambda}_j^{(k)} \}$ для любого j из $1 \leqslant j \leqslant m$ при $k \to \infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$(I.I) и являются компонентами подвектора ${}_{n_j}\mu$.

Для подматриц $\{\lambda_\ell^{(\infty)}\}_{\ell=1}^{m}$ и $\{\tilde{\lambda}_\ell^{(\infty)}\}_{\ell=1}^{m}$ выполняются следующие предельные равенства

$$\lim_{k \to \infty} \lambda_\ell^{(k)} = \lim_{k \to \infty} \tilde{\lambda}_{m-\ell+1}^{(k)} , \quad \ell = 1, 2, \ldots, m . \tag{2.I2}$$

Доказательство. Если использовать матричные факторизации (I.2) ÷ (I.5), то есть процедуры LR (либо RL) – разложений $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}} = \overset{(\infty)}{L}\,\overset{(\infty)}{R}$

(либо $\overset{(k)}{R}\cdot\overset{(k)}{L}$) $\to \overset{(k+1)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{R}\cdot\overset{(k)}{L}$ (либо $\overset{(k)}{L}\cdot\overset{(k)}{R}$), то получаем по аналогии с [I÷3] процедуры (2.2) (или (2.7)). Из (2.I) и (2.I2) следует, что при $k\to\infty$ имеют место неравенства $\|\overset{(k)}{\lambda}_i\| < \|\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}\|$ (или $\|\overset{(k)}{\lambda}_i\| > \|\overset{(k)}{\lambda}_{i-1}\|$) и, следовательно, асимптотические пределы $\overset{(k+1)}{P_i} \to O_i$ (или $\overset{(k+1)}{P_j} \to O_j$). Откуда имеем $\overset{(k+1)}{q_i} = \overset{(k)}{\lambda}_i$ при $k\to\infty$ в силу (2.2) и (2.7). Следовательно, при $k\to\infty$ итерационная матрица $\overset{(k)}{\mathbb{C}}$ приобретает вид

$$\overset{(\infty)}{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} (\overset{(\infty)}{q_1} = \overset{(\infty)}{\lambda}_1) & \tau_2 & & & 0 \\ & (\overset{(\infty)}{q_2} = \overset{(\infty)}{\lambda}_2) & \tau_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & (\overset{(\infty)}{q}_{m-1} = \overset{(\infty)}{\lambda}_{m-1}) & \tau_m \\ & & & & (\overset{(\infty)}{q_m} = \overset{(\infty)}{\lambda}_m) \end{bmatrix}. \qquad (*)$$

Следовательно, собственные значения предельной матрицы $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}$ состоят из ${}_{n_i}\mu$ – множеств собственных значений подматриц ($\overset{(\infty)}{q_i} = \overset{(\infty)}{\lambda}_i$). С другой стороны, известно также подобие ($\overset{(0)}{\mathbb{C}} = \mathbb{C}$) $\backsim \overset{(\infty)}{\mathbb{C}}$ матриц $\mathbb{C}$ (I.I) и $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}$ (*). Следовательно, упорядоченное $\{{}_{n_i}\mu\}_{i=1}^{m}$ – множество собственных значений подматриц ($\overset{(\infty)}{q_i} = \overset{(\infty)}{\lambda}_i$) образует вектор собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I). Из (2.2) (или (2.7)) получаем в соответствии с принципом исчерпания (≡ фиксации) по аналогии с [I÷3] (2.3) (или (2.8)). Далее, опять-таки по аналогии с [I÷3], можем ввести процессы (2.4)÷(2.6) и (2.9)÷(2.II). Равенства (2.I2) очевидны. Теорема доказана.

Теорема 2. Пусть $\mathbb{C}$ (I.I) – вещественная блочно-трехдиагональная матрица, $\{\mu_i\}_{i=1}^{n}$ – все собственные значения которой вещественны, различны и упорядочены в виде (2.I), а n_i – размерности её диагональных квадратных блоков q_i при любых i из $1 \le i \le m$. Пусть также $\{\tau_i \ne O_i$ и $P_i \ne O_i\}_{i=1}^{m}$ – ни один из внедиагональных блоков этой матрицы тождественно не равен O_i – нулевой матрице. Тогда для нахождения подвекторов ${}_{n_i}\mu = \{{}_{n_i}\mu_1, {}_{n_i}\mu_2, \dots, {}_{n_i}\mu_{n_i}\}$ вектора (2.I) собственных значений матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) могут быть использованы следующие ускоренные матричные процессы:

I. ($\mu_A\, dW$ – метод). Если $\|\overset{(k+1)}{P_i}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\lambda}_i = (\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W}E_i) - [\overset{(k)}{P_i}\,\overset{(k)}{\lambda}{}_{i-1}^{-1}]\cdot\tau_i\,;\quad \overset{(k)}{\lambda}_1 = (\overset{(k)}{q_1} - \overset{(k)}{W}E_1);\ i = 2, 3, \dots, m \\ &\overset{(k+1)}{P_i} = \overset{(k)}{\lambda}_i\,[\overset{(k)}{P_i}\,\overset{(k)}{\lambda}{}_{i-1}^{-1}]\,;\quad i = 2, 3, \dots, m \\ (*)\ &\overset{(k+1)}{q_i} = (\overset{(k)}{\lambda}_i + \overset{(k)}{W}E_i) + \tau_{i+1}[\overset{(k)}{P}_{i+1}\,\overset{(k)}{\lambda}{}_i^{-1}]\,;\quad \overset{(k+1)}{q_m} = (\overset{(k)}{\lambda}_m + \overset{(k)}{W}E_m);\ i = 1, 2, \dots, m-1 \\ (**)\ &\overset{(k+1)}{q_i} = \overset{(k)}{\lambda}_i + \tau_{i+1}[\overset{(k)}{P}_{i+1}\cdot\overset{(k)}{\lambda}{}_i^{-1}]\,;\quad \overset{(k+1)}{q_m} = \overset{(k)}{\lambda}_m\,;\ i = 1, 2, \dots, m-1 \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

Если $\|\overset{(k^*)}{P_{i^*}}\|$ *) $\le \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \ge 2$ для некоторого $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{P_\ell} = O_\ell,\ \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = (\overset{(k^*)}{\lambda}_\ell + \overset{(k^*)}{W}E_\ell) \text{ для } (*) \text{ (либо } \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = \overset{(k^*)}{\lambda}_\ell \text{ для } (**))\right\}_{\ell = i^*}^{m} \quad (2.14)$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{\overset{(k+1)}{q_i}\}_{i=1}^{m}$ для (*)

*) В этой и в предыдущей теоремах $\|x\|$ – символом мы обозначили просто норму любой матрицы x .

(либо $\{(\overset{(k+1)}{q_i} + \sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{W})\}_{i=1}^{m}$ для (**)) для любого i из $1 \le i \le m$ при $k\to\infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и являются компонентами подвекторов ${}_{n_i}\mu$.

2. ($\mu_G\, d\bar{W}$ – метод). Если $\|\overset{(k+1)}{P_j}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left.\begin{aligned} &\overset{(k)}{\bar{\lambda}}_{j-1} = (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{\bar{W}}E_{j-1}) - \tau_j[\overset{(k)}{\bar{\lambda}}{}_j^{-1}\,\overset{(k)}{P_j}],\ \overset{(k)}{\bar{\lambda}}_m = (\overset{(k)}{q_m} - \overset{(k)}{\bar{W}}E_m);\ j = m, \dots, 2 \\ &\overset{(k+1)}{P_j} = [\overset{(k)}{\bar{\lambda}}{}_j^{-1}\,\overset{(k)}{P_j}]\cdot\overset{(k)}{\bar{\lambda}}_{j-1}\,;\quad j = m, m-1, \dots, 2 \\ (*)\ &\overset{(k+1)}{q_j} = (\overset{(k)}{\bar{\lambda}}_j + \overset{(k)}{\bar{W}}E_j) + [\overset{(k)}{\bar{\lambda}}{}_j^{-1}\,\overset{(k)}{P_j}]\cdot\tau_j\,;\quad \overset{(k+1)}{q_1} = \overset{(k)}{\bar{\lambda}}_1 + \overset{(k)}{\bar{W}}E_1\,;\ j = m, m-1, \dots, 2 \\ (**)\ &\overset{(k+1)}{q_j} = \overset{(k)}{\bar{\lambda}}_j + [\overset{(k)}{\bar{\lambda}}{}_j^{-1}\,\overset{(k)}{P_j}]\cdot\tau_j\,;\quad \overset{(k+1)}{q_1} = \overset{(k)}{\bar{\lambda}}_1\,;\ j = m, m-1, \dots, 2 \end{aligned}\right\} \quad (2.15)$$

Если $\|\overset{(k^*)}{P_{j^*}}\| \le \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \ge 2$ для некоторого $j = j^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{P_\ell} = O_\ell,\ \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = (\overset{(k^*)}{\bar{\lambda}}_\ell + \overset{(k^*)}{\bar{W}}E_\ell) \text{ для } (*) \text{ (либо } \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = \overset{(k^*)}{\bar{\lambda}}_\ell \text{ для } (**))\right\}_{\ell=1}^{j^*} \quad (2.16)$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{\overset{(k+1)}{q_i}\}_{i=1}^{m}$ для (*) (либо $\{(\overset{(k+1)}{q_i} + \sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{\bar{W}})\}_{i=1}^{m}$ для (**)) для любого i из $1 \le i \le m$ при $k\to\infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и являются компонентами подвекторов ${}_{n_i}\mu$.

3. ($\mu_{AT}\, dW$ – метод). Если $\|\overset{(k+1)}{T_i}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left.\begin{aligned} (*)\ &\overset{(k+1)}{q_i} = \overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{T_i}\tau_i + \tau_{i+1}\overset{(k)}{T}_{i+1},\ \overset{(k)}{T}_{m+1} = O_{m+1},\ \tau_{m+1} = O_{m+1},\ i = 1, 2, \dots, m \\ (**)\ &\overset{(k+1)}{q_i} = [(\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W}E_i) - \overset{(k)}{T_i}\tau_i] + \tau_{i+1}\overset{(k)}{T}_{i+1},\ \overset{(k)}{T}_{m+1} = O_{m+1},\ \tau_{m+1} = O_{m+1},\ i = 1, 2, \dots, m \\ &\overset{(k+1)}{T_i} = [(\overset{(k)}{q_i} - \overset{(k)}{W}E_i) - \overset{(k)}{T_i}\tau_i]\cdot\overset{(k)}{T_i}\cdot[(\overset{(k+1)}{q}_{i-1} - \overset{(k+1)}{W}E_{i-1}) - \overset{(k+1)}{T}_{i-1}\tau_{i-1}]^{-1},\ \overset{(k+1)}{T_1} = O_1;\ i = 1, 2, \dots, m \end{aligned}\right\} \quad (2.17)$$

, где

$$\overset{(1)}{T_i} = \overset{(1)}{P_i}\cdot(\overset{(1)}{q}_{i-1} - \overset{(1)}{T}_{i-1}\tau_{i-1})^{-1},\ \overset{(1)}{T_1} = O_1,\quad i = 2, 3, \dots, m \quad , \text{ и } \overset{(1)}{W} = 0 \quad (2.18)$$

Если $\|\overset{(k^*)}{T_{i^*}}\| \le \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \ge 2$ для некоторого $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{T_\ell} = O_\ell,\ \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = \overset{(k^*)}{q_\ell} \text{ для } (*) \text{ (либо } \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = \overset{(k^*)}{q_\ell} - \overset{(k^*)}{W}E_\ell \text{ для } (**)\right\}_{\ell = i^*}^{m} \quad (2.19)$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{\overset{(k+1)}{q_i}\}_{i=1}^{m}$ для (*) (либо $\{(\overset{(k+1)}{q_i} + \sum_{n=1}^{k}\overset{(n)}{W})\}_{i=1}^{m}$ для (**)) для любого i из $1 \le i \le m$ при $k\to\infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и являются компонентами подвекторов ${}_{n_i}\mu$.

4. ($\mu_{GS}\, dW$ – метод). Если $\|\overset{(k+1)}{S_j}\| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$\left.\begin{aligned} (*)\ &\overset{(k+1)}{q_j} = \overset{(k)}{q_j} - \tau_{j+1}\overset{(k)}{S_j} + \overset{(k)}{S}_{j-1}\tau_j\,;\quad \tau_{m+1} = O_{m+1},\ \tau_1 = O_1\,;\ j = m, \dots, 1 \\ (**)\ &\overset{(k+1)}{q_j} = (\overset{(k)}{q_j} - \overset{(k)}{W}E_j) - \tau_{j+1}\overset{(k)}{S_j} + \overset{(k)}{S}_{j-1}\tau_j\,;\ \tau_{m+1} = O_{m+1},\ \tau_1 = O_1\,;\ j = m, \dots, 1 \\ &\overset{(k+1)}{S}_{j-1} = [(\overset{(k+1)}{q_j} - \overset{(k+1)}{W}E_j) - \tau_{j+1}\overset{(k+1)}{S_j}]^{-1}\overset{(k)}{S}_{j-1}[(\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{W}E_{j-1}) - \tau_j\overset{(k)}{S}_{j-1}],\ \overset{(k+1)}{S_m} = O_m\,, \\ &j = m, m-1, \dots, 2 \end{aligned}\right\} \quad (2.20)$$

, где

$$\overset{(1)}{S}_{j-1} = (\overset{(1)}{q_j} - \tau_{j+1}\overset{(1)}{S_j})^{-1}\cdot\overset{(1)}{P_j}\,;\quad \overset{(1)}{S_m} = O_m\,;\ j = m, m-1, \dots, 2 \quad , \text{ и } \overset{(1)}{W} = 0 \quad (2.21)$$

Если $\|\overset{(k^*)}{S_{j^*}}\| \le \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \ge 2$ для некоторого $j = j^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*+1)}{S_\ell} = O_\ell,\ \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = \overset{(k^*)}{q_\ell} \text{ для } (*) \text{ (либо } \overset{(k^*+1)}{q_\ell} = \overset{(k^*)}{q_\ell} - \overset{(k^*)}{\bar{W}}E_\ell \text{ для } (**))\right\}_{\ell=1}^{j^*} \quad (2.22)$$

При этом собственные значения итерационных матриц $\{\overset{(k+1)}{q_i}\}_{i=1}^{m}$ для (*)

(либо $\{(\overset{(k+1)}{q}_i + \sum_{n=1}^{k} \overset{(n)}{W})\}_{i=1}^{m}$ для (жж)) для любого i из $1 \leq i \leq m$ при $k \to \infty$ стремятся к множеству собственных значений исходной матрицы $\mathbb{C}$ (I.I) и являются компонентами подвекторов ${}_{n_j}\mu$.

Доказательство теоремы прямо следует из теоремы I, если предположить, что в каждой K – итерации*) ускоряющие коэффициенты $\overset{(k)}{W}$ (или $\overset{(k)}{W}$) выбираются таким образом, чтобы ведущие угловые блочные миноры итерационной матрицы $\overset{(k)}{\mathbb{C}}(\overset{(k)}{W}) = (\overset{(k)}{\mathbb{C}} - \overset{(k)}{W}E)$ были бы отличны от нуля и при этом выполнялись бы соответствующие неравенства $\| \overset{(k)}{\lambda}_i(w) \| < \| \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}(w) \|$ либо $\| \overset{(k)}{\lambda}_i(\tilde{w}) \| \geq \| \overset{(k)}{\lambda}_{i-1}(\tilde{w}) \|$, а также $\|(\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W}E_i) - \overset{(k)}{T}_i r_i \| \leq \| (\overset{(k+1)}{q}_{i-1} - \overset{(k+1)}{W}E_{i-1}) - \overset{(k+1)}{T}_{i-1} r_i \|$ либо $\|(\overset{(k+1)}{q}_j - \overset{(k+1)}{W}E_j) - r_{j+1} \overset{(k+1)}{S}_j \| \geq \| (\overset{(k)}{q}_{j-1} - \overset{(k)}{W}E_{j-1}) - r_j \overset{(k)}{S}_{j-1} \|$. Отметим, что d – начальные сдвиги, обеспечивающие отличие от нуля ведущих блочных угловых миноров, можно выбирать, воспользовавшись идеей из [2,3,5]. Теорема установлена.

3. Нахождение собственных значений пяти- и семидиагональных матриц общего вида на основе LR – метода

В настоящем параграфе мы приводим обобщение новых методов [2,5,7] выбора начальных сдвигов и итерационных ускоряющих коэффициентов в LR-алгоритме поиска собственных значений пяти- и семидиагональных матриц

$$\mathbb{C}_5\,[=\overset{(k)}{\mathbb{C}}_5] = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & a_4 & & & & \\ b_3 & p_3 & q_3 & r_4 & a_5 & & & \\ & b_4 & p_4 & q_4 & r_5 & a_6 & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & & b_{m-2} & p_{m-2} & q_{m-2} & r_{m-1} & a_m \\ & & & & b_{m-1} & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & & b_m & p_m & q_m \end{bmatrix}, \qquad (3.1)$$

$$\mathbb{C}_7\,[=\overset{(k)}{\mathbb{C}}_7] = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & f_4 & & & & & \\ p_2 & q_2 & r_3 & a_4 & f_5 & & & & \\ b_3 & p_3 & q_3 & r_4 & a_5 & f_6 & & & \\ z_4 & b_4 & p_4 & q_4 & r_5 & a_6 & f_7 & & \\ & z_5 & b_5 & p_5 & q_5 & r_6 & a_7 & f_8 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ & & z_{m-3} & b_{m-3} & p_{m-3} & q_{m-3} & r_{m-2} & a_{m-1} & f_m \\ & & & z_{m-2} & b_{m-2} & p_{m-2} & q_{m-2} & r_{m-1} & a_m \\ & & & & z_{m-1} & b_{m-1} & p_{m-1} & q_{m-1} & r_m \\ & & & & & z_m & b_m & p_m & q_m \end{bmatrix}. \qquad (3.2)$$

Теорема 3. Пусть собственные значения матрицы $\overset{(d)}{\mathbb{C}}_5 = (\overset{(d)}{\mathbb{C}}_5 + E \cdot d)$, у которой $\overset{(d)}{\mathbb{C}}_5$ есть пятидиагональная матрица общего вида (3.I) и d – начальный сдвиг*) удовлетворяют следующему условию упорядоченности

$$|\lambda_1(d)| > |\lambda_2(d)| > \cdots > |\lambda_{m-1}(d)| > |\lambda_m(d)| > 0 . \qquad (3.3)$$

Тогда, если в LR – методе [9,3] для вычисления собственных значений пятидиагональных матриц $\mathbb{C}_5$(3.I) выбирать $\overset{(k)}{W}_j$ – итерационные коэффициенты – сдвиги для любого $j = m, m-1, \ldots, 2$ и любого $K = 1, 2, \cdots$ в виде

$$\overset{(k)}{W}_j(d) = \begin{cases} 0, \text{ если } |\overset{(k)}{p}_j| \geq 1, \\ \overset{(k)}{q}_j - (\overset{(k)}{b}_j a_j)/\overset{(k)}{q}_{j-1}, \text{ если } |\overset{(k)}{p}_j| < 1 \text{ и } |\overset{(k)}{b}_j| > \varepsilon, \\ \overset{(k)}{q}_j - (\overset{(k)}{p}_j \overset{(k)}{r}_j)/\overset{(k)}{q}_{j-1}, \text{ если } |\overset{(k)}{p}_j| < 1 \text{ и } |\overset{(k)}{b}_j| \leq \varepsilon, \end{cases} \qquad (3.4)$$

то в ускоренном таким образом LR – методе можно достичь квадратического (кубического**)) ускорения сходимости , т.е.

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(k+1)}{b}_j(\overset{(k)}{W}_j) \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}{}_5^2), \quad \overset{(k+1)}{p}_j(\overset{(k)}{W}_j) \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}{}_5^2), \text{ где} \\ \overset{(k)}{\varepsilon}_5 = \max(\overset{(k)}{\varepsilon}_p, \overset{(k)}{\varepsilon}_b), \text{ где } |\overset{(k)}{b}_j| < \overset{(k)}{\varepsilon}_b, \ |\overset{(k)}{p}_j| < \overset{(k)}{\varepsilon}_p \text{ и} \\ |\overset{(k)}{b}_j| \to 0, \quad |\overset{(k)}{p}_j| \to 0 \quad \text{при } k \to \infty \text{ [9,3]} \end{array}\right\}. \qquad (3.5)$$

Доказательство. Пусть

$$\overset{(k)}{L} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ \overset{(k)}{l}_2 & 1 & & & & \\ \overset{(k)}{c}_3 & \overset{(k)}{l}_3 & 1 & & & \\ & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ & & \overset{(k)}{c}_{m-2} & \overset{(k)}{l}_{m-2} & 1 & \\ & & & \overset{(k)}{c}_{m-1} & \overset{(k)}{l}_{m-1} & 1 \\ & & & & \overset{(k)}{c}_m \ \overset{(k)}{l}_m & 1 \end{bmatrix}, \qquad \overset{(k)}{R} = \begin{bmatrix} \overset{(k)}{r}_1 & \overset{(k)}{e}_2 & a_3 & & \\ & \overset{(k)}{r}_2 & \overset{(k)}{e}_3 & a_4 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & \overset{(k)}{r}_{m-2} & \overset{(k)}{e}_{m-1} & a_m \\ & & & \overset{(k)}{r}_{m-1} & \overset{(k)}{e}_m \\ & & & & \overset{(k)}{r}_m \end{bmatrix}. \qquad (3.6)$$

Известно, что имеет место модифицированный LR – алгоритм (т.е. $\overset{(k)}{\mathbb{C}}_5 - \overset{(k)}{W}E = \overset{(k)}{L}\overset{(k)}{R} \to \overset{(k+1)}{\mathbb{C}}_5 = \overset{(k)}{R}\overset{(k)}{L} + \overset{(k)}{W}E$) для вычисления собственных значений пятидиагональных матриц, у которых все ведущие угловые миноры отличны от нуля, т.е. существует факторизация $\overset{(k)}{\mathbb{C}}_5 = \overset{(k)}{L} \cdot \overset{(k)}{R}$. Пусть ε – константа, обусловленная разрядной сеткой ЭВМ. Тогда из $(\overset{(k)}{\mathbb{C}} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\overset{(k)}{R} \to \overset{(k+1)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{R}\overset{(k)}{L} + \overset{(k)}{W}E$ имеем:

Если $|\overset{(k+1)}{b}_i| > \varepsilon$ и $|\overset{(k)}{p}_i| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \cdots$, то

$$\begin{array}{l} \overset{(k)}{r}_i = (\overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{W}) - \overset{(k)}{l}_i \cdot \overset{(k)}{e}_i - \overset{(k)}{c}_i \cdot a_i ; \ \overset{(k)}{l}_1 = 0, \ \overset{(k)}{c}_1 = \overset{(k)}{c}_2 = 0, \ i = 1, 2, \ldots, m \\ \overset{(k)}{l}_i = (\overset{(k)}{p}_i - \overset{(k)}{c}_i \cdot \overset{(k)}{e}_{i-1}) / \overset{(k)}{r}_{i-1} ; \ \overset{(k)}{c}_2 = 0, \ i = 2, 3, \ldots, m \\ \overset{(k)}{c}_i = \overset{(k)}{b}_i / \overset{(k)}{r}_{i-2} ; \ i = 3, 4, \cdots, m \\ \overset{(k)}{e}_i = \overset{(k)}{r}_i - \overset{(k)}{l}_{i-1} \cdot a_i ; \ a_2 = 0 ; \ i = 2, 3, \cdots, m \end{array} \qquad (3.7)$$

---

*) Общая стратегия выбора ускоряющих коэффициентов $\overset{(k)}{W}$ (либо $\overset{(k)}{W}$) для блочных итерационных процессов указанного вида пока что не разработана.

*) Теоретически стратегия выбора d – начального сдвига нами обсуждалась в [2]. Однако в [5] нами описана оптимальная практическая стратегия, которой мы пользуемся в наших программах.

**) Мы приводим ниже доказательство лишь для квадратического ускорения $(\overset{(k)}{\mathbb{C}} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\overset{(k)}{R} \to \overset{(k+1)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{R}\overset{(k)}{L} + \overset{(k)}{W}E$, хотя на практике обеспечивается и кубические ускорение $(\overset{(k)}{\mathbb{C}} - \overset{(k)}{W}E) = \overset{(k)}{L}\overset{(k)}{R} \to \overset{(k+1)}{\mathbb{C}} = \overset{(k)}{R}\overset{(k)}{L}$ сходимости.

$$
\left.\begin{array}{l}
q_i^{(k+1)} = (r_i^{(k)} + W^{(k)}) + e_{i+1}^{(k)} \cdot l_{i+1}^{(k)} + a_{i+2} \cdot c_{i+2}^{(k)} , \\
\quad q_{m-1}^{(k+1)} = r_{m-1}^{(k)} + W^{(k)} + e_m^{(k)} \cdot l_m^{(k)} , \quad q_m^{(k+1)} = r_m^{(k)} + W^{(k)} ; \; i = 2, 3, \dots, m-2 . \\
z_i^{(k+1)} = e_i^{(k)} + a_{i+1} l_{i+1}^{(k)} \; ; \; z_m^{(k+1)} = e_m^{(k)} \; ; \; i = 2, 3, \dots, m-1 . \\
p_i^{(k+1)} = r_i^{(k)} l_i^{(k)} + e_{i+1}^{(k)} \cdot c_{i+1}^{(k)} \; ; \; p_m^{(k+1)} = r_m^{(k)} \cdot l_m^{(k)} \; ; \; i = 2, 3, \dots, m-1 . \\
b_i^{(k+1)} = r_i^{(k)} \cdot c_i^{(k)} \; ; \; i = 3, 4, \dots, m .
\end{array}\right\} , \qquad (3.8)
$$

$$
\lambda_i = \lim_{k \to \infty} q_i^{(k+1)} - d , \quad i = 1, 2, \dots, m . \qquad (3.9)
$$

Если $|b_{i^*}^{(k^*)}| \leqslant \varepsilon$ и $|p_{i^*}^{(k^*)}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ при некотором $i = i^*$, то

$$
\left\{ b_n^{(k^*)} = 0, \; p_n^{(k^*)} = 0, \; q_n^{(k^*+1)} = q_n^{(k^*)} = (r_n^{(k^*)} + W^{(k^*)}) \right\}_{n=i^*}^{m} . \qquad (3.10)
$$

Пусть предварительно в LR – методе сделано k итераций без ускорения, после которых для некоторого j выполнены условия $|p_j^{(k)}| < 1$ и $1 > |b_j^{(k)}| > \varepsilon$. Тогда если выбирать ускоряющий коэффициент $W_j^{(k)}$ в виде $(3.4)_{2)}$, то из (3.7)÷(3.8) следует

$$
b_j^{(k+1)}(W_j) = \frac{1}{r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \left\{ b_j^{(k)}(W_j) \left[\left(\frac{1}{q_{j-1}^{(k)}(W_j)} - \frac{1}{r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \right) \cdot a_j + \frac{e_{j-1}^{(k)} \cdot e_j^{(k)}}{r_{j-1}^{(k)}(W_j) \cdot r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \right] - \frac{e_j^{(k)}}{r_{j-1}^{(k)}(W_j)} \cdot p_j^{(k)}(W_j) \right\} \cdot b_j^{(k)}(W_j) . \qquad (3.11)
$$

Следовательно, если $|\varepsilon_b^{(k)}| < 1$, $|\varepsilon_p^{(k)}| < 1$ и положить

$$
\tilde{M}_j^{(k)} = \left| \frac{1}{r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \left[\left(\frac{1}{q_{j-1}^{(k)}(W_j)} - \frac{1}{r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \right) \cdot a_j + \frac{e_{j-1}^{(k)} \, e_j^{(k)}}{r_{j-1}^{(k)}(W_j) \cdot r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \right] \right| + \left| \frac{e_j^{(k)}}{r_{j-1}^{(k)}(W_j) \cdot r_{j-2}^{(k)}(W_j)} \right| ,
$$

то из (3.11) получаем

$$
| b_j^{(k+1)}(W_j) | < \tilde{M}_j^{(k)} \cdot \varepsilon_s^{(k)\,2} , \quad \text{т.е.} \quad b_j^{(k+1)}(W_j) \longrightarrow O(\varepsilon_s^{(k)\,2}) . \qquad (3.12)
$$

Продолжим доказательство. Пусть $|b_j^{(k)}| \leqslant \varepsilon$ и $|p_j^{(k)}| < 1$. Тогда если выбирать ускоряющий коэффициент $W_j^{(k)}$ в виде $(3.4)_{3)}$, то также из (3.7)÷(3.8) получаем с учетом (3.10)

$$
p_j^{(k+1)}(W_j) = \frac{1}{r_{j-1}^{(k)}(W_j)} \left(\frac{z_j^{(k)}}{q_{j-1}^{(k)}} - \frac{e_j^{(k)}}{r_{j-1}^{(k)}} \right) \cdot p_j^{(k)\,2} + O(\varepsilon) . \qquad (3.13)
$$

Если $|p_j^{(k)}| < \varepsilon_p^{(k)} < 1$, то из (3.13) получаем

$$
| p_j^{(k+1)}(W_j) | < \tilde{M}_j^{(k)} \cdot \varepsilon_p^{(k)\,2} , \quad \text{т.е.} \quad p_j^{(k+1)}(W_j) \longrightarrow O(\varepsilon_s^{(k)\,2}) , \quad \text{где} \qquad (3.14)
$$

$$
\tilde{M}_j^{(k)} = \left| \frac{1}{r_{j-1}^{(k)}(W_j)} \left(\frac{z_j^{(k)}}{q_{j-1}^{(k)}(W_j)} - \frac{e_j^{(k)}}{r_{j-1}^{(k)}(W_j)} \right) \right| .
$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть собственные значения матрицы $\tilde{C}_\gamma^{(k)} = (C_\gamma^{(k)} + E d)$, у которой C_γ есть семидиагональная матрица общего вида (3.2) и d – начальный сдвиг*), удоблетворяют следующему условию упорядоченности

$$
|\lambda_1(d)| > |\lambda_2(d)| > \dots > |\lambda_{m-1}(d)| > |\lambda_m(d)| > 0 . \qquad (3.3)
$$

*) Стратегия выбора d – начального сдвига такая же, как и в теореме 3 для пятидиагональных матриц.

Тогда если в LR – методе [9,3] для вычисления собственных значений семидиагональных матриц C_γ (3.2) выбирать $W_j^{(k)}$ – итерационные коэффициенты для любого $j = m, m-1, \dots, 2$ и любого $k = 1, 2, \dots$ в виде

$$
W_j^{(k)}(d) = \begin{cases}
0, \text{ если } |p_j^{(k)}| \geqslant 1 , |b_j^{(k)}| \geqslant 1 \text{ и } |z_j^{(k)}| \geqslant 1 , \\
q_j^{(k)} - z_j^{(k)} \cdot f_j / q_{j-1}^{(k)} , \quad \text{если } |p_j^{(k)}| < 1, |b_j^{(k)}| < 1 \text{ и } |z_j^{(k)}| > \varepsilon , \\
q_j^{(k)} - b_j^{(k)} a_j^{(k)} / q_{j-1}^{(k)} , \quad \text{если } |p_j^{(k)}| < 1, |z_j^{(k)}| \leqslant \varepsilon \text{ и } |b_j^{(k)}| > \varepsilon , \\
q_j^{(k)} - p_j^{(k)} z_j^{(k)} / q_{j-1}^{(k)} , \quad \text{если } |z_j^{(k)}| \leqslant \varepsilon, |b_j^{(k)}| \leqslant \varepsilon \text{ и } |p_j^{(k)}| > \varepsilon ,
\end{cases} \qquad (3.15)
$$

то в ускоренном таким образом LR – методе можно достичь квадратического (кубического) ускорения сходимости, т.е.

$$
z_j^{(k+1)}(W_j) \to O(\varepsilon_\gamma^{(k)\,2}) , \quad b_j^{(k+1)}(W_j) \to O(\varepsilon_\gamma^{(k)\,2}) , \quad p_j^{(k+1)}(W_j) \to O(\varepsilon_\gamma^{(k)\,2}) , \quad \text{где}
$$

$$
\varepsilon_\gamma^{(k)} = \max(\varepsilon_p^{(k)}, \varepsilon_b^{(k)}, \varepsilon_z^{(k)}) , \quad \text{где} \quad |p_j^{(k)}| < \varepsilon_p^{(k)} , |b_j^{(k)}| < \varepsilon_b^{(k)} , |z_j^{(k)}| < \varepsilon_z^{(k)} \quad \text{и} \qquad (3.16)
$$

$$
|z_j^{(k)}| \to 0 , \; |b_j^{(k)}| \to 0 , \; |p_j^{(k)}| \to 0 \quad \text{при } k \to \infty \; [9,3].
$$

Доказательство. Пусть

$$
L^{(k)} = \begin{bmatrix}
1 \\
l_2 & 1 \\
c_3 & l_3 & 1 \\
x_4 & c_4 & l_4 & 1 \\
& - & - & - \\
& & x_{m-3} & c_{m-3} & l_{m-3} & 1 \\
& & & x_{m-2} & c_{m-2} & l_{m-2} & 1 \\
& & & & x_{m-1} & c_{m-1} & l_{m-1} & 1 \\
& & & & & x_m & c_m & l_m & 1
\end{bmatrix} , \quad
R^{(k)} = \begin{bmatrix}
r_1 & e_2 & d_3 & f_4 \\
& r_2 & e_3 & d_4 & f_5 \\
& & - & - & - \\
& & & r_{m-3} & e_{m-2} & d_{m-1} & f_m \\
& & & & r_{m-2} & e_{m-1} & d_m \\
& & & & & r_{m-1} & e_m \\
& & & & & & r_m
\end{bmatrix} \qquad (3.17)
$$

и ($\varepsilon > 0$) – малая константа, обусловленная разрядной сеткой ЭВМ. Тогда для модифицированного LR – алгоритма [9] ($C_\gamma^{(k)} - W^{(k)} E = L^{(k)} R^{(k)} \to C_\gamma^{(k+1)} = R^{(k)} L^{(k)} + W^{(k)} E$) в случае семидиагональной матрицы $C_\gamma^{(k)}(d)$ (3.2), у которой все ведущие угловые миноры отличны от нуля, имеем

Если $|z_i^{(k+1)}| > \varepsilon$, $|b_i^{(k+1)}| > \varepsilon$ и $|p_i^{(k+1)}| > \varepsilon$ для любых $k = 1, 2, \dots$, то

$$
\left.\begin{array}{l}
x_i^{(k)} = z_i^{(k)} / r_{i-3}^{(k)} \; ; \; i = 4, 5, \dots, m \\
c_i^{(k)} = (b_i^{(k)} - x_i^{(k)} \cdot e_{i-2}^{(k)}) / r_{i-2}^{(k)} \; ; \; x_3^{(k)} = 0 ; \; i = 3, 4, \dots, m \\
l_i^{(k)} = (p_i^{(k)} - x_i^{(k)} \cdot d_{i-1}^{(k)} - c_i^{(k)} \cdot e_{i-1}^{(k)}) / r_{i-1}^{(k)} ; \; x_2^{(k)} = 0 = x_3^{(k)} ; \; c_2^{(k)} = 0 ; \; i = 2, 3, \dots, m \\
e_i^{(k)} = z_i^{(k)} - c_{i-1}^{(k)} f_i - l_{i-1}^{(k)} \cdot d_i^{(k)} \; ; \; i = 2, 3, \dots, m \\
d_i^{(k)} = a_i^{(k)} - l_{i-2}^{(k)} \cdot f_i \; ; \; i = 3, 4, \dots, m \\
r_i^{(k)} = (q_i^{(k)} - W^{(k)}) - x_i^{(k)} \cdot f_i - c_i^{(k)} \cdot d_i^{(k)} - l_i^{(k)} \cdot e_i^{(k)} \; ; \; i = 1, 2, \dots, m
\end{array}\right\} , \qquad (3.18)
$$

$$\left.\begin{aligned}
&\overset{(k+1)}{q}_i = (\overset{(k)}{r}_i + \overset{(k)}{W}) + \overset{(k)}{e}_{i+1}\overset{(k)}{l}_{i+1} + \overset{(k)}{d}_{i+2}\cdot\overset{(k)}{c}_{i+2} + f_{i+3}\overset{(k)}{x}_{i+3}\,;\\
&\qquad\qquad \overset{(k)}{l}_{m+1} = \overset{(k)}{c}_{m+1} = \overset{(k)}{c}_{m+2} = \overset{(k)}{x}_{m+1} = \overset{(k)}{x}_{m+2} = \overset{(k)}{x}_{m+3} = 0;\ i = 1, 2, \dots, m\\
&\overset{(k+1)}{p}_i = \overset{(k)}{r}_i\overset{(k)}{l}_i + \overset{(k)}{e}_{i+1}\overset{(k)}{c}_{i+1} + \overset{(k)}{d}_{i+2}\cdot\overset{(k)}{x}_{i+2}\ ;\ i = 2, 3, \dots, m\\
&\overset{(k+1)}{b}_i = \overset{(k)}{r}_i\overset{(k)}{c}_i + \overset{(k)}{e}_{i+1}\overset{(k)}{x}_{i+1}\ ;\ i = 3, 4, \dots, m\\
&\overset{(k+1)}{z}_i = \overset{(k)}{r}_i\cdot\overset{(k)}{x}_i\ ;\ i = 4, 5, \dots, m\\
&\overset{(k+1)}{\tau}_i = \overset{(k)}{e}_i + \overset{(k)}{d}_{i+1}\overset{(k)}{l}_{i+1} + f_{i+2}\cdot\overset{(k)}{c}_{i+2}\ ;\ i = 2, 3, \dots, m\\
&\overset{(k+1)}{a}_i = \overset{(k)}{d}_i + f_{i+1}\overset{(k)}{l}_{i+1}\ ;\ i = 3, 4, \dots, m
\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

$$\lambda_i = \lim_{k\to\infty}\overset{(k)}{q}_i - d\ ;\ i = 1, 2, \dots, m \tag{3.20}$$

Если $|\overset{(k^*)}{z}_{i^*}| \leqslant \varepsilon$, $|\overset{(k^*)}{b}_{i^*}| \leqslant \varepsilon$ и $|\overset{(k^*)}{p}_{i^*}| \leqslant \varepsilon$ в любой итерации $k = k^* \geqslant 2$ и некотором $i = i^*$, то

$$\left\{\overset{(k^*)}{z}_n = 0,\ \overset{(k^*)}{b}_n = 0,\ \overset{(k^*)}{p}_n = 0,\ \overset{(k^*+1)}{q}_n = \overset{(k^*)}{q}_n = (\overset{(k^*)}{r}_n + \overset{(k^*)}{W})\right\}_{n=i^*}^{m}. \tag{3.21}$$

Пусть $|\overset{(k)}{p}_i| < 1$, $|\overset{(k)}{b}_i| < 1$ и $1 > |\overset{(k)}{z}_i| > \varepsilon$, а также $\overset{(k)}{W}_i = \overset{(k)}{q}_i - \overset{(k)}{z}_i f_i/\overset{(k)}{q}_{i-1}$ $(3.15)_{2)}$. Тогда из $(3.18)_{6)}$ получаем

$$\overset{(k)}{r}_i(W_i) = \Big[\Big(\frac{1}{\overset{(k)}{q}_{i-1}(W_i)} - \frac{1}{\overset{(k)}{q}_{i-3}(W_i)}\Big)\cdot f_i + \frac{\overset{(k)}{d}_{i-1}(W_i)\cdot\overset{(k)}{e}_i(W_i)}{\overset{(k)}{r}_{i-3}(W_i)\cdot\overset{(k)}{r}_{i-1}(W_i)} + \frac{\overset{(k)}{e}_{i-2}(W_i)}{\overset{(k)}{r}_{i-2}(W_i)\cdot\overset{(k)}{r}_{i-3}(W_i)}\Big(\overset{(k)}{d}_i(W_i) -$$
$$- \frac{\overset{(k)}{e}_{i-1}(W_i)\cdot\overset{(k)}{e}_i(W_i)}{\overset{(k)}{r}_{i-1}(W_i)}\Big)\Big]\cdot\overset{(k)}{z}_i(W_i) - \Big[\frac{\overset{(k)}{e}_i(W_i)}{\overset{(k)}{r}_{i-1}(W_i)}\Big]\overset{(k)}{p}_i(W_i) - \Big[\frac{\overset{(k)}{d}_i(W_i)\overset{(k)}{r}_{i-1}(W_i) - \overset{(k)}{e}_{i-1}(W_i)\cdot\overset{(k)}{e}_i(W_i)}{\overset{(k)}{r}_{i-1}(W_i)\cdot\overset{(k)}{r}_{i-2}(W_i)}\Big]\cdot\overset{(k)}{b}_i(W_i)\ . \tag{3.22}$$

Следовательно, из $(3.18)_{1)}$, $(3.19)_{4)}$ и (3.22) следует

$$|\overset{(k+1)}{z}_i(W_i)| < \overset{(k)}{\bar{m}}_i\cdot\overset{(k)}{\varepsilon}_{7}^{2}\ ,\ \text{т.е.}\ |\overset{(k+1)}{z}_i(W_i)| \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}_{7}^{2})\ ,\ \text{где} \tag{3.23}$$

$$\overset{(k)}{\bar{m}}_i = \Big|\frac{1}{\overset{(k)}{r}_{i-3}}\Big[\Big(\frac{1}{\overset{(k)}{q}_{i-1}} - \frac{1}{\overset{(k)}{r}_{i-3}}\Big)\cdot f_i + \frac{\overset{(k)}{d}_{i-1}\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-3}\overset{(k)}{r}_{i-1}} + \frac{\overset{(k)}{e}_{i-2}}{\overset{(k)}{r}_{i-2}\cdot\overset{(k)}{r}_{i-3}}\Big(\overset{(k)}{d}_i - \frac{\overset{(k)}{e}_{i-1}\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-1}}\Big)\Big]\Big| +$$
$$+ \Big|\frac{\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-1}\overset{(k)}{r}_{i-3}}\Big| + \Big|\frac{\overset{(k)}{d}_i\overset{(k)}{r}_{i-1} - \overset{(k)}{e}_{i-1}\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-1}\overset{(k)}{r}_{i-2}\cdot\overset{(k)}{r}_{i-3}}\Big|\ . \tag{3.24}$$

Аналогично, если $|\overset{(k)}{p}_i| < 1$, $|\overset{(k)}{z}_i| \leqslant \varepsilon$ и $|\overset{(k)}{b}_i| > \varepsilon$, то из $(3.18)_{2)}$, $(3.18)_{6)}$, $(3.19)_{3)}$ и $(3.15)_{3)}$ получаем

$$|\overset{(k+1)}{b}_i(W_i)| < \overset{(k)}{\bar{\bar{m}}}_i\cdot\overset{(k)}{\varepsilon}_{7}^{2}\ ,\ \text{т.е.}\ |\overset{(k+1)}{b}_i(W_i)| \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}_{7}^{2})\ ,\ \text{где} \tag{3.25}$$

$$\overset{(k)}{\bar{\bar{m}}}_i = \Big|\frac{1}{\overset{(k)}{r}_{i-2}}\Big(\frac{\overset{(k)}{a}_i}{\overset{(k)}{q}_{i-1}} - \frac{\overset{(k)}{d}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-2}} + \frac{\overset{(k)}{e}_{i-1}\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-1}\overset{(k)}{r}_{i-2}}\Big)\Big| + \Big|\frac{\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-1}\cdot\overset{(k)}{r}_{i-2}}\Big|\ . \tag{3.26}$$

А также если $|\overset{(k)}{z}_i| \leqslant \varepsilon$, $|\overset{(k)}{b}_i| \leqslant \varepsilon$ и $|\overset{(k)}{p}_i| > \varepsilon$, то из $(3.18)_{3)}$, $(3.18)_{6)}$ и $(3.19)_{2)}$ получаем, учитывая (3.21),

$$|\overset{(k+1)}{p}_i(W_i)| < \overset{(k)}{\bar{\bar{\bar{m}}}}_i\cdot\overset{(k)}{\varepsilon}_{7}^{2}\ ,\ \text{т.е.}\ |\overset{(k+1)}{p}_i(W_i)| \to O(\overset{(k)}{\varepsilon}_{7}^{2})\ ,\ \text{где} \tag{3.27}$$

$$\overset{(k)}{\bar{\bar{\bar{m}}}}_i = \Big|\frac{1}{\overset{(k)}{r}_{i-1}}\Big(\frac{\overset{(k)}{\tau}_i}{\overset{(k)}{q}_{i-1}} - \frac{\overset{(k)}{e}_i}{\overset{(k)}{r}_{i-1}}\Big)\Big|\ . \tag{3.28}$$

Теорема доказана.

До сих пор мы рассматривали способы нахождения собственных значений и выбора ускоряющих коэффициентов в случае, когда все собственные значения матриц различные. Как видели, новые способы выбора $\overset{(k)}{W}$ – ускоряющих коэффициентов и d – начальных сдвигов в LR – алгоритме

для вычисления собственных значений вещественных пяти(или семи)диагональных матриц в процессе итераций сохраняют как вещественность, так и ленточный вид исходной матрицы. Следовательно, если исходная матрица имеет кратные (или комплексные) собственные значения, то по аналогии с [6] можно построить метод их вычисления. На самом деле. Пусть заданная матрица $\mathbb{C}_5$ (3.1) (или $\mathbb{C}_7$ (3.2)) имеет кратное комплексное собственное значение $\lambda = a + ib$ и его кратность равна n. Тогда по основной теореме алгебры (см., например, §68 [10]) ему сопряженное комплексное число $\bar{\lambda} = a - ib$ также – собственное значение кратности n исходной матрицы. Если у исходных матриц $\mathbb{C}_5$ либо $\mathbb{C}_7$ имеется единственное λ_i – комплексное кратное собственное значение кратности n (т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda^*_{n+1} = \dots = \lambda^*_{2n}$), то соответствующие итерационные матрицы $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_5$ либо $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_7$ при $k \to \infty$ стремятся к почти треугольной матрице, у которой на диагонали будут стоять (см.[6]) собственные значения и блочная подматрица вида ${}_5\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_{2n}$ либо ${}_7\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_{2n}$. Но собственные значения подматриц ${}_5\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_{2n}$ или ${}_7\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_{2n}$ совпадают с λ_i – кратным собственным значением заданной матрицы [9]. В нашем подходе подматрицы $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_{2n}$ также сохраняют вещественность и ленточный вид исходной матрицы. Если уравнение $\lambda^2 + 2B\lambda + F = 0$ имеет комплексные корни $\lambda = a \pm ib$, то $(\lambda^2 + 2B\lambda + F)^n$ есть характеристический многочлен (под)матрицы $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}_{2n}$. По аналогии с [6] имеет место следующий результат.

Лемма I. Дискриминант $V = B^2 - F$ уравнения $(\lambda^2 + 2B\lambda + F)^n = 0$ не зависит от сдвига d.

Доказательство леммы по сути совпадает с доказательством леммы 3 из [6], поэтому мы его здесь не повторяем, а только отметим лишь, что дискриминанты V_5 и V_7 характеристических многочленов (под)матриц $\overset{(\infty)}{\bar{\mathbb{C}}}_{2n}$

$$\left.\begin{aligned}
&{}_5\overset{(\infty)}{\bar{\mathbb{C}}}_{2n} = \begin{pmatrix}
\bar{q}_1 & \bar{\tau}_2 & \bar{a}_3 & & & & & \\
\bar{p}_2 & \bar{q}_2 & \bar{\tau}_3 & \bar{a}_4 & & & & \\
\bar{b}_3 & \bar{p}_3 & \bar{q}_3 & \bar{\tau}_4 & \bar{a}_5 & & & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\
 & & \bar{b}_{s-2} & \bar{p}_{s-2} & \bar{q}_{s-2} & \bar{\tau}_{s-1} & \bar{a}_s & \\
 & & & \bar{b}_{s-1} & \bar{p}_{s-1} & \bar{q}_{s-1} & \bar{\tau}_s & \\
 & & & & \bar{b}_s & \bar{p}_s & \bar{q}_s &
\end{pmatrix}\\
&{}_7\overset{(\infty)}{\bar{\mathbb{C}}}_{2n} = \begin{pmatrix}
\bar{q}_1 & \bar{\tau}_2 & \bar{a}_3 & \bar{f}_4 & & & & \\
\bar{p}_2 & \bar{q}_2 & \bar{\tau}_3 & \bar{a}_4 & \bar{f}_5 & & & \\
\bar{b}_3 & \bar{p}_3 & \bar{q}_3 & \bar{\tau}_4 & \bar{a}_5 & \bar{f}_6 & & \\
\bar{z}_4 & \bar{b}_4 & \bar{p}_4 & \bar{q}_4 & \bar{\tau}_5 & \bar{a}_6 & \bar{f}_7 & \\
 & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
 & \bar{z}_{s-3} & \bar{b}_{s-3} & \bar{p}_{s-3} & \bar{q}_{s-3} & \bar{\tau}_{s-2} & \bar{a}_{s-1} & \bar{f}_s \\
 & & \bar{z}_{s-2} & \bar{b}_{s-2} & \bar{p}_{s-2} & \bar{q}_{s-2} & \bar{\tau}_{s-1} & \bar{a}_s \\
 & & & \bar{z}_{s-1} & \bar{b}_{s-1} & \bar{p}_{s-1} & \bar{q}_{s-1} & \bar{\tau}_s \\
 & & & & \bar{z}_s & \bar{b}_s & \bar{p}_s & \bar{q}_s
\end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{3.29}$$

, где $s = 2n$,

вычисляются соответственно следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} V_5 &= B^2 - F = \frac{1}{4\cdot n^2} Q_S + \frac{1}{n}\Big[\Big(\sum_{i=2}^{s} \bar{z}_i \bar{P}_i + \sum_{i=3}^{s} \bar{a}_i \bar{b}_i\Big) = R_S\Big], \\ V_7 &= B^2 - F = \frac{1}{4\cdot n^2}\cdot Q_S + \frac{1}{n}\Big(R_S + \sum_{i=4}^{n} \bar{z}_i \bar{f}_i\Big) \text{, где} \\ Q_S &= [(\bar{q}_1-\bar{q}_2)^2+\dots+(\bar{q}_1-\bar{q}_5)^2]+[(\bar{q}_2-\bar{q}_3)^2+\dots+(\bar{q}_2-\bar{q}_5)^2]+\dots+[(q_{s-1}-q_s)^2]. \end{aligned}\right\} \qquad (3.30)$$

Лемма установлена. Этот результат может быть обобщен в следующем виде.

Лемма 2. Если вещественная матрица A_s общего вида

$$A_s = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2s} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3s} \\ - & - & - & - & - \\ a_{s1} & a_{s2} & a_{s3} & \cdots & a_{ss} \end{bmatrix} \qquad (3.31)$$

, где

$(s = 2\cdot n)$ – размерность матрицы имеет λ – единственное кратное комплексное собственное значение $\lambda = a + i b$ кратности n , то дискриминант $V = B^2 - F$ характеристического уравнения $(\lambda^2 + 2B\lambda + F)^n = 0$ такой матрицы имеет вид

$$\begin{aligned} V = B^2 - F = \frac{1}{4n^2}\Big\{&[(a_{11}-a_{22})^2+\dots+(a_{11}-a_{ss})^2]+[(a_{22}-a_{33})^2+\dots+(a_{22}-a_{ss})^2]+ \\ &+\dots+[(a_{s-1\,s-1}-a_{ss})^2]\Big\} + \frac{1}{n}\Big(\sum_{i=2}^{s} a_{i-1\,i}\, a_{i\,i-1} + \sum_{i=3}^{s} a_{i-2\,i}\, a_{i\,i-2} + \dots + \\ &+ \sum_{i=s-1}^{s} a_{i-s+2\,;\,i}\, a_{i,\,i-s+2} + a_{s,1}\cdot a_{1,s}\Big) \end{aligned} \qquad (3.32)$$

и также не зависит от сдвига d .

Доказательство справедливости такого результата по сути совпадает с доказательством леммы I (или леммы 3 из [6]), поэтому мы его не повторяем.

Теорема 5. Пусть у матриц $\mathbb{C}_5$ (3.I) (или $\mathbb{C}_7$ (3.2)) имеется кратное вещественное либо комплексное собственное значение λ . Тогда если итерационные матрицы $\overset{(k)}{\mathbb{C}}_5$ (или $\overset{(k)}{\mathbb{C}}_7$) в LR – алгоритмах и при указанных в теоремах 3 и 4 способах выбора ускоряющих итерационных коэффициентов $\overset{(k)}{W}$ стремятся при $k \to \infty$ к виду

$$\overset{(\infty)}{\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \bar{z}_2 & \bar{a}_3 & \bar{f}_4 & & & & & \\ & \lambda_2 & \bar{z}_3 & \bar{a}_4 & \bar{f}_5 & & & & \\ & & - & - & - & - & & & \\ & & & \lambda_i & \bar{z}_{i+1} & \bar{a}_{i+2} & \bar{f}_{i+3} & & \\ & & & & \bar{\mathbb{C}}_s & \bar{z}_{i+s+1} & \bar{a}_{i+s+2} & \bar{f}_{i+s+3} & \\ & & & & & \lambda_{i+s+1} & \bar{z}_{i+s+2} & \bar{a}_{i+s+3} & \bar{f}_{i+s+4} \\ & & & & & & - & - & - \\ & & & & & & & \lambda_{m-1} & z_m \\ & & & & & & & & \lambda_m \end{bmatrix} \qquad (3.33)$$

, где

$\bar{\mathbb{C}}_s$ есть соответственно одна из матриц вида (3.29), то имеют место следующие утверждения:

I. Равенство $s = 2n+1$, где $n = 1, 2, \dots$ (т.е. нечетность порядка матрицы $\bar{\mathbb{C}}_s$) является достаточным условием для того, чтобы $\bar{\mathbb{C}}_s$ (а вместе с ней и исходная матрица) имели бы s – кратное вещественное собственное значение

$$\lambda = \frac{1}{s}\Big[\sum_{i=1}^{s} \bar{q}_i = S_p(\bar{\mathbb{C}}_s)\Big]. \qquad (3.34)$$

2. Равенство $s = 2n$, где $n = 1, 2, \dots$ (т.е. четность порядка матрицы $\bar{\mathbb{C}}_s$), и $V < 0$ являются необходимым и достаточным условиями для n – кратного комплексного

$$\left.\begin{aligned} &\lambda = (a \pm i b) \text{ , где} \\ &a = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{2n} \bar{q}_i \ , \quad b = \frac{1}{2n}\sqrt{-V} \end{aligned}\right\} \qquad (3.35)$$

собственного значения λ , а $s = 2n$ и $V = 0$ – достаточными условиями для $2n$ – кратного действительного

$$\lambda = \frac{1}{2n}\Big[\sum_{i=1}^{2n} \bar{q}_i = S_p(\bar{\mathbb{C}}_s)\Big] \qquad (3.36)$$

собственного значения матрицы $\bar{\mathbb{C}}_s$ (то же самое – исходной матрицы $\mathbb{C}$). Здесь V – дискриминант характеристического многочлена-$(\lambda^2 + 2B\lambda + F)^n$ матрицы $\bar{\mathbb{C}}_s$, который вычисляется по (3.30) (или в общем случае по (3.32)).

Доказательство теоремы также совпадает по сути с доказательством теоремы 2 из [6], если учесть леммы I и 2 настоящей работы, поэтому мы на нем не останавливаемся. Теорема доказана.

Замечание I. Отметим, что при наличии у матриц $\mathbb{C}_5$ и $\mathbb{C}_7$ более чем одного кратного собственного значения у соответствующих итерационных матриц $\overset{(\infty)}{\mathbb{C}}$ (3.33) появляется соответствующее число матриц $\bar{\mathbb{C}}_s$ на диагонали. Этот факт доказывается по аналогии с доказательством из [6] для трехдиагональных матриц.

Замечание 2. Как следует из доказанных выше теорем, в предлагаемых нами ускоренных методах, основанных на LR – алгоритме и новом способе выбора d – начальных сдвигов и $\overset{(k)}{W}$ – итерационных ускоряющих коэффициентов, поиска λ – всех собственных значений (пяти)семидиагональных матриц общего вида произвольной структуры не осуществляются процедуры перехода к верхей (нижней) матрицам в форме Хессенберга. Последний переход является характерной особенностью классических и модифицированных (с учетом сдвигов) LR и QR (либо QL) методов(см., например, алгоритм II.I3 и II.I6 из [I3]).

4. Приложение

В настоящем разделе приводятся некоторые результаты анализа проблемы кратных собственных значений для произвольных вещественных матриц порядков $m = 4$ и $m = 3$ как следствие приведенных выше результатов, а также результатов для вещественных трехдиагональных матриц в [6].

Лемма 3. Пусть $m=4$ – размерность любой вещественной матрицы X.

Тогда

$$Z_1^2 \geq 0 \tag{4.1}$$

является необходимым, а

$$Z_1 = Z = Z_2 \tag{4.2}$$

необходимым и достаточным условиями для того, чтобы характеристический многочлен исходной матрицы X был бы факторизуем в виде

$$\det(X - \lambda E) = (\lambda + 2B\lambda + C)^2. \tag{4.3}$$

При этом если $(Z_1 = Z = Z_2)$, то

1) если $D = 0$, то

$$\lambda_i = -B, \quad i = 1, 2, \dots, 4, \tag{4.4}$$

2) если $D > 0$, то

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = -B + \sqrt{D} \\ \lambda_3 = \lambda_4 = -B - \sqrt{D} \end{array}\right\}. \tag{4.5}$$

3) если $D < 0$, то

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 = \lambda_2 = -B + i\sqrt{-D} \\ \lambda_3 = \lambda_4 = -B - i\sqrt{-D} \end{array}\right\}. \tag{4.6}$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{l} D = B^2 - Z \\ B = A/4 \\ Z = [(E - A \cdot B)/2 = (E - \frac{A^2}{4})/2] \\ Z_2 = F/A \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

и A, E, F, Z_1^2 определяются следующим образом:

I°. В случае полной матрицы $X = A_4$

$$A_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} A = \left(-\sum\limits_{i=1}^{4} a_{ii} = -Sp(A_4)\right) \\ E = [a_{11}(a_{22} + a_{33} + a_{44}) + a_{22}(a_{33} + a_{44}) + a_{33}a_{44} - \\ \quad - (a_{12}a_{21} + a_{23}a_{32} + a_{34}a_{43})] - [(a_{13}a_{31} + a_{24}a_{42}) + a_{14}a_{41}] \end{array}\right\}, \tag{4.8}$$

$$\left.\begin{array}{l} F = [a_{32}a_{23}(a_{11} + a_{44}) + (a_{33} + a_{44})(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) + \\ \quad + (a_{11} + a_{22})(a_{34}a_{43} - a_{33}a_{44})] - [a_{32}(a_{24}a_{43} + a_{13}a_{21}) + \\ \quad + a_{23}(a_{34}a_{42} + a_{12}a_{31}) - a_{24}a_{42}(a_{11} + a_{33}) - a_{13}a_{31}(a_{22} + a_{44}) - \\ \quad - a_{14}a_{41}(a_{22} + a_{33})] - [a_{41}(a_{24}a_{12} + a_{13}a_{34}) + \\ \quad + a_{14}(a_{21}a_{42} + a_{31}a_{43})] \\ Z_1^2 = [[(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44} - a_{34}a_{43}) + (a_{32}a_{24})(a_{11}a_{44})] + \\ \quad + [a_{13}(a_{21}a_{32}a_{44} + a_{31}a_{42}a_{24} - a_{42}a_{34}a_{21}) + a_{24}a_{11}(a_{32}a_{43} - \\ \quad - a_{42}a_{33}) - a_{31}(a_{12}a_{43}a_{24} + a_{13}a_{22}a_{44} - a_{12}a_{23}a_{44}) + \\ \quad + a_{42}a_{11}a_{23}a_{34}] + \{a_{41}[a_{12}(a_{24}a_{33} - a_{23}a_{34}) + a_{13}(a_{34}a_{22} - \\ \quad - a_{32}a_{24})] + a_{14}a_{41}(a_{32}a_{24} - a_{22}a_{33}) + a_{14}[a_{31}(a_{43}a_{22} - \\ \quad - a_{42}a_{23}) + a_{21}(a_{42}a_{33} - a_{32}a_{43})]\} \end{array}\right\}. \tag{4.9}$$

II°. В случае пятидиагональных матриц $X = \mathbb{C}_4$

$$\mathbb{C}_4 = \begin{bmatrix} q_1 & r_2 & a_3 & 0 \\ p_2 & q_2 & r_3 & a_4 \\ b_3 & p_3 & q_3 & r_4 \\ 0 & b_4 & p_4 & q_4 \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} A = [-\sum\limits_{i=1}^{4} q_i = -Sp(\mathbb{C}_4)], \\ E = [(q_1\sum\limits_{i=2}^{4} q_i + q_2\sum\limits_{i=3}^{4} q_i + q_3q_4 - \sum\limits_{i=2}^{4} r_ip_i) - \sum\limits_{i=3}^{4} b_ia_i] \end{array}\right\}, \tag{4.10}$$

$$\left.\begin{array}{l} F = [(q_1 + q_4)p_3r_3 + (q_3 + q_4)(p_2r_2 - q_1q_2) + (q_1 + q_2)(p_4r_4 - \\ \quad - q_3q_4)] - [p_3(a_4p_4 + a_3p_2) + r_3(r_4b_4 + r_2b_3) - a_4b_4(q_1 + \\ \quad + q_3) - a_3b_3(q_2 + q_4)] \\ Z_1^2 = [(q_1q_2 - p_2r_2)(q_3q_4 - p_4r_4) - (p_3r_3)(q_1 \cdot q_4)] + \\ \quad + [a_3(p_2p_3q_4 + b_3b_4a_4 - b_4r_4p_2) + a_4q_1(p_3p_4 - \\ \quad - b_4q_3) - b_3(r_2p_4a_4 + a_3q_2q_4 - r_2r_3q_4) + b_4q_1r_3r_4] \end{array}\right\}. \tag{4.11}$$

III°. В случае ($X = H_4$) матрицы в форме Хессенберга

$$H_4 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ & & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{array}{l} A = (-\sum\limits_{i=1}^{4} a_{ii} = -Sp(H_4)) \\ E = [a_{11}\sum\limits_{i=2}^{4} a_{ii} + a_{22}\sum\limits_{i=3}^{4} a_{ii} + a_{33}a_{44} - \sum\limits_{i=2}^{4} a_{i-1,i}\,a_{i,i-1}] \end{array}\right\}, \tag{4.12}$$

$$\left.\begin{aligned} F &= [a_{32}a_{23}(a_{11}+a_{44})+(a_{33}+a_{44})(a_{12}a_{21}-a_{11}a_{22})+ \\ &\quad +(a_{11}+a_{22})(a_{34}a_{43}-a_{33}a_{44})]-[a_{32}(a_{24}a_{43}+a_{13}a_{21})] \\ Z_1^2 &= [(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(a_{33}a_{44}-a_{34}a_{43})-(a_{32}a_{23})(a_{11}a_{44})]+ \\ &\quad +[a_{32}(a_{13}a_{21}a_{44}+a_{24}a_{43}a_{11}-a_{14}a_{21}a_{43})] \end{aligned}\right\}. \tag{4.13}$$

<u>Доказательство</u>. Пусть размерность исходной матрицы X равна 4 и её собственные значения есть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$. Тогда, записав характеристический многочлен матрицы X в виде

$$\det(X-\lambda E) = \lambda^4 - A\lambda^3 + E\lambda^2 + F\lambda + Z_1^2 , \tag{4.14}$$

где A, E, F, Z_1^2 есть (4.8)÷(4.9) для A_4, а для C_4 – (4.10)÷(4.11) и также для H_4 – (4.12)÷(4.13) соответственно, и воспользовавшись леммой 5 из [6], получаем результаты этой леммы. Лемма доказана.

<u>Лемма 4</u>. Пусть $m=3$ – размерность любой вещественной матрицы Y. Тогда

$$B > 0 \tag{4.15}$$

является необходимым, а

$$a_1 = a = a_2 \tag{4.16}$$

необходимым и достаточным условиями для того, чтобы характеристический многочлен исходной матрицы Y мог быть факторизован в виде

$$\det(Y-\lambda E) = (\lambda - a)^3 \tag{4.17}$$

При этом если $(a_1 = a = a_2)$, то

$$\lambda_i = a, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.18}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} a &= A/3 \\ a_1 &= B/A \\ a_2 &= 3Z/B \end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

и A, B, Z определяются следующим образом:

I°. В случае полной матрицы $Y = A_3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} A &= [\textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = Sp(A_3)] \\ B &= [a_{11}(a_{22}+a_{33})+a_{22}a_{33}-(a_{23}a_{32})-(a_{21}a_{12})]-a_{13}a_{31}. \\ Z &= [(a_{11}a_{22})a_{33}-(a_{23}a_{32})a_{11}-(a_{21}a_{12})a_{33}]+ \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32}+[a_{31}(a_{12}a_{23}-a_{13}a_{22})] \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

II. В случае ($Y = H_3$) матрицы в форме Хессенберга

$$H_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix},$$

$$\left.\begin{aligned} A &= [\textstyle\sum_{i=1}^{3} a_{ii} = Sp(H_3)] \\ B &= [a_{11}(a_{22}+a_{33})+a_{22}a_{33}-(a_{23}a_{32})-(a_{21}a_{12})] \\ Z &= [(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})a_{33}-(a_{23}a_{32})a_{11}]+a_{13}a_{21}a_{32} \end{aligned}\right\}. \tag{4.21}$$

<u>Доказательство</u> леммы по сути совпадает с доказательством предыдущей леммы, и поэтому мы его опускаем. Лемма доказана.

Далее отметим, что результаты теоремы 5 и лемм 3, 4 позволяют также выполнить модификации LR – алгоритмов (3.7)÷(3.10) и (3.18)÷(3.21) для вычисления полного спектра матриц и общего вида и в случае их произвольной структуры. В следующей работе нами будет приведено описание системы программ, в которых реализованы алгоритмы (3.7)÷(3.10) и (3.18)÷(3.21) и результаты теоремы 5 и лемм 3 и 4 при $m=3$ и 4 настоящей работы, а также будет описан и реализован способ выбора ускоряющих коэффициентов в LR – алгоритме для матриц в форме Хессенберга.

Прежде чем перейти к заключению напомним, что (как мы уже указывали во втором разделе этой статьи) нам не удалось пока найти универсального способа выбора ускоряющих коэффициентов для блочно-трехдиагональных матриц. Некоторые подходы к решению этой проблемы тем не менее имеются. Для демонстрации сходимости приведенных во втором разделе алгоритмов (без ускорения) мы помещаем в конце этой статьи численный пример, просчитанный на ЭВМ ЕС – 1061.

З А К Л Ю Ч Е Н И Е

В заключение отметим, что в работе приведены методы поиска собственных значений блочно-трехдиагональных матриц общего вида. Предложены новые способы выбора начальных сдвигов и итерационных ускоряющих коэффициентов, позволяющих выполнить количественное доказательство причины квадратического (кубического) ускорения сходимости LR – алгоритма для поиска всех собственных значений пяти- и семидиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

Авторы искрение признательны члену - корреспонденту АН СССР профессору $\boxed{\text{Н. Н. Говоруну}}$ за интерес к настоящим исследованиям и предоставленную возможность работы над ними.

П р и м е р

Пусть C – (блочно-трехдиагональная) матрица вида

$$
\mathbb{C}=\begin{bmatrix}
\begin{bmatrix}2&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1&0\\2&1\end{Bmatrix} & & & \\
\begin{Bmatrix}1&2\\0&1\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1&0\\2&1\end{Bmatrix} & & & \\
 & - - - - - & & \\
 & & \begin{Bmatrix}1&2\\0&1\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&3\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}1&0\\2&1\end{Bmatrix} & \\
 & & & \begin{Bmatrix}1&2\\0&1\end{Bmatrix}\begin{bmatrix}3&2\\2&2\end{bmatrix}
\end{bmatrix}
\equiv
\begin{bmatrix}
[q_1]\ \{\tau_2\} & & & \\
\{P_2\}\ [q_2]\ \{\tau_3\} & & & \\
 & - - - - & & \\
 & & \{P_{n-1}\}\ [q_{n-1}]\ \{\tau_n\} & \\
 & & & \{P_n\}\ [q_n]
\end{bmatrix}. \qquad (*)
$$

Известно [I2], что её собственные значения имеют вид

$$\lambda_i=\left[1-2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{m+1}\cdot i\right)\right]^2,\ i=1,2,\cdots,m \quad ,\text{ где} \qquad (**)$$

m – порядка матрицы $\mathbb{C}$ (*).

С учетом введенных выше формальных обозначений для элементов – блоков матрицы $\mathbb{C}$ (*), а именно (q_i) – диагональных блоков, $\{\tau_i\}$ и $\{P_i\}$ – над-и поддиагональных блоков размерности [2,2], ниже приводятся таблицы I и 2 поведения этих элементов-блоков для итерационных матриц $\overset{(N)}{\mathbb{C}}$ с указанием N – номера итерации. В таблице 3 приведены для сравнения результаты вычисления всех λ для $\mathbb{C}$ (*) указанным в таблице методом.

Таблица I

N= 1

0.15D+01	0.30D+01	0.10D+01					
0.0	0.60D+01	0.20D+01	0.10D+01				
-0.18D+01	0.25D+01	0.15D+01	0.20D+01	0.10D+01			
-0.25D+01	0.30D+01	0.50D+00	0.48D+01	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.50D+00	0.18D+01	0.12D+01	0.18D+01	0.10D+01	
		-0.11D+01	0.27D+01	0.60D+00	0.46D+01	0.20D+01	0.10D+01
				-0.72D+00	0.19D+01	0.12D+01	0.12D+01
				-0.72D+00	0.19D+01	0.12D+01	0.12D+01

N= 11

-0.18D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.15D+02	0.16D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.16D+00	0.90D-01	-0.11D+02	0.34D+01	0.10D+01			
-0.72D+00	0.39D+00	-0.55D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.99D-01	0.23D-01	0.15D+01	-0.25D+00	0.10D+01	
		-0.29D+00	0.65D-01	0.31D+01	-0.30D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.18D-01	0.62D-02	0.78D+00	-0.49D+00
				-0.18D-01	0.62D-02	0.78D+00	-0.49D+00

N= 21

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.14D-02	0.76D-03	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.62D-02	0.33D-02	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.20D-04	0.45D-05	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.57D-04	0.13D-04	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.32D-03	0.11D-03	0.81D+00	-0.53D+00
				-0.32D-03	0.11D-03	0.81D+00	-0.53D+00

N= 31

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.12D-04	0.67D-05	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.55D-04	0.29D-04	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.39D-08	0.88D-09	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.11D-07	0.25D-08	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.54D-05	0.19D-05	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.54D-05	0.19D-05	0.82D+00	-0.53D+00

N= 41

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.11D-06	0.59D-07	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.49D-06	0.26D-06	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.77D-12	0.17D-12	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.22D-11	0.50D-12	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.91D-07	0.32D-07	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.91D-07	0.32D-07	0.82D+00	-0.53D+00

N= 51

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.10D-08	0.53D-09	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.44D-08	0.23D-08	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.15D-15	0.34D-16	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.44D-15	0.99D-16	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.15D-08	0.53D-09	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.15D-08	0.53D-09	0.82D+00	-0.53D+00

Таблица 2

N= 61

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.89D-11	0.47D-11	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.39D-10	0.2[illegible]D-10	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.30D-19	0.68D-20	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.86D-19	0.19D-19	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.26D-10	0.89D-11	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.26D-10	0.89D-11	0.82D+00	-0.53D+00

N= 65

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.13D-11	0.72D-12	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.59D-11	0.32D-11	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.98D-21	0.22D-21	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.28D-20	0.64D-21	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.50D-11	0.17D-11	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.50D-11	0.17D-11	0.82D+00	-0.53D+00

N= 71

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.80D-13	0.42D-13	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.35D-12	0.19D-12	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.59D-23	0.13D-23	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.17D-22	0.38D-23	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.43D-12	0.15D-12	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.43D-12	0.15D-12	0.82D+00	-0.53D+00

N= 75

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.12D-13	0.64D-14	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.53D-13	0.28D-13	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.19D-24	0.44D-25	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.56D-24	0.13D-24	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.84D-13	0.29D-13	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.84D-13	0.29D-13	0.82D+00	-0.53D+00

N= 81

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.71D-15	0.38D-15	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.31D-14	0.17D-14	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.12D-26	0.26D-27	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.33D-26	0.75D-27	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.73D-14	0.25D-14	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.73D-14	0.25D-14	0.82D+00	-0.53D+00

N= 83

-0.19D+01	0.54D+01	0.10D+01					
-0.16D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01				
-0.28D-15	0.15D-15	-0.11D+02	0.33D+01	0.10D+01			
-0.12D-14	0.65D-15	-0.56D+02	0.17D+02	0.20D+01	0.10D+01		
		-0.21D-27	0.48D-28	0.14D+01	-0.23D+00	0.10D+01	
		-0.60D-27	0.14D-27	0.29D+01	-0.23D+00	0.20D+01	0.10D+01
				-0.32D-14	0.11D-14	0.82D+00	-0.53D+00
				-0.32D-14	0.11D-14	0.82D+00	-0.53D+00

Таблица 3

Собственные значения матрицы $\mathbb{C}$ (*),
вычисленные с учетом элементов-блоков итерационной
матрицы $\overset{(K)}{\mathbb{C}}$ при $K=83$ из таблицы 2

0.829085936938E+0I 0.64II474I278IE+0I 0.400000000000E+0I

0.I8I52074691OE+0I 0.773318403094E+00 0.426022047760E+00

0.283II8582858E+00 0.4I6333634234E-I5

Собственные значения матрицы $\mathbb{C}$ (ж),
вычисленные по формуле (жж)

0.773I8403094E+00 0.283II8582858E+00 0.443734259I87E-30
0.426022047760E+00 0.I8I5207469I0E+0I 0.400000000000E+0I
0.64II474I278IE+0I 0.829085936938E+0I

Собственные значения матрицы $\mathbb{C}$ (ж),
вычисленные по стандартной программе DESRG2 [II]

0.829085936938E+0I 0.64II474I278IE+0I 0.400000000017E+0I
0.I8I520746892E+0I -.4635028I23I6E-I4 0.426022047744E+00
0.773I8403II8E+00 0.283II8582850E+00

Литература

I. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-45I, Дубна, I988.
2. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-452, Дубна, I988.
3. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-453, Дубна, I988.
4. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-736, Дубна, I988.
5. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-787, Дубна, I988.
6. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-920, Дубна, I988.
7. Г. А. Емельяненко, Им Ён Сек, ОИЯИ, PII-88-92I, Дубна, I988.
8. Г. А. Емельяненко, Т. Т. Рахмонов, ОИЯИ, PII-87-533, Дубна, I987.
9. Дж. Х. Уилкинсон. Алгебраическая проблема собственных значений, М., Наука, I970.
I0. В. В. Воеводин. Линейная алгебра, М., Наука, I980.
II. Р. Н. Федорова, А. И. Широкова. Библиотека программ на ФОРТРАНе. т. VI. Описания программ. Дубна. I983.
I2. Р. Беллман, Введение в теорию матриц. М., Наука, I976.
I3. Уилкинсон Райнш. Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. Линейная алгебра. М., Машиностроение, I976.

Рукопись поступила в издательский отдел
I9 июля I987 года.

Емельяненко Г.А., Им Ён Сек P11-89-543
О методах поиска всех собственных значений блочно-трехдиагональных, а также пяти- и семидиагональных матриц

Приведены методы вычисления всех собственных значений блочно-трехдиагональных матриц общего вида. Предложен новый эффективный способ выбора ускоряющих коэффициентов в LR-методе при поиске всех собственных значений пяти- и семидиагональных матриц общего вида произвольной структуры.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989

Перевод авторов

Emel'yanenko G.A., Im Yen Sec P11-89-543
On Search Methods of All Eigenvalues for Block-Tridiagonal, Five-Diagonal and Seven-Diagonal Matrices

The calculation methods of all eigenvalues for block-tridiagonal matrices of general type are given. A new way of speed-up coefficient choice in LR-method at the search of all eigenvalues for five- and seven-diagonal arbitrary structure matrices of general type is proposed.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

Preprint of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989