89-516

объединенный
институт
ядерных
исследований
дубна

Р11-89-516

И.В.Амирханов, Е.П.Жидков, И.Е.Жидкова

УСРЕДНЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ БЕТАТРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ РЕЗОНАНСОВ В ЦИКЛИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЯХ

Направлено в журнал "Математическое моделирование"

1989

Частицы в циклических ускорителях обычно проходят огромный путь, совершая большое число оборотов. При этом они неизбежно подвергаются действию различных возмущений, связанных с несовершенством магнитных систем, неточностью в ускоряющих устройствах и т.п. Поэтому решающее значение для нормальной работы ускорителя имеет устойчивость движения /I,2/.

Основной интерес в теории циклических ускорителей представляют такие поля и такие начальные условия, которые приводят к близкому к периодическому движению частиц на орбите. Существование таких траекторий не является, вообще говоря, очевидным и накладывает некоторые ограничения на геометрию магнитного поля. В реальной установке должно быть выполнено чрезвычайно важное условие устойчивости орбиты.

Настоящая работа посвящена развитию методов моделирования движения заряженной частицы в циклическом ускорителе и исследованию вопроса об устойчивости ее движения.

В § I мы получим с использованием ЭВМ уравнения для малых отклонений от замкнутой орбиты. Далее будут приведены некоторые ограничения, накладываемые на магнитное поле в окрестности равновесной (идеальной) орбиты.

В § 2 описывается алгоритм метода усреднения /3/ для исследования полученных уравнений.

В § 3 приведены усредненные уравнения для различных резонансов.

§ I. Уравнения движения заряженных частиц в магнитном поле

Уравнение движения заряженной частицы в электрическом и магнитном полях (уравнение Ньютона-Лоренца) имеет вид[I,2]

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\vec{r}}) = e\left[\vec{E} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}\right], \tag{I.I}$$

где

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(\dot{r}/c)^2}}$$ – релятивистская масса частицы,

m_0 – масса покоя частицы, c – скорость света, e – величина элементарного заряда частицы, $\vec{r}$ – радиус-вектор частицы, $\vec{E}$ и $\vec{B}$ – векторы напряженности электрического и магнитного поля соответственно.

Двигаясь в магнитном поле ускорителя, частицы увеличивают свою энергию под действием ускоряющих электрических полей. На протяжении одного оборота энергия частицы меняется незначительно. Поэтому обычно[I,2] уравнение (I.I) изучают при $\vec{E}=0$. Тогда $m = const$ и в цилиндрической системе координат

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + \dot{z}^2} = const, \tag{I.2}$$

где v – скорость частицы.

Учитывая (I.2), уравнение (I.I) можно записать[2] так:

$$m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 = e\left[r\dot{\theta}B_z - \dot{z}B_\theta\right];$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = e\left[\dot{z}B_r - \dot{r}B_z\right];$$

$$m\ddot{z} = e\left[\dot{r}B_\theta - r\dot{\theta}B_r\right], \tag{I.3}$$

B_r, B_θ, B_z – компоненты напряженности магнитного поля,
$\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}$ – производные по времени t.

Теперь получим уравнения для малых отклонений от идеальной орбиты. Для этого в системе (I.3) перейдем к новым безразмерным величинам:

$$r = R_0(\varepsilon x + 1); \quad z = R_0 \varepsilon z; \quad \varepsilon = \frac{r_0}{R_0};$$
$$\bar{B}_z = \frac{B_z}{B_0}; \quad \bar{B}_x = \frac{B_r}{B_0}; \quad \bar{B}_\theta = \frac{B_\theta}{B_0}; \tag{I.4}$$
$$\frac{eB_0R_0}{mV} = -1,$$

где x - горизонтальное отклонение от идеальной орбиты; z - вертикальное отклонение от идеальной орбиты; R_0 - средний радиус ускорителя (радиус идеальной орбиты); r_0 - минимальный из допустимых размеров пучка; $\varepsilon = \frac{r_0}{R_0}$ - малый параметр; B_0 - поле при $x = 0$, $z = 0$.

Исключим далее время как независимую переменную, заменив ее на азимут θ. Тогда в новых переменных первое и третье уравнение в (I.3) примут вид/2/:

$$x'' = F_x(\varepsilon, x, z, x', z'),$$
$$z'' = F_z(\varepsilon, x, z, x', z'), \tag{I.5}$$

где

$$F_x = \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon x + 1)\left[1 - D\bar{B}_z\right] + D z' \bar{B}_\theta,$$
$$F_z = D\left[\frac{\varepsilon x + 1}{\varepsilon}\bar{B}_x - x'\bar{B}_\theta\right], \tag{I.6}$$
$$D = \sqrt{1 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2(x^2 + (x')^2 + (z')^2)}$$

и штрих означает дифференцирование по θ.

Отметим, что обычно в литературе/I,2,5,6,8-I0/ уравнения вида (I.5) получают и приводят лишь для первого приближения по ε (т.е. до величин порядка ε включительно), пренебрегая членами более высокого порядка. В настоящей работе все уравнения, моделирующие движение заряженной частицы в ускорителе, получены в третьем приближении (т.е. до членов порядка ε^3 включительно).

Магнитное поле, используемое обычно в окрестности равновесной орбиты, подчиняется условиям /I,2/:

$$rot\ \vec{B} = 0\ , \tag{I.7}$$

$$div\ \vec{B} = 0\ , \tag{I.8}$$

которые накладывают ограничения на возможные конфигурации секторного поля (секторное поле - участок магнитного поля, однородный по азимуту θ /2/).

В новых переменных (x, z) условия (I.8) и (I.7) принимают следующий вид:

$$\varepsilon \bar{B}_x + (\varepsilon x + 1)\left[\frac{\partial B_z}{\partial z} + \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial x}\right] = 0\ , \tag{I.9}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \bar{B}_x = \frac{\partial}{\partial x} \bar{B}_z\ . \tag{I.10}$$

При изучении нелинейных эффектов в теории циклических ускорителей принято представлять компоненты магнитного поля в виде ряда Тейлора:

$$\begin{aligned} \bar{B}_z &= \sum_{\ell, k=0}^{\infty} \varepsilon^{\ell+k} B_{z\ell k}(\theta) x^{\ell} z^{k}\ , \\ \bar{B}_x &= \sum_{\ell; k=0}^{\infty} \varepsilon^{\ell+k} B_{x\ell k}(\theta) x^{\ell} z^{k}\ , \end{aligned} \tag{I.11}$$

где $B_{z\ell k}(\theta)$ и $B_{x\ell k}(\theta)$ - периодические функции, имеющие период T. На практике, как правило, эти функции представляются в виде ряда Фурье, т.е.

$$\begin{aligned} B_{z\ell k}(\theta) &= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} b_{z\ell k\alpha}\, e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta}\ , \\ B_{x\ell k}(\theta) &= \sum_{\alpha=-\infty}^{+\infty} b_{x\ell k\alpha}\, e^{i\frac{2\pi}{T}\alpha\theta}\ . \end{aligned} \tag{I.12}$$

Постоянные $b_{z\ell k\alpha}, b_{x\ell k\alpha}$ и T связаны с реальной магнитной структурой конкретного циклического ускорителя. Условия (I.9) и (I.I0) устанавливают связь между коэффициентами $B_{z\ell k}$ и $B_{x\ell k}$:

$$
\begin{gathered}
B_{x00}=0, \quad B_{z00}=1, \quad B_{z10}=B_{x01}, \quad B_{x11}=2B_{z20}, \\
B_{z11}=2B_{x02}, \quad B_{x21}=3B_{z30}, \quad B_{x12}=B_{z21}, \\
B_{z12}=3B_{x03}, \quad B_{z11}+B_{z01}+2B_{x20}+2B_{x10}=0, \\
2B_{z02}+B_{x11}+B_{x01}=0, \quad B_{z21}+B_{z11}+3B_{x30}+ \\
+3B_{x20}=0, \quad B_{z12}+B_{z02}+B_{x21}+B_{x11}=0, \\
3B_{z03}+B_{x12}+B_{x02}=0.
\end{gathered}
\tag{I.I3}
$$

Кроме того, часто предполагают , что

$$
B_{z01}=O(\varepsilon), \quad B_{x10}=O(\varepsilon). \tag{I.I4}
$$

Поскольку реальные параметры ускорителя никогда не могут идеально точно соответствовать расчетным, практически очень важно знать влияние того или иного возмущения на движение частиц, а также допуски на них. Допуски на отклонения магнитного поля от идеального также формулируются для отдельных членов разложения полей (I.II). С повышением требований к характеристикам ускоренного пучка и снижению потерь при ускорении появляется необходимость учета в уравнениях движения нелинейностей все более высоких порядков/I/. Для этого в системе уравнений (I.5) вместо $\bar{B}_z$ и $\bar{B}_x$ подставим ряд (I.II) и квадратный корень в (I.6) также разложим в ряд, тогда система (I.5) примет вид

$$
x'' + n_x(\theta)x + q_x(\theta)z = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F_{xk}(x,x',z,z',\theta) ,
$$

$$z'' + n_z(\theta) z + q_z(\theta) x = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k F_{zk}(x, x', z, z', \theta), \tag{I.15}$$

где F_{xk}, F_{zk} – полиномы от x, x', z, z' и периодические по θ функции; функции $n_x(\theta), n_z(\theta), q_x(\theta), q_z(\theta)$ – также периодические по θ функции.

При получении высших приближений по малому параметру ε вычисление явного вида F_{xk}, F_{zk}, $n_x(\theta)$ и $n_z(\theta)$ становится весьма громоздким. Поэтому основные аналитические выкладки при получении этих функций были выполнены с использованием системы аналитического программирования REDUCE-3.2 /7/ на ЭВМ ЕС-1061.

Для установления устойчивости движения заряженных частиц в синхрофазотроне ОИЯИ практически достаточно /11/ исследовать исходные уравнения в третьем (т.е. с точностью до ε^3 включительно) приближении (это вытекает из следующих простых оценок: пусть $N \simeq 0{,}3 \cdot 10^6$ – число оборотов частицы в ускорителе, $\varepsilon = \frac{r_0}{R_0} \simeq 10^2$, где r_0 – высота камеры, R_0 – радиус идеальной орбиты, тогда $0 < \theta \lesssim \frac{1}{\varepsilon^n} \simeq 2\pi N$ и последнее приближенное равенство выполняется при $n = 3$), тогда явный вид этих функций

$$n_x(\theta) = (B_{z10} + 1), \quad q_x(\theta) = B_{z01},$$

$$n_z(\theta) = -B_{x01}, \quad q_z(\theta) = -B_{x10},$$

$$F_{x1} = -\frac{1}{2}(x')^2 - \frac{1}{2}(z')^2 - (B_{z20} + 2B_{z10} + 1)x^2 - \\ -(B_{z11} + 2B_{z01})xz - B_{z02} z^2,$$

$$F_{x2} = -\frac{1}{2}B_{z10}(x')^2 x - \frac{1}{2}B_{z01}(x')^2 z - \frac{1}{2}B_{z10}(z')^2 x - \frac{1}{2}B_{z01}(z')^2 z - \\ -(B_{z30} + 2B_{z20} + B_{z10})x^3 - (B_{z21} + 2B_{z11} + B_{z01})x^2 z - \\ -B_{z03} z^3, \tag{I.16}$$

$$F_{x3} = \frac{1}{8}(x')^4 + \frac{1}{4}(x')^2(z')^2 + \frac{1}{8}(z')^4 - \frac{1}{2}B_{z20}(x')^2x^2 -$$

$$-\frac{1}{2}B_{z11}(x')^2xz - \frac{1}{2}B_{z02}(x')^2z^2 - \frac{1}{2}B_{z20}(z')^2x^2 -$$

$$-\frac{1}{2}B_{z11}(z')^2xz - \frac{1}{2}B_{z02}(z')^2z^2 - (B_{z40}+2B_{z30}+B_{z20})x^4 -$$

$$-(B_{z31}+2B_{z21}+B_{z11})x^3z - (B_{z22}+2B_{z12}+B_{z02})x^2z^2 -$$

$$-(B_{z13}+2B_{z03})xz^3 - B_{z04}z^4 ,$$

$$F_{z1} = (B_{x20}+2B_{x10})x^2 + B_{x11}xz + B_{x02}z^2 ,$$

$$F_{z2} = \frac{1}{2}B_{x10}(x')^2x + \frac{1}{2}B_{x01}(x')^2z + \frac{1}{2}B_{x10}(z')^2x + \frac{1}{2}B_{x01}(z')^2z +$$

$$+(B_{x30}+2B_{x20}+B_{x10})x^3 + (B_{x21}+2B_{x11}+B_{x01})x^2z +$$

$$+(B_{x12}+2B_{x02})xz^2 + B_{x03}z^3 ,$$

$$F_{z3} = \frac{1}{2}B_{x20}(x')^2x^2 + \frac{1}{2}B_{x11}(x')^2xz + \frac{1}{2}B_{x02}(x')^2z^2 +$$

$$+\frac{1}{2}B_{x20}(z')^2x^2 + \frac{1}{2}B_{x11}(z')^2xz + \frac{1}{2}B_{x02}(z')^2z^2 +$$

$$+(B_{x40}+2B_{x30}+B_{x20})x^4 + (B_{x31}+2B_{x21} +$$

$$+B_{x11})x^2z + (B_{x22}+2B_{x12}+B_{x02})x^2z^2 +$$

$$+(B_{x13}+2B_{x03})xz^3 + B_{x04}z^4 .$$

Свойства решений системы уравнений (I.5) или (I.I5) можно изучать, численно решая задачу Коши /I6,I7/. К сожалению, численные расчеты (из-за накопления ошибок, слишком большого времени счета на ЭВМ и т.п.) гарантируют изучение устойчивости движения только до нескольких сотен оборотов (в реальных ускорителях частицы совершают до нескольких сотен тысяч оборотов). Поэтому при исследовании системы (I.5) или (I.I5) широко используются асимптотические методы. Применение этих методов с необходимостью связано с широким кругом аналитических преобразований, подчас весьма громоздких. При получении высших приближений по малому параметру ε задача сталкивается с практически непреодолимыми трудностями аналитических расчетов. Ситуация существенно изменилась с появлением возможности выполнения громоздких аналитических выкладок на ЭВМ.

В следующем параграфе приведем необходимые формулы метода усреднения применительно к исследованию системы уравнений (I.I5) в окрестности различных нелинейных резонансов.

§ 2. Применение метода усреднения к системе (I.I5) в окрестности резонансов

Известно, что резонансные потери составляют одну из важнейших причин потерь частиц в пучке. Изучение различных нелинейных резонансов высокого порядка/I,5,6/ приводит к необходимости учета в уравнениях движения нелинейностей все более высокого порядка. Здесь будет приведен способ получения усредненных уравнений в третьем приближении для системы (I.I5) в окрестности различных резонансов.

В линейном приближении, т.е. при $\varepsilon = 0$, из системы (I.I5) получаем систему

$$\begin{aligned} x'' + n_x(\theta)x + B_{z01} z' &= 0, \\ z'' + n_z(\theta) z - B_{x10} x' &= 0 \end{aligned} \qquad (2.I)$$

с периодическими коэффициентами.

Общее решение (2.I) можно представить в виде/I,2,5,6/

$$
\begin{aligned}
x &= A_x f_x(\theta)\, e^{i\nu_x \theta} + \text{к.с.}\,, \\
z &= A_z f_z(\theta)\, e^{i\nu_z \theta} + \text{к.с.}\,,
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

где $f_x(\theta)$, $f_z(\theta)$ – периодические по θ комплексные функции (функции Флоке); A_x, A_z – произвольные комплексные постоянные; ν_x, ν_z – частоты бетатронных колебаний, т.е. частоты поперечных колебаний частицы относительно идеальной работы в направлениях x и z (радиальном и вертикальном); к.с. – комплексно-сопряженное к первому слагаемому в правой части выражение.

Сначала надо найти область устойчивых решений для системы (2.I), а затем приступить к исследованию системы (I.I5). Здесь мы предполагаем, что первая часть этой задачи уже исследована. Учет нелинейных членов в (I.I5) может нарушить устойчивость линейных колебаний, особенно в окрестности резонансов.

Решение системы (I.I5) исследуем в окрестности резонанса/5,6/

$$
k_x \nu_x + k_z \nu_z = m + \varepsilon \cdot \Delta\,, \qquad (2.3)
$$

где k_x, k_z, m – целые числа, Δ представляет собой расстройку (отклонение исследуемой траектории от линии идеального резонанса). Точно в резонансе, когда $\Delta = 0$, положим $n_x(\theta) = n_{ox}(\theta)$, $n_z(\theta) = n_{oz}(\theta)$. Тогда при $\Delta \neq 0$ с точностью до ε

$$
\begin{aligned}
n_x(\theta) &= n_{ox}(\theta) + \varepsilon \cdot \Delta \cdot g_x(\theta)\,, \\
n_z(\theta) &= n_{oz}(\theta) + \varepsilon \cdot \Delta \cdot g_z(\theta)\,,
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

где $g_x(\theta)$ и $g_z(\theta)$ – известные действительные периодические функции.

Учитывая (2.4), систему (I.I5) с точностью до ε^3 перепишем так:

$$x'' + n_{ox}(\theta)x = \varepsilon \bar{F}_{x1} + \varepsilon^2 F_{x2} + \varepsilon^3 F_{x3} = F_x ;$$
$$z'' + n_{oz}(\theta) z = \varepsilon \bar{F}_{z1} + \varepsilon^2 F_{z2} + \varepsilon^3 F_{z3} = F_z , \qquad (2.5)$$

где

$$\bar{F}_{x1} = F_{x1} - \Delta \cdot g_x(\theta) x - \frac{B_{z01}}{\varepsilon} z ,$$
$$\bar{F}_{z1} = F_{z1} - \Delta \cdot g_z(\theta) z + \frac{B_{x10}}{\varepsilon} x .$$

Сделаем в (2.5) замену переменных:

$$x = A_x f_x(\theta) e^{i\nu_x\theta} + \text{к.с.},$$
$$x' = A_x (f_x' + i\nu_x f_x) e^{i\nu_x\theta} + \text{к.с.},$$
$$z = A_z f_z e^{i\nu_z\theta} + \text{к.с.}, \qquad (2.6)$$
$$z' = A_z (f_z' + i\nu_z f_z) e^{i\nu_z\theta} + \text{к.с.}$$

В новых переменных имеем

$$A_x' = + \frac{1}{2i} f_x^* e^{-i\nu_x\theta} F_x ,$$
$$A_x^{*\prime} = - \frac{1}{2i} f_x e^{i\nu_x\theta} F_x ,$$
$$A_z' = \frac{1}{2i} f_z^* e^{-i\nu_z\theta} F_z , \qquad (2.7)$$
$$A_z^{*\prime} = - \frac{1}{2i} \cdot f_z e^{i\nu_z\theta} F_z .$$

Система дифференциальных уравнений первого порядка (2.7) называется системой в стандартной форме[3] и эквивалентна системе уравнений (2.5) второго порядка. Теперь к исследованию системы (2.7) можно применять метод усреднения[3,4].

Введем следующие векторные обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_x^* \\ A_z \\ A_z^* \end{pmatrix}, \quad P_\ell = \begin{pmatrix} P_{x\ell} \\ P_{x\ell}^* \\ P_{z\ell} \\ P_{z\ell}^* \end{pmatrix}, \quad \ell = 1,2,3, \tag{2.8}$$

где

$$P_{x\ell} = \frac{1}{2i} f_x^* e^{-i\vartheta_x \theta} F_{x\ell}, \qquad \ell = 1,2,3,$$

$$P_{z\ell} = \frac{1}{2i} f_z^* e^{-i\vartheta_z \theta} F_{z\ell}, \qquad \ell = 1,2,3. \tag{2.9}$$

Тогда систему (2.7) можно записать так:

$$A' = \sum_{\ell=1}^{3} \varepsilon^\ell P_\ell \, (A,\theta). \tag{2.10}$$

Для функции A будем искать такую замену переменных, чтобы новые усредненные переменные C, где $C = (C_1, C_2, C_3, C_4)$, мало отличались от A и удовлетворяла бы уравнениям, не содержащим переменную θ :

$$A = C + \varepsilon u_1(C,\theta) + \varepsilon^2 u_2(C,\theta) + \varepsilon^3 u_3(C,\theta) + \cdots, \tag{2.11}$$

$$C' = \varepsilon V_1(c) + \varepsilon^2 V_2(c) + \varepsilon^3 V_3(c) + \cdots \tag{2.12}$$

Уравнениями (2.11) и (2.12) вводятся новые неизвестные функции $u_\ell(c,\theta)$ и $V_\ell(c)$ $(\ell = 1,2,3\ldots)$, и задача сводится к нахождению этих функций. Производя в уравнениях (2.10) замену переменных и используя уравнения (2.12), путем приравнивания членов при одинаковых степенях ε получим следующую систему уравнений для определения $u_\ell(c,\theta)$ и $V_\ell(c)$:

$$V_\ell (c) + \frac{\partial u_\ell (c,\theta)}{\partial \theta} = Q_\ell (c,\theta) , \qquad \ell = 1,2,3, \dots , \tag{2.13}$$

где

$$\begin{aligned} Q_1 (c,\theta) &= P_1 (c,\theta), \\ Q_2 (c,\theta) &= P_2 (c,\theta) + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k!} \left\{ u_1 (c,\theta) \frac{\partial}{\partial c} \right\}^k P_1 (c,\theta) - \\ &\quad - \left(V_1 (c) \frac{\partial}{\partial c} u_1 (c,\theta) \right) , \\ Q_3 (c,t) &= P_3 (c,\theta) + \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{k!} \left\{ u_1 (c,\theta) \frac{\partial}{\partial c} \right\}^k P_2 (c,\theta) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{k!} \left\{ u_2 (c,\theta) \frac{\partial}{\partial c} \right\}^k P_1 (c,\theta) - \\ &\quad - \left(V_1 (c) \frac{\partial}{\partial c} u_2 (c,\theta) \right) - \left(V_2 (c) \cdot \frac{\partial}{\partial c} u_1 (c,\theta) \right) , \ \dots \end{aligned} \tag{2.14}$$

. . . .

Введем некоторые обозначения. Для любой периодической функции $f(c,\theta)$ мы можем написать

$$f = \bar{f} + \tilde{f} , \tag{2.15}$$

где

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f \, d\theta . \tag{2.16}$$

Здесь и далее интегрирование производится при фиксированных аргументах C ; $\bar{f}$ – постоянная часть f, $\tilde{f}$ – переменная часть f. Кроме того, мы будем обозначать через

$$\hat{f} = \widetilde{\int_0^{\theta} \tilde{f} \, d\theta} \tag{2.17}$$

переменную часть интеграла от переменной части f .

Количество введенных функций u_ℓ и V_ℓ в уравнениях (2.II) таково, что для однозначного их определения необходимо ввести дополнительные требования. Наиболее естественным представляется требование обращения в нуль постоянных частей $U_\ell(C,\theta)$. При этом C являются средними значениями (по переменной θ), около которых колеблются истинные значения решений $\overline{A}=C$.

Полагая $\overline{U_\ell}(C,\theta)=0$ и требуя, чтобы уравнения (2.I3) выполнялись тождественно, фиксируем C и приравняем в них порознь постоянные и переменные части:

$$\left.\begin{aligned} V_\ell(c) &= \overline{Q_\ell}(c,\theta), \\ U_\ell(c,\theta) &= \widehat{Q}_\ell(c,\theta). \end{aligned}\right. \qquad i=1,2,3\ldots \tag{2.I8}$$

В заключение заметим, что операция Λ в применении к периодической функции приводит к появлению малых знаменателей/4/, что сильно ухудшает сходимость метода.

§ 3. Усредненные уравнения для различных резонансов

На основе описанного выше алгоритма строится усредненная система уравнений для новых переменных C_K вида

$$c_1' = S_{11}c_1+\ldots+S_{14}c_4+S_{15}c_1^2+\ldots+S_{134}c_4^3+\ldots+S_{169}c_1c_2c_3c_4,$$

$$c_2' = S_{21}c_1+\ldots+S_{24}c_4+S_{25}c_1^2+\ldots+S_{234}c_4^3+\ldots+S_{269}c_1c_2c_3c_4,$$

$$c_3' = S_{31}c_1+\ldots+S_{34}c_4+S_{35}c_1^2+\ldots+S_{234}c_4^3+\ldots+S_{369}c_1c_2c_3c_4,$$

$$c_4' = S_{41}c_1+\ldots+S_{44}c_4+S_{45}c_1^2+\ldots+S_{434}c_4^3+\ldots+S_{469}c_1c_2c_3c_4, \tag{3.I}$$

где S_{kj} (k =I,2,3,4; j=I,2,...,69) – числовые комплексные коэффициенты, связанные с реальной магнитной структурой конкретного ускорителя. Коэффициенты S_{kj} различны для различных резонансов. Причем, $c_1=c_2^*$, $c_3=c_4^*$ и уравнения I-е и 2-е (а также 3-е и 4-е) в системе вида (3.I) для каждого из резонансов являются комплексно-сопряженными.

Усредненные уравнения вида (3.I) были получены на ЭВМ ЕС-I06I с помощью программ/I4/, реализованных с использованием системы аналитического программирования REDUCE-3.2/7/.

Системы уравнений вида (3.I) были построены в окрестности нескольких резонансов для двух видов исходных уравнений (I.I5): для уравнений с линейной частью, имеющей постоянный и периодический коэффициент.

В случае постоянного коэффициента при линейной части в уравнениях (I.I5)

$$n_x(\theta) = \nu_x^2 , \quad n_z(\theta) = \nu_z^2 , \tag{3.2}$$

где ν_x , ν_z – частоты бетатронных колебаний.

В этом случае функции Флоке сводятся к постоянным/I/:

$$f_x(\theta) = \nu_x^{-\frac{1}{2}} , \quad f_z(\theta) = \nu_z^{-\frac{1}{2}} . \tag{3.3}$$

Для системы уравнений (I.I5) при выполнении условий (3.2) построены усредненные уравнения вида (3.I) в третьем приближении (т.е. с точностью до членов порядка ε^3 включительно) по методу Крылова-Боголюбова при правых частях (I.I6), имеющих вид/II/

$$\begin{aligned}
F_{x1} &= A_{11}x^2 + A_{12}z^2 + A_{13}(x')^2 + A_{14}(z')^2 ,\\
F_{x2} &= A_{21}x^3 + A_{22}xz^2 + A_{23}x(x')^2 + A_{24}x(z')^2 ,\\
F_{x3} &= A_{31}x^4 + A_{32}z^4 + A_{33}x^2z^2 + A_{34}x^2(x')^2 + A_{35}z^2(x')^2 +\\
&+ A_{36}x^2(z')^2 + A_{37}z^2(z')^2 + A_{38}(x')^4 + A_{39}(z')^4 +\\
&+ A_{310}(x')^2(z')^2 ,\\
F_{z1} &= B_{11}xz ,\\
F_{z2} &= B_{21}x^2z + B_{22}z^3 + B_{23}(x')^2z + B_{24}z(z')^2 ,\\
F_{z3} &= B_{31}x^3z + B_{32}xz^3 + B_{33}xz(x')^2 + B_{34}xz(z')^2
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(что получается при выполнении условий (I.I3)), в окрестности I9 резонансов:

$$\begin{gathered}\nu_x = \pm m\,, \quad 2\nu_x = \pm m\,, \quad 3\nu_x = \pm m\,, \quad 4\nu_x = m\,,\\ 5\nu_x = m\,, \quad 2\nu_z = \pm m\,, \quad 4\nu_z = m\,, \quad 2\nu_z \pm \nu_x = m\,,\\ 2\nu_z \pm 2\nu_x = m\,, \quad 2\nu_z \pm 3\nu_x = m\,, \quad 4\nu_z \pm \nu_x = m\,.\end{gathered} \tag{3.5}$$

Полученные усредненные уравнения вида (3.I) для резонансов (3.5) будут опубликованы.

В случае периодического коэффициента при линейной части в уравнениях (I.I5) были построены усредненные уравнения вида (3.I) во втором приближении (т.е. с точностью до членов порядка ε^2 включительно) по методу Крылова-Боголюбова при правых частях (I.I6) в окрестности 24 резонансов:

$$\begin{gathered}\nu_x = \pm m\,, \quad 2\nu_x = \pm m\,, \quad 3\nu_x = m\,, \quad 4\nu_x = m\,,\\ \nu_z = \pm m\,, \quad 2\nu_z = \pm m\,, \quad 3\nu_z = m\,, \quad 4\nu_z = m\,,\\ \nu_z \pm \nu_x = m\,, \quad \nu_z \pm 2\nu_x = m\,, \quad \nu_z \pm 3\nu_x = m\,,\\ 2\nu_z \pm \nu_x = m\,, \quad 2\nu_z \pm 2\nu_x = m\,, \quad 3\nu_z \pm \nu_x = m\,.\end{gathered} \tag{3.6}$$

Полученные усредненные уравнения в явном виде в окрестности резонансов (3.6) для уравнений (I.I5) с линейной частью, имеющей периодический коэффициент, будут опубликованы*. Эти укороченные уравнения предназначены для моделирования бетатронных колебаний в окрестности резонансов (3.6) в нуклотроне ОИЯИ.

---

*Аналогичные результаты приведены в /I5/.

Полученные укороченные уравнения вида (3.I) позволяют исследовать вопрос об устойчивости движения частицы в окрестности данного резонанса. Можно попытаться провести такое исследование непосредственно для уравнений типа (3.I) либо исследовать полученную систему уравнений на фазовой плоскости. Такие исследования были проведены для нескольких /II,I2,I3/ резонансов для синхрофазотрона ОИЯИ. При этом с помощью замены

$$
\begin{aligned}
&c_1 = \frac{1}{2i} a_x e^{i\psi_x}, && c_3 = \frac{1}{2i} a_z e^{i\psi_z}, \\
&c_2 = -\frac{1}{2i} a_x e^{-i\psi_x}, && c_4 = -\frac{1}{2i} a_z e^{-i\psi_z}, \\
&S_{kj} = \alpha_{kj} e^{i\beta_{kj}}, && S^*_{kj} = \alpha_{kj} e^{-i\beta_{kj}}
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

переходим от системы вида (3.I) к усредненной системе уравнений в действительных переменных:

$$
\begin{aligned}
a_x' &= P_{a_x}(a_x, a_z)\sin\varphi + Q_{a_x}(a_x, a_z)\cos\varphi + R_{a_x}(a_x, a_z), \\
a_z' &= P_{a_z}(a_x, a_z)\sin\varphi + Q_{a_z}(a_x, a_z)\cos\varphi + R_{a_z}(a_x, a_z), \\
\psi_x' &= P_{\psi_x}(a_x, a_z)\sin\varphi + Q_{\psi_x}(a_x, a_z)\cos\varphi + R_{\psi_x}(a_x, a_z), \\
\psi_z' &= P_{\psi_z}(a_x, a_z)\sin\varphi + Q_{\psi_z}(a_x, a_z)\cos\varphi + R_{\psi_z}(a_x, a_z),
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

где $\varphi = k_x\nu_x + k_z\nu_z$ (в окрестности резонанса $k_x\nu_x + k_z\nu_z = m$). Переменные a_x, a_z соответствуют амплитудам, а ψ_x, ψ_z – фазам бетатронных колебаний частицы по осям x, z соответственно. P_α, Q_α и R_α $(\alpha = a_x, a_z, \psi_x, \varphi_z)$ – полиномы от a_x, a_z с числовыми коэффициентами (зависящими в случае $n_x(\theta) \neq const$, $n_z(\theta) \neq const$, в частности, от функций Флока $f_x(\theta)$, $f_z(\theta)$) вида

$$T_\alpha(a_x, a_z) = \tilde{T}_\alpha(a_x, a_z)(H_{\alpha 1} + H_{\alpha 2} a_x^2 + H_{\alpha 3} a_z^2),$$

где $T = P, Q$ или R; $\alpha = a_x, a_z, \psi_x, \psi_z$; $\tilde{T}_\alpha(a_x, a_z)$ - полиномы с единичными коэффициентами от a_x, a_z, причем, в случае $\alpha = \psi_x$ или $\alpha = \psi_z$ под полиномом понимается обобщенный полином, т.е.

$$\tilde{T}_\alpha(a_x, a_z) = \frac{\tilde{T}_{1\alpha}(a_x, a_z)}{\tilde{T}_{2\alpha}(a_x, a_z)}.$$

Движение заряженной частицы в ускорителе будем считать устойчивым при $0 \le \theta \lesssim \frac{1}{\varepsilon^n} \simeq 2\pi N$ (где n =1,2,3,... - порядок приближения, N - число оборотов), если на этом промежутке амплитуды бетатронных колебаний частицы A_x и A_z остаются ограниченными, т.е.

$$|A_x| \le A_{x_0}, \quad |A_z| \le A_{z_0}, \tag{3.9}$$

где $A_{x_0} > 0$, $A_{z_0} > 0$ - заранее заданные числа, связанные с размерами пучка.

Понимая устойчивость движения частицы в определенном выше смысле, можно, наложив некоторые ограничения на коэффициенты H_{kj} (которые непосредственно зависят от параметров магнитного поля $b_{xlk\alpha}$, $b_{zlk\alpha}$ (см. (I.I2)), построить для системы (3.8) интеграл движения вида

$$c_1 a_x^2 + c_2 a_z^2 = c_3 + O(\varepsilon^{n+1}), \tag{3.10}$$

где $c_1, c_2, c_3 > 0$ - константы, доказав тем самым ограниченность амплитуд, а следовательно, и устойчивость в определенном выше смысле. Такого вида исследование было проведено для резонансов $2\nu_z - \nu_x = 1$ /II/, $2\nu_z + 2\nu_x = 3$, $3\nu_z - \nu_x = 2$, $4\nu_z + \nu_x = 4$ /I3/ для синхрофазотрона ОИЯИ.

Иногда, накладывая ограничения на коэффициенты H_{kj}, можно получить решение системы (3.8), что, например, сделано в работе /13/.

В некоторых случаях удобно провести моделирование поведения частицы на фазовой плоскости. Такое исследование было сделано в окрестности резонанса $3\nu_x = 2$, на свойствах которого основана система медленного вывода первичного пучка из синхрофазотрона ОИЯИ /12/.

Литература

1. Коломенский А.А., Лебедев А.Н. Теория циклических ускорителей. Физматгиз, М., 1962.
2. Брук Г. Циклические ускорители заряженных частиц. Атомиздат, М., 1970.
3. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Наука, М., 1974.
4. Гребенников Е.А., Рябов Ю.А. Конструктивные методы анализа нелинейных систем. Наука, М., 1979.
5. Schoch A. Theory of Linear and Non-linear Perturbations of Betatron Oscillations in Alternating Gradient Synchrotron. CERN 57-21, Geneva, 1957.
6. Guiguard G. A General Treatment of Resonances in Accelerators. CERN 78-11, Geneva, 1978.
7. Hearn A.C. REDUCE User's Manual. Version 3.2, Rand Corporation, Santa Monica, CA 90406, USA, 1985.
8. Белов В.П., Макаров А.А. НИИЭФА П-Б-0611, Ленинград, 1983.
9. Белов В.П. и др. ОИЯИ, 9-11650, Дубна, 1978.
10. Балбеков В.И., Чирков П.Н. ИФВЭ,82-133, Серпухов, 1983.
11. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, Р11-87-452, Дубна, 1987.
12. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, Р11-88-606, Дубна, 1988.
13. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, Р11-88-714, Дубна, 1988.

I4. Жидкова И.Е. ОИЯИ, PII-88-7I6, Дубна, I988; ОИЯИ,PII-88-722, Дубна, I988.

I5. Амирханов И.В. и др. ОИЯИ, PII-88-904, Дубна, I988.

I6. Василишин Б.В. и др. ОИЯИ, 9-4223, Дубна, I968.

I7. Жидков Е.П. и др. ОИЯИ, II-9966, Дубна, I976.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июля I989 года.