сообщения
объединенного
института
ядерных
исследований
дубна



Р11-89-473

Е.П.Жидков, А.В.Федоров, О.И.Юлдашев

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ МАГНИТОСТАТИКИ ДЛЯ ВЕКТОРНОГО ПОТЕНЦИАЛА

1989

Жидков Е.П., Федоров А.В., Юлдашев О.И. P11-89-473
Исследование интегрального уравнения
магнитостатики для векторного потенциала

Исследуется интегральное уравнение для векторного потенциала, к которому сводится основная задача магнитостатики. В отличие от более широко известного интегрального уравнения для векторов поля, рассматриваемое уравнение имеет более гладкое ядро, а также вдвое меньшее число неизвестных в двумерных задачах. Исследование нелинейного интегрального оператора проводится в гильбертовом пространстве векторов-функций, являющихся квадратично-суммируемыми и имеющих квадратично-суммируемый ротор. Показаны существование и единственность решения уравнения, сходимость метода последовательных приближений. Доказана положительная определенность производной Фреше и, как следствие, сходимость метода Ньютона и его модификации.

Работа выполнена в Лаборатории вычислительной техники и автоматизации ОИЯИ.

**Сообщение Объединенного института ядерных исследований. Дубна 1989**

Перевод авторов

Zhidkov E.P., Fedorov A.V., Yuldashev O.I. P11-89-473
Investigation of the Magnetostatic Integral
Equation for Vector Potential

Magnetostatic field problem formulated as an integral equation for vector potential is investigated. In comparison with more widely used integral equation for field vectors this equation has a weakly singular kernel and twice less number of unknowns in two dimensional case. The nonlinear integral operator is investigated in Hilbert space of vector functions which are square-integrable and has a square-integrable curl. Existence and uniqueness of the solution, convergence of successive approximations method are shown. Positive definiteness of Frechet derivative and convergence of Newton method and modified Newton method are also proved for above equation.

The investigation has been performed at the Laboratory of Computing Techniques and Automation, JINR.

**Communication of the Joint Institute for Nuclear Research. Dubna 1989**

В настоящей работе исследуется интегральная формулировка задачи магнитостатики для векторного потенциала в предположении изотропности ферромагнитных сред. По сравнению с более широко известной интегральной формулировкой для векторов поля [1,2] , рассматриваемое интегральное уравнение имеет большую гладкость ядра, а в двумерных задачах к тому же имеет вдвое меньшее число неизвестных. Эффективность использования интегральной формулировки для векторного потенциала была продемонстрирована в задаче формирования однородного магнитного поля линейного индукционного ускорителя ЛИУ-30 [3].

Пусть $\bar{A}$ - векторный потенциал, вводимый по формуле $\bar{B} = \operatorname{rot} \bar{A}$ , где $\bar{B}$ - вектор магнитной индукции. Используя уравнения Максвелла, условия для вектора $\bar{B}$ на бесконечности и на границе раздела сред с разными магнитными характеристиками, из векторной формулы Грина получаем интегральное уравнение для вектора $\bar{A}$ [3] :

$$\bar{A}(x) - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \bar{M}(y) \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) d\Omega_y = \bar{A}_c(x), \quad x \in \Omega, \qquad (1)$$

где $\Omega$ -область, занимаемая ферромагнетиком, $r = |x-y|$, $\bar{M}(x) = (1 - \frac{1}{\mu})\bar{B}(x)$, $\mu(x, |\bar{B}|)$ - заданная функция, через $|\bar{B}|$ обозначен модуль вектора $\bar{B}$, $\bar{A}_c$ - известный вектор, вычисляемый по формуле

$$\bar{A}_c(x) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega_c} \frac{\bar{\delta}(y)}{r} d\Omega_y ,$$

здесь $\Omega_c$ - область, занимаемая токовыми обмотками, $\Omega \cap \Omega_c = \varnothing$ , $\bar{\delta}$ - заданный вектор плотности тока.

Предполагается, что $\Omega$ - ограниченная область в $R^3$, обладающая липшицевой границей Г. Исследование уравнения (I) проводится в гильбертовом пространстве вектор-функций [4] :

$$H(\mathrm{rot},\Omega)=\{\bar u \mid \bar u\in L_2(\Omega)^3,\ \mathrm{rot}\,\bar u\in L_2(\Omega)^3\},$$

со скалярным произведением

$$(\bar u,\bar v)_\alpha=\alpha(\bar u,\bar v)+(\mathrm{rot}\,\bar u,\mathrm{rot}\,\bar v),$$

$\bar u,\bar v\in H(\mathrm{rot},\Omega)$, $\alpha>0$ . Через $L_2(\Omega)^3$ обозначено пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $L_2(\Omega)$, $(.,.)$ - скалярное произведение в $L_2(\Omega)^3$.

В пункте I рассматриваются интеграл со слабой особенностью

$$(Q\bar M)(x)\equiv\frac{1}{4\pi}\int_\Omega \bar M(y)\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)d\Omega_y\ ,\quad x\in\Omega,$$

и сингулярный интеграл

$$S\bar M\equiv\mathrm{rot}\,Q\bar M$$

как операторы из $L_2(\Omega)^3$ в $L_2(\Omega)^3$. Формулируются их основные свойства.

В пункте 2 устанавливается существование и единственность решения уравнения (I), а также сходимость метода последовательных приближений.

В пункте 3 для решения уравнения (I) устанавливаются условия сходимости итерационного процесса Ньютона и его модификации.

Очевидно, что вектор магнитной индукции, являющийся ротором решения уравнения (I), удовлетворяет в обобщенном смысле дифференциальным магнитостатическим уравнениям Максвелла. После решения уравнения (I) значение $\bar B$ можно определить в любой точке $x\in R^3\setminus(\bar\Omega\cup\bar\Omega_c)$ по формуле

$$\bar B(x)=\frac{1}{4\pi}\int_\Gamma\left[(\bar n\cdot\bar B)\nabla\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{\mu}(\bar n\times\bar B)\times\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS_y+\mathrm{rot}\,\bar A_c\ ,$$

где $\bar n$ -вектор внешней к Г нормали, то есть используя только граничные значения найденного вектора $\bar B$.

## I. Свойства линейных интегральных операторов

Сформулируем свойства операторов $Q$ и $S$ . Оператор $Q: L_2(\Omega)^3\to L_2(\Omega)^3$ вполне непрерывен и самосопряжен. Кроме того, $Q$ имеет квадратично



суммируемые в $\Omega$ обобщенные первые производные [5] . Прежде чем установить некоторые свойства оператора $S$ , введем обозначения.

Через $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_\alpha$ будем обозначать нормы в гильбертовых пространствах $L_2(\Omega)^3$ и $H(\mathrm{rot},\Omega)$ соответственно. Пусть [6] : $\mathring{J}(R^3)$-множество всех бесконечно дифференцируемых соленоидальных вектор -функций с компактным носителем, $J_1(R^3)$ - замыкание $\mathring{J}(R^3)$ в норме

$$\|\bar u\|_{J_1(R^3)}=\left(\sum_{k=1}^{3}\int_{R^3}\left|\frac{\partial\bar A}{\partial x_k}\right|^2dx\right)^{1/2},$$

$\mathfrak{D}(\Omega)^3$- множество бесконечно дифференцируемых финитных вектор-функций с носителем в $\Omega$ - плотное в $L_2(\Omega)^3$.

Отметим, что $J_1(R^3)$ - гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\bar u,\bar v)_{J_1(R^3)}=\sum_{k=1}^{3}\int_{R^3}\frac{\partial\bar u}{\partial x_k}\cdot\frac{\partial\bar v}{\partial x_k}dx\ .$$

Лемма I

Оператор $S: L_2(\Omega)^3\to L_2(\Omega)^3$ имеет следующие свойства: $S=S^*$, $\|S\|\le 1$.

Доказательство

Самосопряженность оператора $S$ можно непосредственно проверить. Отметим, что если граница Г достаточно гладкая, например, является поверхностью Ляпунова, то следствием леммы2.I из [7] является $\|S\|\le 1$. Установим этот факт, когда Г-липшицева. Будем использовать следующее свойство векторов из $J_1(R^3)$ [6] :

$$(\mathrm{rot}\,\bar u,\mathrm{rot}\,\bar v)_{L_2(R^3)^3}=(\bar u,\bar v)_{J_1(R^3)},$$

где $\bar u,\bar v\in J_1(R^3)$.

Сначала докажем, что

$$\|S\bar w\|\le\|\bar w\|\ ,\quad \bar w\in\mathfrak{D}(\Omega)^3,$$

а затем построим непрерывное продолжение $S$ на все пространство $L_2(\Omega)^3$. Пусть $\bar w\in\mathfrak{D}(\Omega)^3$, рассмотрим линейный функционал $\varphi(\bar v)=(\bar w,\mathrm{rot}\,\bar v)$, $\bar v\in J_1(R^3)$. Этот функционал ограничен, так как

$$(\bar w,\mathrm{rot}\,\bar v)\le\|\bar w\|\|\mathrm{rot}\,\bar v\|\le\|\bar w\|\|\mathrm{rot}\,\bar v\|_{L_2(R^3)^3}=\|\bar w\|\|\bar v\|_{J_1(R^3)}.$$

Следовательно, в силу теоремы Рисса, существует единственный элемент $\bar u\in J_1(R^3)$ : $(\bar u,\bar v)_{J_1(R^3)}=\varphi(\bar v)$, $\bar v\in J_1(R^3)$. (2)

Покажем, что $\bar u = Q\bar w$ удовлетворяет уравнению (2). Пусть $\bar v_n \to \bar v$, $n=1,2,\dots$, $\bar v_n \in \overset{\circ}{J}(R^3)$. Из [6] следует, что

$$(Q\bar w, \bar v_n)_{J_1(R^3)} = (\bar w, \mathrm{rot}\,\bar v_n). \qquad (3)$$

Переходя в равенстве (3) к пределу, получим

$$(Q\bar w, \bar v)_{J_1(R^3)} = (\bar w, \mathrm{rot}\,\bar v), \quad \bar v \in J_1(R^3).$$

Отметим, что $Q\bar w \in J_1(R^3)$ [6], поэтому, выбирая $\bar v = Q\bar w$, будем иметь

$$\|Q\bar w\|^2_{J_1(R^3)} = (\bar w, \mathrm{rot}\,Q\bar w) \le \|\bar w\|\,\|\mathrm{rot}\,Q\bar w\|_{L_2(R^3)^3}.$$

Откуда следует, что

$$\|S\bar w\| \le \|\bar w\|, \quad \bar w \in \mathcal{D}(\Omega)^3.$$

Далее используем теорему о существовании единственного непрерывного продолжения оператора $S : \mathcal{D}(\Omega)^3 \to L_2(\Omega)^3$ на все пространство $L_2(\Omega)^3$ с сохранением нормы [8]. Это продолжение будем обозначать тем же символом $S$.

## 2. Существование и единственность решения

Приведем один известный результат [9,10], который будем использовать.

Лемма2 [10]

Пусть $\bar H(x, \bar B) = \bar B/\mu(x, |\bar B|)$, $\bar H$ – дифференцируемая по $\bar B$ при всех $x \in \Omega$ функция, измеримая в $\Omega$ для всех $\bar B \in R^3$. Если, кроме того, $\frac{1}{\mu_d} \equiv \frac{d|\bar H|}{d|\bar B|}$, и выполняются неравенства:

$$\frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu_d} \ge \nu_* > 0, \quad \nu_* < 1, \quad \frac{1}{\mu}, \frac{1}{\mu_d} \le 1, \qquad (4)$$

то

$$|\bar M_1 - \bar M_2| \le (1-\nu_*)\,|\bar B_1 - \bar B_2|, \quad x \in \Omega, \qquad (5)$$

здесь $\bar M_i = \bar B_i - \bar H_i$, $i = 1, 2$.

Неравенство (5) также означает, что

$$\|\bar M_1 - \bar M_2\| \le (1-\nu_*)\,\|\bar B_1 - \bar B_2\|, \qquad (6)$$

где $\bar M_i$, $\bar B_i \in L_2(\Omega)^3$ и $\bar M_i = (1 - 1/\mu)\,\mathrm{rot}\,\bar A_i$, $\bar B_i = \mathrm{rot}\,\bar A_i$, $i = 1, 2$.

Пусть

$$R(\bar A) \equiv \bar A - Q\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\mathrm{rot}\,\bar A.$$

Свойства оператора $R : H(\mathrm{rot}, \Omega) \to H(\mathrm{rot}, \Omega)$ устанавливаются в следующей лемме.



Лемма3

Пусть выполняется неравенство (6), $\|Q\| = C$ и $\alpha^* = 4\nu_*/(c(1-\nu_*))^2$, тогда:

1) $R$ – сильно монотонный оператор, то есть для $\bar A_1, \bar A_2 \in H(\mathrm{rot}, \Omega)$ выполнено

$$(R(\bar A_1) - R(\bar A_2), \bar A_1 - \bar A_2)_\alpha \ge \varkappa\,\|\bar A_1 - \bar A_2\|^2_\alpha, \quad \alpha \in (0, \alpha^*), \qquad (7)$$

где $\varkappa = 0{,}5(1 + \nu_* - b) > 0$, $b^2 = (1-\nu_*)(1 + \alpha c^2)$.

2) $R$ – удовлетворяет условию Липшица, то есть для $\bar A_1$, $\bar A_2 \in H(\mathrm{rot}, \Omega)$ выполнено

$$\|R(\bar A_1) - R(\bar A_2)\|_\alpha \le \ell\,\|\bar A_1 - \bar A_2\|_\alpha, \quad \alpha > 0, \qquad (8)$$

где $\ell = 0{,}5\left(b + \sqrt{b^2 + 4(2-\nu_*)}\right)$.

Доказательство

Докажем свойство 1. Пусть $\Delta\bar A \equiv \bar A_1 - \bar A_2$, $\Delta\bar M \equiv \bar M_1 - \bar M_2$ для $\bar A_i \in H(\mathrm{rot}, \Omega)$, $\bar M_i \in L_2(\Omega)^3$, $i = 1, 2$. Тогда имеем

$$(R(\bar A_1) - R(\bar A_2), \Delta\bar A) = \alpha(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M, \Delta\bar A) + (\mathrm{rot}(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M), \mathrm{rot}\,\Delta\bar A). \qquad (9)$$

Оценим первое слагаемое в (9):

$$\alpha(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M, \Delta\bar A) \ge \alpha\left(\|\Delta\bar A\|^2 - \|\Delta\bar A\|\,\|Q\Delta\bar M\|\right).$$

Используя неравенство (6), получим

$$\alpha(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M, \Delta\bar A) \ge \alpha\left(\|\Delta\bar A\|^2 - c(1-\nu_*)\,\|\Delta\bar A\|\,\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|\right).$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ :

$$\|\Delta\bar A\|\,\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\| \le 0{,}5\left(\frac{1}{\varepsilon}\|\Delta\bar A\|^2 + \varepsilon\,\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2\right),$$

то

$$\alpha(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M, \Delta\bar A) \ge \alpha\left(\|\Delta\bar A\|^2 - c(1-\nu_*)\left(\frac{1}{2\varepsilon}\|\Delta\bar A\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2\right)\right) =$$

$$= \alpha\left\{\left(1 - c(1-\nu_*)\frac{1}{2\varepsilon}\right)\|\Delta\bar A\|^2 - c(1-\nu_*)\frac{\varepsilon}{2}\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2\right\}.$$

Оценим второе слагаемое в (9):

$$(\mathrm{rot}(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M), \mathrm{rot}\,\Delta\bar A) \ge \|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2 - \|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|\,\|\mathrm{rot}\,Q\Delta\bar M\|.$$

Используя неравенство (6), получим

$$(\mathrm{rot}(\Delta\bar A - Q\Delta\bar M), \mathrm{rot}\,\Delta\bar A) \ge \nu_*\,\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2.$$

Складывая полученные неравенства, будем иметь:

$$(R(\bar A_1)-R(\bar A_2),\Delta\bar A)_\alpha \geq \alpha\left(1-c(1-\nu_*)\frac{1}{2\varepsilon}\right)\|\Delta\bar A\|^2 + \\ +\left(\nu_*-\alpha c(1-\nu_*)\frac{\varepsilon}{2}\right)\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2.$$

Выбирая

$$\varepsilon=\frac{\sqrt{1+\alpha c^2}-1}{\alpha c}, \tag{10}$$

получим (7).

Аналогично доказывается неравенство (8). Имеем

$$\|R(\bar A_1)-R(\bar A_2)\|_\alpha^2 \leq \|\Delta\bar A\|_\alpha^2+\|Q\Delta\bar M\|_\alpha^2 + 2\,|(\Delta\bar A, Q\Delta\bar M)_\alpha|. \tag{11}$$

Используя неравенство (6), получим

$$\|Q\Delta\bar M\|_\alpha^2 \leq (1+\alpha c^2)\|\Delta\bar M\|^2 \leq \delta^2\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2.$$

Оценим третье слагаемое в (11):

$$2\,|(\Delta\bar A, Q\Delta\bar M)_\alpha| \leq 2\alpha\,|(\Delta\bar A, Q\Delta\bar M)| + 2\,|(\mathrm{rot}\,\Delta\bar A, \mathrm{rot}\,Q\Delta\bar M)| \leq$$

$$\leq \alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_1}\|\Delta\bar A\|^2+\varepsilon_1\|Q\Delta\bar M\|^2\right)+\frac{1}{\varepsilon_2}\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2+\varepsilon_2\|\mathrm{rot}\,Q\Delta\bar M\|^2,$$

где $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$ . Учитывая (6), тогда получим

$$\|R(\bar A_1)-R(\bar A_2)\|_\alpha^2 \leq \alpha\left(1+\frac{1}{\varepsilon_1}\right)\|\Delta\bar A\|^2 + \\ +\left(1+\delta^2+\varepsilon_1\alpha c^2(1-\nu_*)^2+\frac{1}{\varepsilon_2}+\varepsilon_2(1-\nu_*)^2\right)\|\mathrm{rot}\,\Delta\bar A\|^2.$$

Выбирая $\varepsilon_2=1/(1-\nu_*)$ и $\varepsilon_1=\{1-0{,}25(\delta-\sqrt{\delta^2+4(2-\nu_*)})^2\}/\{\alpha c^2(1-\nu_*)^2\}$, получаем (8).

Следствием леммы 3 и теоремы 29.3 из [11] является теорема.

**Теорема 1**

Уравнение

$$R(\bar A)=\bar A_c \tag{12}$$

имеет единственное решение $\bar A_*\in H(\mathrm{rot},\Omega)$, $\alpha\in(0,\alpha^*)$ для любого $\bar A_c\in H(\mathrm{rot},\Omega)$. Это решение можно получить методом последовательных приближений:

$$\bar A_{n+1}=\bar A_n-\tau\,(R(\bar A_n)-\bar A_c),\quad n=0,1,\ldots\ ,$$

при заданном $\bar A_0\in H(\mathrm{rot},\Omega)$, $\tau\in(0,2\varkappa/\ell^2)$. Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|\bar A_n-\bar A_*\|\leq \tau\,(q_\tau)^n(1-q_\tau)^{-1}\,\|R(\bar A_0)-\bar A_c\|_\alpha,$$

где при

$$\tau=\tau_0=\varkappa/\ell,\quad q_{\tau_0}^2=1-(\varkappa/\ell)^2.$$



## 3. Сходимость итерационного процесса Ньютона

Установим сначала некоторые свойства производной Фреше оператора $R$ . Имеем

$$R'(\bar A)\bar A'=\bar A'-Q\bar M',$$

$$\bar M'=M'(x,\bar B)\bar B'=\left(1-\frac{1}{\mu_d(x,|\bar B|)}\right)\bar B',$$

где $\bar B=\mathrm{rot}\,\bar A$, $\bar B'=\mathrm{rot}\,\bar A'$.

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 5**

Пусть выполняются предположения леммы 2, тогда оператор $R'(\bar A): H(\mathrm{rot},\Omega)\to H(\mathrm{rot},\Omega)$, $\bar A\in H(\mathrm{rot},\Omega)$ обладает следующими свойствами:

1) $R'(\bar A)$ – непрерывно обратим на $H(\mathrm{rot},\Omega)$

$$\|R'(\bar A)\bar A'\|_\alpha \geq \varkappa\|\bar A'\|_\alpha,\quad \alpha\in(0,\alpha^*),\ \bar A,\bar A'\in H(\mathrm{rot},\Omega). \tag{13}$$

2) Если

$$\left|\frac{1}{\mu_d(|\bar B_1|)}-\frac{1}{\mu_d(|\bar B_2|)}\right| \leq \gamma\,\bigl||\bar B_1|-|\bar B_2|\bigr|, \tag{14}$$

то $R'$ удовлетворяет условию Липшица:

$$\|R'(\bar A_1)-R'(\bar A_2)\|_\alpha \leq \ell_1\|\bar A_1-\bar A_2\|_\alpha,\quad \alpha>0, \tag{15}$$

где $\bar A_1,\bar A_2\in H(\mathrm{rot},\Omega)$, $\ell_1=\gamma(1+\alpha c^2)^{1/2}$.

**Доказательство**

Заметим, что в силу неравенства (4), $\|\bar M'\|\leq(1-\nu_*)\|\bar B'\|$, поэтому оценка сверху для оператора $R'$ проводится аналогично оценке оператора $R$ . Доказательство неравенства (13) проводится аналогично доказательству сильной монотонности оператора $R$ . Сначала получаем неравенство

$$\alpha(\bar A',\bar A'-QM'(\bar B)\bar B')\geq\alpha\left\{\left(1-\frac{1}{2\varepsilon}c(1-\nu_*)\right)\|\bar A'\|^2-\frac{\varepsilon}{2}c(1-\nu_*)\|\bar B'\|^2\right\},$$

где $\varepsilon>0$, $c=\|Q\|$ , а также неравенство

$$(\bar B',\bar B'-SM'(\bar B)\bar B')\geq\nu_*\|\bar B'\|^2.$$

Выбирая $\varepsilon$ как в (10), получаем (13):

$$(R'(\bar A)\bar A',\bar A')_\alpha\geq\varkappa\|\bar A'\|_\alpha^2,\quad \alpha\in(0,\alpha^*).$$

Справедливость неравенства (15) следует из оценок:

$$\|(R'(\bar A_1)-R'(\bar A_2))\bar A\|_\alpha = \|Q(M'(\bar B_1)\bar B - M'(\bar B_2)\bar B)\|_\alpha \le$$
$$\le (\alpha\|Q\|^2+\|S\|^2)^{1/2}\,\|(M'(\bar B_1)-M'(\bar B_2))\bar B\| \le$$
$$\le (1+\alpha C^2)^{1/2}\,\|M'(\bar B_1)-M'(\bar B_2)\|\,\|\bar B\|.$$

Учитывая условие (I4), получаем

$$\|(R'(\bar A_1)-R'(\bar A_2))\bar A\|_\alpha \le \ell_1\|\bar B_1-\bar B_2\|\,\|\bar B\|,$$

откуда следует (I5).

Для решения уравнения (I) рассмотрим итерационный процесс Ньютона:

$$\bar A_{n+1} = \bar A_n - \left[R'(\bar A_n)\right]^{-1}\left(R(\bar A_n)-\bar A_c\right), \quad n=0,1,\dots \qquad (I6)$$

и модифицированный метод Ньютона:

$$\bar A_{n+1} = \bar A_n - \left[R'(\bar A_0)\right]^{-1}\left(R(\bar A_n)-\bar A_c\right), \quad n=0,1,\dots \qquad (I7)$$

Пусть $\bar A_*$ – решение уравнения (I). Сходимость итерационных процессов (I6) и (I7) устанавливается следующей теоремой.

Теорема2

Пусть выполняются предположения леммы 2 и справедливо неравенство (I4), $\|R(\bar A_0)-\bar A_c\|_\alpha = \eta$, для $\bar A_0, \bar A_c \in H(rot,\Omega)$.

I). Если $q=\frac{\ell_1\eta}{2\varkappa}<1$, то итерационный процесс (I6) сходится к решению $\bar A_*$ в замкнутом шаре $\overline{U}_{r'}(\bar A_0)$, $r'=\frac{\eta}{\varkappa}\sum_{k=0}^{\infty}q^{2^k-1}$.

Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|\bar A_{n+1}-\bar A_*\|_\alpha \le \frac{\eta}{\varkappa}\left(q^{2^n-1}-1\right)/\left(1-q^{2^n}\right).$$

2). Если $\frac{2\ell_1\eta}{\varkappa}<1$, то итерационный процесс (I7) сходится к решению $\bar A_*$ в замкнутом шаре $\overline{U}_{r'}(\bar A_0)$, $r'=\frac{\varkappa}{\ell_1}\left(1-\sqrt{1-\frac{2\ell_1\eta}{\varkappa^2}}\right)$.

Скорость сходимости характеризуется неравенством

$$\|\bar A_{n+1}-\bar A_*\|_\alpha \le \frac{\eta}{\varkappa}\left(1-\sqrt{1-2\frac{\ell_1\eta}{\varkappa^2}}\right)\Big/\sqrt{1-2\frac{\ell_1\eta}{\varkappa^2}}.$$

Доказательство теоремы 2 проводится аналогично доказательству теорем 34.2 и 34.3 из [8].

В заключение авторы выражают благодарность П.Г.Акишину за полезные обсуждения.



## Литература


I. M.J.Newman, C.W.Trowbridge, L.R.Turner. In: Proc. 4th Conf. Magn. Technol., Brookhaven, NY, pp. 617-626, 1972.

2. П.Г.Акишин Сообщение ОИЯИ, PII-86-522, Дубна, 1986.

3. Е.П.Жидков, В.В.Журавлев, В.С.Кладницкий и др. Сообщение ОИЯИ, P9-88-508, Дубна, 1988.

4. Г.Дюво, Ж.-Л. Лионс. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980, 384с.

5. С.Г.Михлин. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Ф.-М., 1962.

6. О.А.Ладыженская, В.А.Солонников. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1960, т.59, с. II5-I73.

7. M.J.Friedman. SIAM J. APPL. MATH., vol.39, N I 1980, pp.I4-20.

8. В.А.Треногин. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980, 495с.

9. S.J.Polak, A.Wachters, A.de Beer. In: Proc. Ist COMPUMAG Conf., Oxford, Chilton, 1976, pp.I9-27.

IO. M.J.Friedman. Math. Comp., vol.43, N I68, 1984, pp.4I5-432.

II. А.Куфнер, С.Фучик. Нелинейные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1988, 304с.


Рукопись поступила в издательский отдел
27 июня 1989 года.